21.2. Begynnelsevärdesproblem

Nedan ska vi ta hänsyn till att ett begynnelsevillkor hör också till systemet av differentialekvationer.
Lösning (21.6) till det frikopplade systemet (21.5) kan vi skriva på matrisform

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_1(t) & = & c_1 e^{\lambda_1 t} \\ z_2(t) & = & c_2 e^{\lambda_2 t} \\ z_3(t) & = & c_3 e^{\lambda_3 t} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Låt oss titta närmare på diagonalmatrisen $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$. Maclaurinutveckling ger

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+\lambda_1 t + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} + \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2 t + \frac{\lambda_2^2 t^2}{2!} + \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1+\lambda_3 t + \frac{\lambda_3^2 t^2}{2!} + \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} + \cdots \\ &= E + tD + \frac{t^2}{2!} D^2 + \cdots \\ &= e^{tD}. \end{aligned}$$

Detta motiverar följande definition

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}.$$

Med denna definition kan lösningen (21.7) skrivas

$$\boldsymbol{y}(t) = T e^{tD} \boldsymbol{c}. \tag{21.10}$$

Vidare gäller att eftersom

$$A = TDT^{-1},\ A^2 = TD^2T^{-1},\ A^3 = TD^3T^{-1}, \ldots, A^n = TD^nT^{-1}$$

för varje heltal n, så får vi om vi multiplicerar

$$e^{tD} = E + tD + \frac{t^2}{2!} D^2 + \cdots,$$

med T och T^{-1} från vänster respektive höger att

$$\begin{aligned} Te^{tD}T^{-1} &= TET^{-1} + tTDT^{-1} + \frac{t^2}{2!} TD^2T^{-1} + \cdots \\ &= E + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \cdots \\ &= e^{tA}. \end{aligned}$$

Alltså gäller att

$$e^{tA} = Te^{tD}T^{-1}.$$

Vi sammanfattar resultaten i det här avsnittet:

Sats 21.5. 1. Den allmänna lösningen till $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, ges av

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1\boldsymbol{v}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{v}_2e^{\lambda_2 t} + c_3\boldsymbol{v}_3e^{\lambda_3 t}, \tag{21.11}$$

eller

$$\boldsymbol{y}(t) = Te^{tD}\boldsymbol{c}.$$

2. Lösningen till **begynnelsevärdesproblemet** $\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t)$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$, ges av

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{tA}\boldsymbol{y}_0, \tag{21.12}$$

eller

$$\boldsymbol{y} = Te^{tD}T^{-1}\boldsymbol{y}_0. \tag{21.13}$$