21.5. Differensekvationer

Låt $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ vara en talföljd. Rekursionsformeln

$$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21.15}$$

där begynnelsevillkoren a_0 och a_1 är givna kallas för en **differensekvation**. Denna typ av ekvationer dyker upp som matematisk modell för t.ex. tids-diskreta problem. Sätter vi

$$\boldsymbol{u}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix},$$

så kan vi skriva sambandet i (21.15) som ett **iterativt linjärt system** på matrisform enligt

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+2} & = & \alpha a_{n+1} + \beta a_n \\ a_{n+1} & = & a_{n+1} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix},$$

dvs

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = A\boldsymbol{u}_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21.16}$$

där $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Itererar vi nu bakåt i uttrycket (21.16) får vi

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = A\boldsymbol{u}_n = A^2\boldsymbol{u}_{n-1} = A^3\boldsymbol{u}_{n-2} = \cdots = A^{n+1}\boldsymbol{u}_0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21.17}$$

Om matrisen A är diagonaliserbar med $A = TDT^{-1}$ så gäller enligt (21.3) att $A^n = TD^nT^{-1}$. Utnyttjar vi detta i (21.17), där $\boldsymbol{u}_n = A^n\boldsymbol{u}_0$ $n = 1, 2, 3, \ldots$, kan vi skriva

$$\boldsymbol{u}_n = TD^nT^{-1}\boldsymbol{u}_0.$$

Detta är ett analogt uttryck till (21.13) i fallet system av differentialekvationer. Vidare, gäller om vi sätter

$$\boldsymbol{c} = T^{-1}\boldsymbol{u}_0,$$

att

$$\boldsymbol{u}_n = TD^n\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\lambda_1^n\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2^n\boldsymbol{v}_2.$$

Jämför vi med uttrycket (21.11) ser vi att skillnaden är att $e^{\lambda t}$ är utbytt mot λ^n.

Exempel 21.9. Antag att talföljderna a_n, b_n, $n = 1, 2, \dots$, uppfyller

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

där $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Beräkna $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Lösning: Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Då följer att

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom A är symmetrisk, så är A diagonaliserbar och därmed kan A^n beräknas. Egenvärdena till A är $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = 1$ med ortonormerade egenvektorer $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, så att $A = TDT^t$, där $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vidare gäller som bekant $A^n = TD^nT^t$, så att

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = TD^nT^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Det följer nu att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exempel 21.10. Gyllene snittet. En av de viktigaste och mest kända talföljder är **Fibonaccis** talföljd $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ som defineras rekursivt via sambandet

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21.18}$$

där $f_0 = 0$, och $f_1 = 1$. Några tal i början av följden är 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Det har visat sig att Fibonaccis talföljd med den enkla egenskapen att ett tal i följden är summan av de två föregående är viktig inte bara i tillämpningar utan också i naturen där den beskriver antalet ringar i ett löv eller i ett träd. Vi skriver sambandet i (21.18) som ett iterativt linjärt system på matrisform genom att sätta

$$\begin{cases} f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} &= f_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{21.19}$$

Matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ och $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ med tillhörande egenvektorer $\boldsymbol{v}_1 = ((1+\sqrt{5})/2, 1)^t$ respektive $\boldsymbol{v}_2 = ((1-\sqrt{5})/2, 1)^t$. Därmed är A är diagonaliserbar med $A = TDT^{-1}$. Systemet i (21.19) kan nu för $n = 1, 2, 3, \ldots$, skrivas

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Uttrycker vi systemet i begynnelsvilkoren får vi

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicerar vi ihop matriserna och löser för f_n får vi att

$$f_n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1^n - \lambda_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Trots utseendet hos f_n glömmer vi inte att det följer av konstruktionen att f_n är ett heltal. Eftersom $\lambda_2 < \lambda_1$ kommer λ_2^n att vara försumbart jämfört med λ_1^n för stora värden på n och att f_n är då det största heltal som är mindre än $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Dessutom får vi

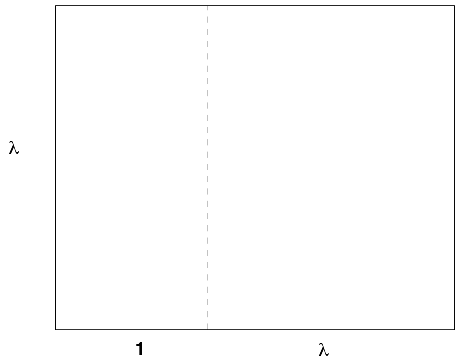
$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1^n - \lambda_2^n} \to \lambda_1, \quad n \to \infty.$$

Gränsvärdet $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ kallades av grekerna för **gyllene snittet** och har använts i de flesta kända verken, t.ex. i *Mona Lisa* av Da Vinci.

De gamla grekerna ansåg att den behagligaste rektangeln att titta på är den som hade ett förhållande mellan längd och bredd som uppfyllde

$$\frac{\lambda}{1} = \frac{\lambda + 1}{\lambda}. \tag{21.20}$$

Figur 21.11.



Vi ser att sambandet i (21.20) kan skrivas som

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

vilket är sekularekvationen för matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ovan. Den positiva roten till denna ekvation är just gyllne snittet.

I *deterministisk kaos* är kontinuerliga fraktioner viktiga verktyg. Gyllene snittet är faktiskt gränsvärdet för en sådan kontinuerlig fraktion; nämligen

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}}.$$

Gyllne snittet är också gränsvärdet för

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}.$$

Båda påståendena kan visas på ett ganska enkelt sätt. Kan du det?