10.7. Dimension

Definition 10.61. Om $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ är en bas för ett linjärt rum V, dvs V har en bas bestående av n st. basvektorer, säger vi att V har **dimensionen** n och vi skriver

$$\dim V = n.$$

Exempel 10.62. Vi har i Exempel 10.52 visat att

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t, \qquad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^t, \qquad \ldots \qquad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)^t$$

är en i bas $\mathbf{R}^n$. Det följer nu av Definition 10.61 att

$$\dim \mathbf{R}^n = n.$$

□

Exempel 10.63. Enligt Exempel 10.54 är mängden $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ en bas för $\mathcal{P}_n$. Detta tillsammans med Definition 10.61 visar att

$$\dim \mathcal{P}_n = n + 1.$$

□

Exempel 10.64. I Exempel 10.5 såg vi att lösningsmängden

$$L = \{y : \ y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0\},$$

är ett linjärt rum. Vi visade också där att om r_1 och r_2 är rötterna till $r^2 + ar + b = 0$, så är funktionerna $y_1(x) = e^{r_1 x}$ och $y_2(x) = e^{r_2 x}$ lösningar till differentialekvationen som ligger i L. Således ligger också alla linjärkombinationer $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ i L. Funktionerna $y_1(x) = e^{r_1 x}$ och $y_2(x) = e^{r_2 x}$ är de enda i L som är linjärt oberoende, ty ansatsen $y(x) = e^{rx}$ visar att $r = r_1$ eller $r = r_2$. Detta betyder att

$$L = \{y : \ y = \lambda y_1 + \lambda y_2\} = [y_1, y_2].$$

Alltså är $\{y_1, y_2\}$ en bas i L och att $\dim L = 2$. □

För att en mängd M ska spänna upp ett n-dimensionellt linjärt rum V måste M innehålla lika många linjärt oberoende vektorer som dimensionen anger, dvs n element.

Sats 10.65. Antag att V är ett linjärt rum med $\dim V = n$. Om mängden $M = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ är linjärt oberoende i V så spänner M upp V, dvs

$$[M] = V$$

och M är därmed en bas i V.

Bevis: Låt $\boldsymbol{u} \in V$ och bilda en ny mängd $M' = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{u}\}$ med $n+1$ element. Alltså har M' fler element än M och därmed är M' linjärt beroende enligt Sats 10.60, dvs

$$\mu\boldsymbol{u} + \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0} \tag{10.9}$$

där alla koefficienter $\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda, n$ inte kan vara 0. Om $\mu = 0$ i (10.9) så får vi

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}.$$

Men detta skulle betyda att mängden $\underline{\boldsymbol{e}}$ är linjärt beroende och därmed ingen bas vilket är en motsägelse Därför är $\mu \neq 0$ och följaktligen är

$$\boldsymbol{u} = -\frac{\lambda_1}{\mu}\boldsymbol{e}_1 - \frac{\lambda_2}{\mu}\boldsymbol{e}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\mu}\boldsymbol{e}_n,$$

dvs $\boldsymbol{u}$ är en linjärkombination av M. Eftersom $\boldsymbol{u}$ var ett godtyckligt element i V, så spänner alltså M upp V. Mängden M är både linjärt oberoende och spänner upp V och är därmed en bas för V. □

Med satserna ovan är vi klara med förbredelserna för det viktigaste resultatet i det här avsnittet.

Sats 10.66. Om U är ett underrum av V och $\dim U = \dim V$, så är $U = V$.

Bevis: Antag att U är ett underrum av V och att $\dim U = n = \dim V$. Låt nu mängden M vara en bas i U. Då följer av Sats 10.60 att M spänner upp U, dvs $U = [M]$. Eftersom nu M är linjärt oberoende med antalet basvektorer $= n = \dim V$ säger Sats 10.65 att M spänner upp V, dvs $V = [M]$. Således är $U = V$. □

Exempel 10.67. Banta ned och fylla ut. Låt $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ vara en bas i $\mathbf{R}^3$. Låt $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$, där

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0)^t, \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,0,1)^t, \quad \boldsymbol{v}_3 = (2,2,0)^t \quad \text{och} \quad \boldsymbol{v}_4 = (2,1,1)^t.$$

1. Bestäm linjära höljet $W = [M]$.
2. Bestäm $\dim W$.
3. Banta ner mängden M till en bas i W.
4. Fyll ut basen i W till en bas i $\mathbf{R}^3$.

