10.3. Linjärkombination

Definition 10.27. Låt $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ i ett linjärt rum V. En vektor $\boldsymbol{u}$ av formen

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n,$$

kallas en **linjärkombination** av M.

Exempel 10.28. Varje vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ i $\mathbf{R}^n$ är en linjärkombination av vektorerna $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^t, \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)^t$, ty

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n.$$

□

Exempel 10.29. Varje andragradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2$ är en linjärkombination av polymonen $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, och $p_2(x) = x^2$, ty

$$p(x) = ap_2(x) + bp_1(x) + cp_0(x).$$

□

Exempel 10.30. Varje symmetrisk matris $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ i M_{22} är en linärkombination av mängden $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, ty

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exempel 10.31. Vektorn $\boldsymbol{u} = (4, 8, 12, 4)^t$ är en linjärkombination av mängden $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$, där $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^t$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, -1, 1, -1)^t$, $\boldsymbol{v}_3 = (1, 1, -1, -1)^t$ och $\boldsymbol{v}_4 = (1, -1, -1, 1)^t$, ty

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 + \lambda_4 \boldsymbol{v}_4 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 12 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} \lambda_1 & = & 7 \\ \lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_3 & = & -1 \\ \lambda_4 & = & -3 \end{array} \right.$$

Alltså är $\boldsymbol{u} = 7\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 - 3\boldsymbol{v}_4$ en linjärkombination. □

Exempel 10.32. Visa att i $\mathcal{P}_1$ är polynomet x en linjärkombination av $M = \{1+x, 1-x\}$.

Lösning: Låt $p_1(x) = 1 + x$ och $p_2(x) = 1 - x$. Då är $p(x) = x$ en linjärkombination av $\{p_1(x), p_2(x)\}$ om det finns tal λ_1 och λ_2, så att

$$p(x) = \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) \Leftrightarrow \lambda_1(1+x) + \lambda_2(1-x) = x \Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)x = x.$$

Eftersom likheten skall gälla för alla x, identifierar vi koefficienterna

$$\underline{(\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot 1 + \underline{\underline{(\lambda_1 - \lambda_2)}} \cdot x = \underline{0} \cdot 1 + \underline{\underline{1}} \cdot x$$

får vi ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} \lambda_1 & = & 1/2 \\ \lambda_2 & = & -1/2 \end{array}\right.$$

Därmed är $p(x) = \frac{1}{2}p_1(x) - \frac{1}{2}p_2(x)$ en linjärkombination av M. $\square$

Begreppet *spänna upp*, som vi alldeles strax ska definiera, behövs för att veta vilka vektorer som är inom räckhåll för oss.

Definition 10.33. Låt V vara ett vektorrum och låt M vara en delmängd av V, dvs $M \subseteq V$. Vi säger att mängden M **spänner upp** V om varje element i V är en linjärkombination av M.

Exempel 10.34. Mängden

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

spänner upp M_{22}, ty varje godtycklig matris är en linjärkombination enligt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Exempel 10.35. Undersök om mängden $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$, där $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1,1)^t$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,-1,1,-1)^t$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,1,-1,-1)^t$ och $\boldsymbol{v}_4 = (1,-1,-1,1)^t$ spänner upp $\mathbf{R}^4$.

Lösning: M spänner upp $\mathbf{R}^4$ om varje vektor $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ är en linjärkombination av M, dvs om det finns tal $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ och λ_4, så att

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 + \lambda_4\boldsymbol{v}_4 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & x_2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & x_3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \Leftrightarrow A\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{u}.$$

Eftersom $\det A = 16 \neq 0$, säger Sats 8.17 att A är inverterbar och att systemet $A\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{u}$ har därmed den entydiga lösningen $\boldsymbol{\lambda} = A^{-1}\boldsymbol{u}$. Eftersom $\boldsymbol{u}$ är ett godtyckligt element, så spänner M upp $\mathbf{R}^4$. $\square$

Exempel 10.36. Undersök om funktionsmängden $M = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ spänner upp $\mathcal{P}_2$ = mängden av alla polynom av gradtal ≤ 2.

Lösning: M spänner upp $\mathcal{P}_2$ om varje polynom $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2$ kan skrivas som en linjärkombination av just mängden $M = \{p_0(x) = 1,\ p_1(x) = 1+x,\ p_2(x) = 1+x+x^2\}$, dvs om det finns tal λ_0, λ_1 och λ_2, så att

$$p(x) = \lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) \Leftrightarrow \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1(1+x) + \lambda_2(1+x+x^2) = ax^2 + bx + c$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\cdot 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\cdot x + \lambda_2 \cdot x^2 = ax^2 + bx + c$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & c \\ & & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & b \\ & & & & \lambda_2 & = & a \end{array}\right.$$

Detta system har lösningen $\lambda_2 = a$, $\lambda_1 = b - c$ och $\lambda_1 = c - b$. Eftersom $p(x) = ax^2 + bx + c$ är godtyckligt i $\mathcal{P}_2$ så spänner M upp $\mathcal{P}_2$. $\square$