2.3. Bas

Definition 2.25. Mängden $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ är en **bas** för vektorerna i planet om den är linjärt oberoende. Om

$$\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

säger vi att $\boldsymbol{u}$ har **koordinaterna** (x, y) i basen $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$.

Exempel 2.26. Vi har tidigare definierat vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ som en **standardbas** för planet. Detta eftersom varje vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ i planet är en linjärkombination av dessa:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Vi gör en motsvarande definition i rummet.

Definition 2.27. Mängden $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ är en **bas** för vektorerna i rummet om den är linjärt oberoende. Om

$$\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

säger vi att $\boldsymbol{u}$ har **koordinaterna** (x, y, z) i basen $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

Exempel 2.28. Vi säger att vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en **standardbas** för rummet, ty varje godtycklig vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ i rummet är en linjärkombination av dessa:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exempel 2.29. Visa att vektorn $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ligger i samma plan som spänns upp av $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ange också koordinaterna för $\boldsymbol{u}$ i basen $\underline{\boldsymbol{v}} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$.

Lösning: Vektorn $\boldsymbol{u}$ ligger i samma plan som spänns upp av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ om det finns λ_1 och λ_2 ej båda 0, så att

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 & = & -3 \\ \lambda_2 & = & 1 \end{cases}$$

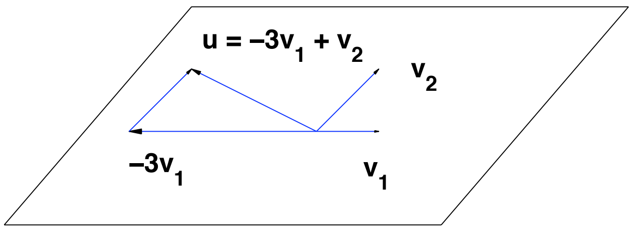
Vi får alltså att $\boldsymbol{u}$ är linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$, ty

$$\boldsymbol{u} = -3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2. \tag{2.2}$$

Detta betyder att $\boldsymbol{u}$ ligger i samma plan som spänns upp av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$. Sambandet (2.2) visar på något mer. Vi ser att vi kan nå $\boldsymbol{u}$ om vi går 3 längdenheter i motsatt riktning för $\boldsymbol{v}_1$ och 1 längdenhet längs $\boldsymbol{v}_2$. Dessa steg av längdenheter har vi kallat för koordinater längs respektive vektor. Alltså har $\boldsymbol{u}$ koordinaterna -3 och 1 i basen $\underline{\boldsymbol{v}} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ och vi skriver

$$\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{v}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Figur 2.30.



På samma sätt som i Exempel 2.13 kan man visa att planet som spänns upp av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ har ekvationen $3x - 4y + z = 0$, där normalen $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ är ortogonal mot både $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$, dvs

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}_1 & = & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}_2 & = & \mathbf{0} \end{cases}$$

□

Exempel 2.31. Låt $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ vara en bas i planet. Visa att

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \boldsymbol{f}_1 & = & \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{f}_2 & = & -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \end{array} \right. \tag{2.3}$$

också är en bas och bestäm koordinaterna för $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$ i denna bas.

Lösning: 1. Vi börjar med att visa att mängden $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$ är en bas för planet. Då antalet vektorer är rätt, dvs 2 i planet så räcker det med att visa att dessa är linjärt oberoende. Eftersom systemet

$$\lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \lambda_1 \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

endast har den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, så är $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$ en bas för planet. Vi sätter då $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$.

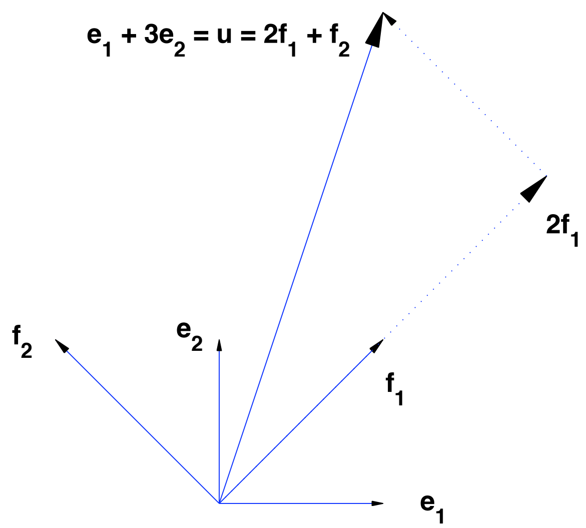
2. Vi bestämmer nu koordinaterna för $\boldsymbol{u}$ i den nya basen $\underline{\boldsymbol{f}}$. Vi behöver bestämma steglängder λ_1 och λ_2 vi behöver gå längs basvektorerna $\boldsymbol{f}_1$ resp. $\boldsymbol{f}_2$ (eller deras motsatta riktning) för att nå $\boldsymbol{u}$, dvs vi söker en lösning på systemet

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{f}_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Denna lösning är $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_1 = 1$. Dessa är $\boldsymbol{u}$:s koordinater i basen $\underline{\boldsymbol{f}}$, dvs

$$\boldsymbol{u} = 2 \cdot \boldsymbol{f}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{f}_2 = \underline{\boldsymbol{f}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Figur 2.32.



□

Exempel 2.33. Enligt Exempel 2.20, så är vektorerna

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{cases}$$

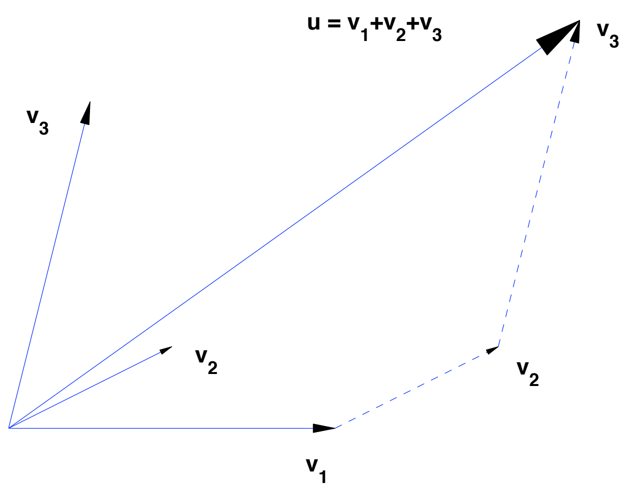
linjärt oberoende. Därmed är de en bas för rummet. Låt oss bestämma koordinaterna för vektorn $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ i basen $\underline{\boldsymbol{v}} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$. Vi behöver alltså bestämma talen x, y och z så att $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3 = \underline{\boldsymbol{v}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dvs

$$\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3 \Leftrightarrow x\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Löser vi ekvationssytemet får vi $x = y = z = 1$. Vektorn $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ har alltså koordinaterna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i basen $\underline{\boldsymbol{v}} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, dvs $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{v}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vektorn $\boldsymbol{u}$ kan därmed skrivas i både den "gamla" som i den "nya" basen enligt

$$\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{v}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Figur 2.34.



□