Lösning: 1. Linjära höljet $W = [M]$, se Definition 10.37, är

$$W = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 : \ \boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 + \lambda_4\boldsymbol{v}_4\}.$$

Enligt Sats 10.60 är mängden M linjärt beroende, ty

$$\text{antal element i } M = 4 > 3 = \dim \mathbf{R}^3.$$

I mängden M finns alltså element som är linjärkombinationer i de övriga och därmed är onödiga. Vi identifierar dessa genom att undersöka linjärt beroende hos M:

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 + \lambda_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{10.10}$$

Vi har alltså kommit fram till följande ekvationssytem

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \qquad \lambda_2 \qquad\quad + \lambda_4 = 0 \end{cases} \tag{10.11}$$

Sätter vi $\lambda_4 = t$ och $\lambda_3 = s$ i (10.11) får vi att

$$\lambda_2 = -t \quad \text{och} \quad \lambda_1 = -\lambda_2 - 2\lambda_3 - 2\lambda_4 = -2s - t.$$

Relationen (10.10) kan då skrivas

$$(-2s - t)\boldsymbol{v}_1 - t\boldsymbol{v}_2 + s\boldsymbol{v}_3 + t\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}. \tag{10.12}$$

Väljer vi $s = 0$ och $t = 1$ i (10.12) är relationen reducerad till

$$-\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \quad \text{linjärkombination!}$$

Väljer vi istället $s = 1$ och $t = 0$ i (10.12) blir relationen

$$-2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 \quad \text{linjärkombination!}$$

Vi kan tydligen klara oss utan $\boldsymbol{v}_3$ och $\boldsymbol{v}_4$ då dessa är linjärkombinationer i de övriga. Enligt Sats 10.42 kan dessa onödiga element tas bort ur höljet, dvs

$$W = [M] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 : \ x_1 - x_2 - x_3 = 0\}.$$

2. Enligt 1. är $\dim W = 2$.

3. Vi bantar ned M till mängden $M' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ som är en bas för W.

4. Eftersom $\dim \mathbf{R}^3 = 3$ och $\dim W = 2$ behöver vi fylla ut basen M' i W till en bas $M'' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3'\}$ för hela $\mathbf{R}^3$ med endast en vektor, $\boldsymbol{v}_3'$. Låt oss titta på sista matrisekvationen (10.10). Kolonnerna 3 och 4 som svarade mot $\boldsymbol{v}_3$ och $\boldsymbol{v}_4$ skall ersättas med en kolonn som svarar mot $\boldsymbol{v}_3'$:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3' = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \end{array}\right).$$

Ur matrissystemet ser vi att vi ska välja $x_3 \neq 0$ så att på sätt tvinga λ_3 till att vara 0 och som i sin tur tvingar $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Enklast låter vi $x_3 = 1$ och $x_1 = x_2 = 0$:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3' = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Alltså låt $\boldsymbol{v}_3' = (0,0,1)^t$. Med detta val blir M'' en bas för $\mathbf{R}^3$.

Observera Alternativt kan vi välja $\boldsymbol{v}_3'$ till vilken vektor som helst utanför planet $W :\ x_1 - x_2 - x_3 = 0$, t.ex., normalen $\boldsymbol{v}_3' = (1,-1,-1)^t$. □

Exempel 10.68. Låt $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, där vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0,1)^t$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,1,0)^t$, och $\boldsymbol{v}_3 = (1,-1,1,-1)^t$ och betrakta **hyperplanet**

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^4 :\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0.\}$$

1. Visa att M utgör en bas för W
2. Spänner M upp hela W?
3. Härled ett villkor för att $\boldsymbol{u} \in [M]$.

Lösning: 1. och 2. Vi undersöker linjärt beroende hos M:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \tag{10.13}$$

M är linjärt oberoende och därmed är $\dim[M] = 3$.

