4.3. Tillämpningar

Definition 4.12. (Area av en parallellogram) Arean A av den parallellogram som spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är

$$A = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\theta, \qquad \text{dvs} \qquad A = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|.$$

Exempel 4.13. Beräkna arean av den triangel som i ett ortonormerat koordinatsystem har hörnen i $P = (1,0,1)$, $Q = (1,2,1)$ och $R = (3,2,1)$.

Lösning: Låt O vara origo i detta koordinatsystem. Då ges ortsvektorerna $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ och $\overrightarrow{OR}$ av

$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overrightarrow{OR}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Låt

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

och

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}.$$

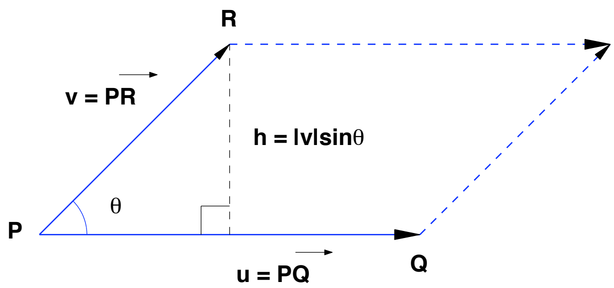
Kantvektorerna $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$ spänner upp en parallellogram vars area är $|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|$. Triangelns area blir då $\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|$. Nu är

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\0 & 2 & 0\\2 & 2 & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_1\begin{vmatrix}2 & 0\\2 & 0\end{vmatrix}-\boldsymbol{e}_2\begin{vmatrix}0 & 0\\2 & 0\end{vmatrix}+\boldsymbol{e}_3\begin{vmatrix}0 & 2\\2 & 2\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{e}_3=\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}.$$

Triangelns area är alltså

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+(-4)^2} = 2 \text{ a.e.}$$

Figur 4.14.



□

Definition 4.15. (Volymen av en parallellepiped) Volymen V av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ är

$$V = |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}|.$$

Exempel 4.16. Låt $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vara tre vektorer i rummet, (ON-bas).

1. Bestäm arean av den parallellogram som spänns upp av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$.
2. Beräkna volymen av den parallellepiped som spänns upp av $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$.

Lösning: Vi har att

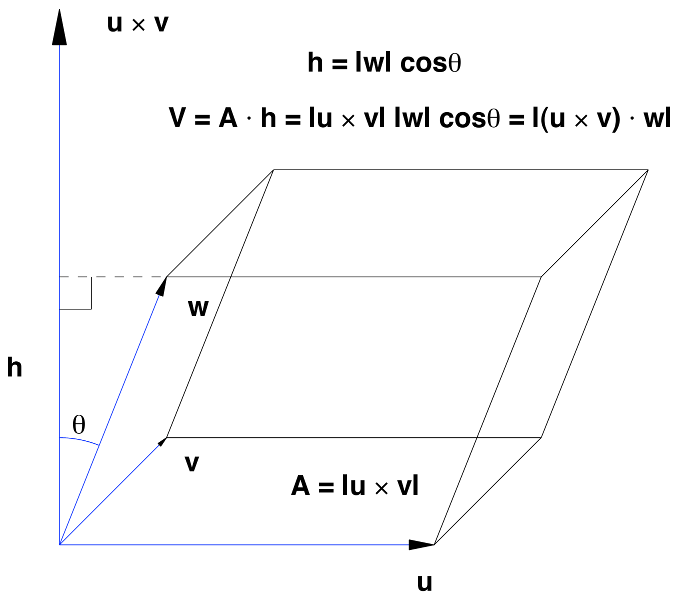
$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parallellogramens area blir då $\sqrt{(-1)^2 + 0 + 1^2} = \sqrt{2}$ a.e.
Vidare gäller att

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Volymen är då $|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}| = 1$ v.e.

Figur 4.17.



$\square$

Låt $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ vara tre vektorer i rummet. Enligt Definition 4.15 så ges volymen av den parallellepiped som spänns upp av dessa av

$$V = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|\, |\boldsymbol{w}| \cos\theta = |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}|.$$