Vi undersöker om M ligger i W. Sätter vi in koordinaterna för vektorerna $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ i hyperplanetsekvation ser vi att dessa satisfierar ekvationen. Alltså $M \in W$.

Vi bestämmer $\dim W$. Vi bestämmer därför antalet linjärt oberoende riktningavektorer som spänner upp W. Detta gör vi genom att parametrisera ekvationen. Sätt $x_4 = t_1$, $x_3 = t_2$ och $x_2 = t_3$. Då kan vi lösa ut

$$x_1 = -x_2 + x_3 + x_4 = -t_3 + t_2 + t_1.$$

Ekvationen kan därmed skrivas på parameterform:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 + t_2 - t_3 \\ t_3 \\ t_2 \\ t_1 \end{pmatrix} = t_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{w}_1} + t_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{w}_2} + t_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{w}_3}.$$

Hyperplanet W spänns upp av 3 linjärt oberoende riktningsvektorer $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ och $\boldsymbol{w}_3$. Alltså är $\dim W = 3$. Eftersom M och därmed $[M]$ ligger i W samt att $\dim[M] = \dim W$, så följer av Sats 10.66 att $[M] = W$. Vi har därmed visat att M är en bas i W och att M spänner upp W.

3. Villkoret för att vektorn $\boldsymbol{u}$ som skall få tillhöra $[M]$ är att $\boldsymbol{u}$ är en linjärkombination av M. Låt $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ vara godtycklig. Då är

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 + \lambda_4\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & -1 & x_4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_3 - x_2 - x_1 \end{array}\right).$$

I sista raden i matrissystemet ser vi att vi måste kräva av koordinaterna till vektorn $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ att uppfylla sambandet

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

Vi har alltså visat att $[M] = W$. $\square$

Exempel 10.69. Bestäm dimensionen till följande underrum i $\mathbf{R^4}$:

1. $U = [(1,1,1,0)^t, (1,1,0,1)^t, (1,0,1,1)^t]$.
2. $V = [(1,1,1,0)^t, (1,1,0,1)^t, (1,0,1,1)^t, (0,1,-1,0)^t]$.
3. $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R^4};\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$.

Bestäm också en bas till dessa underrum samt utvidga till bas i $\mathbf{R^4}$.

Lösning: 1a. Dimensionen för underrummet U är lika med antalet linjärt oberoende vektorer som spänner upp U. Om $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1,0)^t$, $\boldsymbol{u}_2 = (1,1,0,1)^t$ och $\boldsymbol{u}_3 = (1,0,1,1)^t$, så är

$$\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \lambda_3\boldsymbol{u}_3 = \mathbf{0} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Detta visar att mängden $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ är linjärt oberoende. Alltså är mängden $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ en bas i underrummet U och att $\dim U = 3$.

1b. För att utvidga till en bas i $\mathbf{R^4}$ behöver vi fylla ut mängden $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ med en fjärde basvektorn $\boldsymbol{u}_4$. För att inte riskera välja $\boldsymbol{u}_4 \in U$, dvs $\boldsymbol{u}_4$ som en linjärkombination av $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, tar vi reda på hur de vektorer som ligger i U ser ut.
En vektor $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in U$ om det finns tal λ_1, λ_2 och λ_3, så att

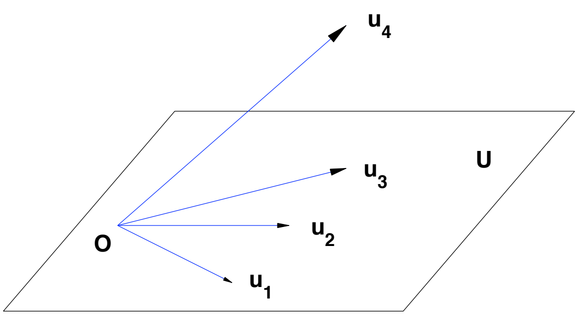
$$\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \lambda_3\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_3 + x_2 - 2x_1 \end{array}\right).$$

Alltså för att $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ ska få ligga i U, så måste dess koordinater uppfylla ekvationen $\quad 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$.
Vi har dessutom visat att

$$[(1,1,1,0)^t, (1,1,0,1)^t, (1,0,1,1)^t] = U = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R^4} : 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0.\}.$$

En vektor $\boldsymbol{u}_4 \notin U$ är en vektor vars koordinator inte uppfyller ekvationen. T.ex. kan vi välja $\boldsymbol{u}_4 = (1,0,0,0)^t$. Den utvidgade mängden $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ är nu en bas för hela $\mathbf{R^4}$.

Figur 10.70.



2a. Vi undersöker linjärt beroende hos vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1,0)^t$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,1,0,1)^t$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,0,1,1)^t$ och $\boldsymbol{v}_4 = (0,1,-1,0)^t$ och finner att

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 + \lambda_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcr} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & -t \\ \lambda_3 & = & t \\ \lambda_4 & = & t \end{array}\right.$$

Insatt i ekvationen får vi att

$$-t\boldsymbol{v}_2 + t\boldsymbol{v}_3 + t\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}.$$

Vi har alltså linjärt beroende där vi kan uttrycka en vektor som en linjärkombination av dem andra. T.ex skulle vi kunna stryka $\boldsymbol{v}_4$ från mängden utan att förändra V, ty

$$\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3.$$

Återstår då 3 vektorer $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ som är linjärt oberoende och därmed är $\dim V = 3$ och $V = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$.

2b. Att fylla ut mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ till en bas för hela $\mathbf{R^4}$ gör vi på samma sätt som i 1a.

3a. Vi skriver hyperplanet

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

på parameterform m.h.a. riktningsvektorerna genom att sätta $x_4 = t_1$, $x_3 = t_2$ och $x_2 = t_3$, så att $x_1 = t_1 + t_2 + t_3$, dvs

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 + t_2 + t_3 \\ t_3 \\ t_2 \\ t_1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

På samma sätt som ovan kan man nu visa att $\boldsymbol{w}_1 = (1,0,0,1)^t$, $\boldsymbol{w}_2 = (1,0,1,0)^t$, och $\boldsymbol{w}_3 = (1,1,0,0)^t$ är linjärt oberoende så att $\dim W = 3$ och att $W = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3]$.

3b. Mängden $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ kan utvidgas till en bas $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4\}$ för hela $\mathbf{R^4}$ genom att välja $\boldsymbol{w}_4 = (0,0,0,1)^t \notin W$. □

Exempel 10.71. Ange en bas för $[1+x, x+x^2, 2x^2+5x+3] \subseteq \mathcal{P}_2$ och ange koordinaterna för $p(x) = 1 - x^2$ i denna.

Lösning: Vi börjar med att undersöka linjärt beroende hos polynomen $p_0(x) = 1 + x$, $p_1(x) = x + x^2$ och $p_2(x) = 2x^2 + 5x + 3$ genom att studera definitionen

$$\lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0(1+x) + \lambda_1(x+x^2) + \lambda_2(2x^2+5x+3) = 0.$$

Vi förenklar uttrycket:

$$(\lambda_0 + 3\lambda_2)\cdot 1 + (\lambda_0 + \lambda_1 + 5\lambda_2)\cdot x + (\lambda_1 + 2\lambda_2)\cdot x^2 = 0. \tag{10.14}$$

Vi söker alltså en lösning λ_0, λ_1, och λ_2 så att ekvation (10.14) är uppfylld för alla $x \in \mathbf{R}$. Vi identifierar koefficienter och får systemet