Detta i sin tur motiverar följande definition

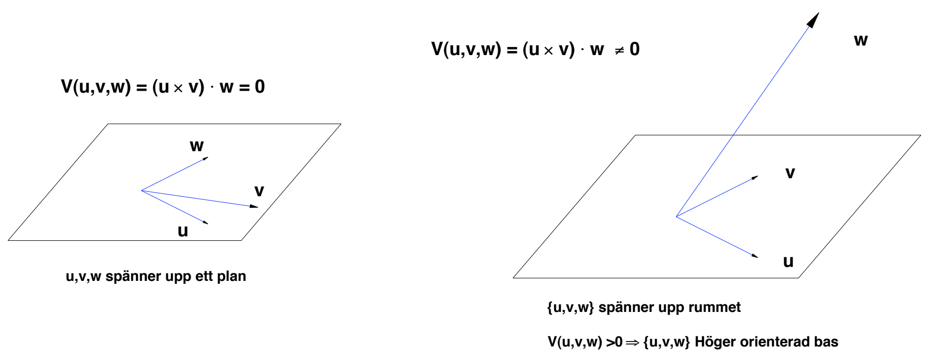
Definition 4.18. **Volymprodukten** $V(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ av tre vektorer $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ i rummet ges av

$$V(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}.$$

Anmärkning 4.19. Nedan har vi formulerat några egenskaper hos volymprodukten som är en direkt följd av definitionen ovan.

1. Volymproduktens värde är lika med determinanten.
2. Om volymprodukten **är lika med noll**, så är vektorerna linjärt beroende, dvs ligger i samma plan (på samma linje).
3. Om volymprodukten **är skild från noll**, så är vektorerna linjärt oberoende och bildar därmed en bas i rummet.
4. Om volymprodukten är **positiv**, så bildar mängden $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ en *höger orienterad* bas i rummet, dvs vektorerna $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ *ligger på samma sida* om planet genererat av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$.

Figur 4.20.



$\square$

Exempel 4.21. Ange ekvationen för det plan som går igenom punkterna

$$P_0 = (1,0,0),\ P_1 = (0,1,1),\ \text{och } P_2 = (2,0,1).$$

Vi förutsätter att vi har en ON-bas.

Lösning: Låt O vara origo i rummet. Vi utgår från punkten P_0 och bildar riktningsvektorerna som spänner upp planet. Låt därför

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{P_2P_0} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

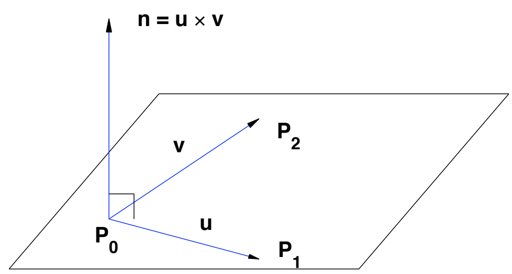
Eftersom normalen $\boldsymbol{n}$ är ortogonal mot planet; är den ortogonal mot $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. Vi väljer därför

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Alltså är $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. En kontroll visar att $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{v}$.

Planetsekvationen är då $x + 2y - z = D$. Sätter vi in t.ex. punkten $P_0 = (1,0,0)$ får vi ekvationen $x + 2y - z = 1$.

Figur 4.22.



□

Exempel 4.23. Finns det något plan som innehåller punkterna

$$P_0 = (1,0,0),\ P_1 = (0,1,1),\ P_2 = (2,0,1) \text{ och } P_3 = (1,1,-2)?$$

Vi förutsätter att vi har en ON-bas.

Lösning: Vi bildar vektorerna $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{P_1P_0}$, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{P_2P_0}$ och $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{P_3P_0}$. Enligt Anmärkning 4.19, så ligger alla fyra punkterna i ett och samma plan om vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ är linjärt beroende. Därmed spänner de inte upp mer än ett plan och volymprodukten är då noll; se figur 4.17. Om O är origo i rummet, så får vi

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{P_2P_0} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{w} = \overrightarrow{P_3P_0} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vi beräknar nu volymprodukten $V(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$ enligt Exempel 4.10 eller Exempel 4.21:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \text{gå längs 1:a raden och plocka ner elementen med minus på andra} \\
&= (-1)\cdot\begin{vmatrix} \star & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & \star & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & \star \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \text{stryk den rad och kolonn som } \star \text{ står på} \\
&= (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \text{korsmultiplikation} \\
&= (-1)(0\cdot(-2) - 1\cdot 1) - 1\cdot(1\cdot(-2) - 0\cdot 1) + 1\cdot(1\cdot 1 - 0\cdot 0) = 4 \neq 0.
\end{aligned}$$

Eftersom volymprodukten $V(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \neq 0$ så spänner vektorerna ett rättblock och därmed kan punkterna P_0, P_1, P_2 och P_3 inte ligga i ett och samma plan; se figur 4.20. □

Observera att de 3 första punkterna ligger i planet $x + 2y - z = 1$. Den fjärde punkten ligger utanför detta plan.