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_0 & & & + & 3\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & 5\lambda_2 & = & 0 \\ & & \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccr} \lambda_0 & = & -3t \\ \lambda_1 & = & -2t \\ \lambda_2 & = & t \end{array}\right.$$

Polynomen är alltså linjärt beroende

$$-3tp_0(x) - 2tp_1(x) + tp_2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3p_0(x) + 2p_1(x) - p_2(x) = 0.$$

Ett av polynomen är överflödigt och kan därmed strykas ur mängden, t.ex. så är

$$p_2(x) = 3p_0(x) + 2p_1(x).$$

Vi har alltså att

$$\dim[1+x, x+x^2, 2x^2+5x+3] = 2$$

och att

$$[1+x, x+x^2] = [1+x, x+x^2, 2x^2+5x+3].$$

Koordinaterna för $p(x) = 1 - x^2$ i basen $[1+x, x+x^2]$ ges av

$$\lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow \lambda_0(1+x) + \lambda_1(x+x^2) = 1 - x^2 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccr} \lambda_0 & = & 1 \\ \lambda_1 & = & -1 \end{array}\right.$$

Polynomet $p(x) = 1 - x^2$ har alltså koordinatern $(1, -1)^t$ i basen $\{1+x, x+x^2\}$. $\square$

Exempel 10.72. Betrakta följden $\{\cos jx\}_{j=0}^{\infty}$ som är viktig i tillämpningar. T.ex. kan den förekomma i approximationsteori, ljud- och signalteknik.

Vi tänker visa genom induktion att följden är linjärt oberoende i det linjära rummet $C[-\pi, \pi]$. Funktionerna 1 och $\cos x$ är linjärt oberoende, ty

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot \cos x = 0 \tag{10.15}$$

skall gälla för varje $x \in [-\pi, \pi]$. För $x = \dfrac{\pi}{2}$ gäller att

$$\lambda_0 + \lambda_1 \cos \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_0 = 0.$$

Vi får alltså att $\lambda_0 = 0$ och av relationen i (10.15) följer att $\lambda_0 = 0$. Därmed är påståendet sant för de två första funktionerna i följden.
Vi antar nu att följden $\{\cos jx\}_{j=0}^{n}$ är linjärt oberoende, dvs

$$\lambda_0 + \lambda_1 \cos x + \cdots + \lambda_j \cos jx + \cdots + \lambda_n \cos nx = 0$$

endast har lösningen $\lambda_j = 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ för varje $x \in [-\pi, \pi]$.
Vill visa nu att även följden $\{\cos jx\}_{j=0}^{n+1}$ är linjärt oberoende, dvs

$$\lambda_0 + \lambda_2 \cos x + \cdots + \lambda_j \cos jx + \cdots + \lambda_n \cos nx + \lambda_{n+1} \cos(n+1)x = 0 \tag{10.16}$$

är uppfyllt för alla $x \in [-\pi, \pi]$ endast om alla $\lambda_j = 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n+1$. Sätter vi in $x = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ i ekvationen i (10.16) försvinner sista termen och vi får att

$$\lambda_0 + \lambda_2 \cos \frac{\pi}{2(n+1)} + \cdots + \lambda_j \cos \frac{j\pi}{2(n+1)} + \cdots + \lambda_n \cos \frac{n\pi}{2(n+1)} = 0$$

som enligt induktionsantagandet endast har lösningen $\lambda_j = 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Alltså, ekvationen i (10.16) reduceras nu till enbart

$$\lambda_{n+1} \cos(n+1)x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_{n+1} = 0.$$

Enligt induktionsprincipen följer nu att $\lambda_j = 0$ för alla $j = 0, 1, 2, \ldots, n+1$. Detta visar att vektorrummet $C[-\pi, \pi]$ har inte en ändlig dimension.
Ett vektorrum som inte har en ändlig bas säges ha **oändlig** dimension.
Vi kommer tillbaka i ett senare avsnitt till följden ovan då vi studerar en viktig tillämpning av den. □