12.2. Gram-Schmidt ortogonaliseringsprocess

Exempel 12.28. G-S process. Låt $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ vara en bas i V. Ur denna bas ska vi nedan konstruera en ON-bas $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ i V.

Lösning: Idén i G-S processen är att successivt använda Sats 12.22.

1. Vi bestämmer första basvektorn $\boldsymbol{e}_1$. Bilda hjälpvektorn $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{v}_1$. Sätt

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{f}_1\|}\boldsymbol{f}_1.$$

Vi har alltså konstruerat en normerad vektor som spänner upp samma underrum som $\boldsymbol{v}_1$, dvs $[\boldsymbol{e}_1] = [\boldsymbol{v}_1]$.

2. Vi bestämmer $\boldsymbol{e}_2$. Bilda hjälpvektorn

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1.$$

Då är $\boldsymbol{f}_2$ ortogonal mot $[\boldsymbol{e}_1]$. Sätt

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{f}_2\|}\boldsymbol{f}_2.$$

Då är $\boldsymbol{e}_2$ en normerad vektor som är ortogonal mot tidigare underrum $[\boldsymbol{e}_1]$ men är också sådan att $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$.

3. Vi bestämmer $\boldsymbol{e}_3$. Bilda hjälpvektorn

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{v}_3|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2.$$

Då är $\boldsymbol{f}_3$ ortogonal mot underrummet $[\boldsymbol{e}_1 . \boldsymbol{e}_2]$. Sätt

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{f}_3\|}\boldsymbol{f}_3.$$

Då är $\boldsymbol{e}_2$ en normerad vektor som är ortogonal mot tidigare underrum $[\boldsymbol{e}_1 . \boldsymbol{e}_2]$ men är sådan att

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3].$$

Antag nu att vi har konstruerat t.om. basvektorn $\boldsymbol{e}_{n-1}$, och skall konstruera $\boldsymbol{e}_n$. Bilda hjälpvektorn

$$\boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{v}_n - (\boldsymbol{v}_n|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{v}_n|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 - \cdots - (\boldsymbol{v}_n|\boldsymbol{e}_{n-1})\boldsymbol{e}_{n-1}.$$

Då är $\boldsymbol{f}_n$ ortogonal mot alla tidigare basvektorer $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$. Sätt

$$\boldsymbol{e}_n = \frac{1}{\|\boldsymbol{f}_n\|}\boldsymbol{f}_n.$$

Då är $\boldsymbol{e}_n$ en normerad vektor som är ortogonal mot tidigare underrum $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$ och är sådan att

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = V.$$

Exempel 12.29. Låt $W = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3] \subset \mathbf{E}^4$ där $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Bestäm med hjälp av Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess en ON-bas $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ för W.
2. Utvidga ON-basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ i W till en ON-bas $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ för $\mathbf{E}^4$.

Lösning:

1. Vi använder Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess. Första hjälpvektorn $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{v}_1$ och sätt
$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{f}_1||}\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^t.$$
Låt vidare
$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)^t$$
och sätt
$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{||\boldsymbol{f}_2||}\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)^t.$$
Till sist låter vi
$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{v}_3|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = (1, 1, -1, -1)^t$$
och sätter
$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{||\boldsymbol{f}_3||}\boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)^t.$$
Då har vi en ON-bas $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ för W.

2. Vi utvidgar denna bas till en ON-bas $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ för $\mathbf{E}^4$ genom att välja $\boldsymbol{e}_4$ som en ON-bas i ortogonala komplementet $W^\perp$ så att
$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_4 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0 \\ \boldsymbol{e}_4 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0 \\ \boldsymbol{e}_4 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{e}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Vi kan på samma sätt som i Exempel 12.23 b) visa att underrumet
$$W = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$$
är hyperplanet
$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}^4;\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$
och därmed är $\boldsymbol{e}_4 \in W^\perp$ **normalen** till W. Dessutom är $W^\perp = [\boldsymbol{e}_4]$. □

Exempel 12.30. Låt $W = [\boldsymbol{v}_1 = (2,2,1)^t, \boldsymbol{v}_2 = (1,-2,2)^t] \subset \mathbf{E}^3$.

1. Bestäm en ON-bas i W.
2. Utvidga basen i W till en ON-bas för hela $\mathbf{E}^3$.
3. Låt $\boldsymbol{u} = (x_1,x_2,x_3)^t$. Bestäm ortogonala projektionen $P_W(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{||W}$.
4. Låt $\boldsymbol{u} = (x_1,x_2,x_3)^t$. Bestäm ortogonala projektionen $P_W(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{W^\perp}$.
5. Skriv $\boldsymbol{u} = (1,2,3)^t$ på formen $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{||W} + \boldsymbol{u}_{\perp W}$.

Lösning: 1. Vektorerna $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ är linjärt oberoende och därmed bas för W (Visa att dessa är ortogonala!). Alltså, $\dim W = 2$. Låt första hjälpvektorn vara $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{v}_1$ och låt första basvektorn i W vara $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{||\boldsymbol{f}_1||}\boldsymbol{f}_1 = \dfrac{1}{3}(2,2,1)^t$. Eftersom $\boldsymbol{v}_2$ är ortogonal mot $\boldsymbol{v}_1$ ger Gram-Schmidt vektorn tillbaka, ty

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Låt därför den andra basvektorn i W vara $\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alltså är underrummet W ett plan som spänns upp av $\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$, dvs $W = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] = \{\boldsymbol{u} = (x_1,x_2,x_3)^t \in \mathbf{R}^3 : 2x_1 - x_2 - 2x_3\}$

2. Fyll ut till en bas för hela $\mathbf{E}^3$ med en vektor från ortogonala komplementet $W^\perp$. En sådan är $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Observera att $\boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\boldsymbol{n}}{||\boldsymbol{n}||}$, där $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ är planets normal. Alltså är underrummet $W^\perp = [\boldsymbol{e}_3] = [\boldsymbol{n}]$.

3. Ortogonala projektionen av $\boldsymbol{u}$ på W är

$$\begin{aligned} P_W(\boldsymbol{u}) &= (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Ortogonala projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $W^\perp$ är

$$
\begin{aligned}
P_{W^\perp}(\boldsymbol{u}) &= (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3 = \left(\boldsymbol{u}\,|\,\frac{\boldsymbol{n}}{||\boldsymbol{n}||}\right)\frac{\boldsymbol{n}}{||\boldsymbol{n}||} = \frac{(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{n})}{||\boldsymbol{n}||^2}\boldsymbol{n} \\
&= \frac{1}{9}\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

5. Enligt Sats 12.22 ges varje vektor entydigt av

$$
\boldsymbol{u} = \underbrace{(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2}_{P_W(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{\|W}} + \underbrace{(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3}_{P_{W^\perp}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{\|W^\perp}}.
$$

Vektorn $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)^t$ kan delas upp i

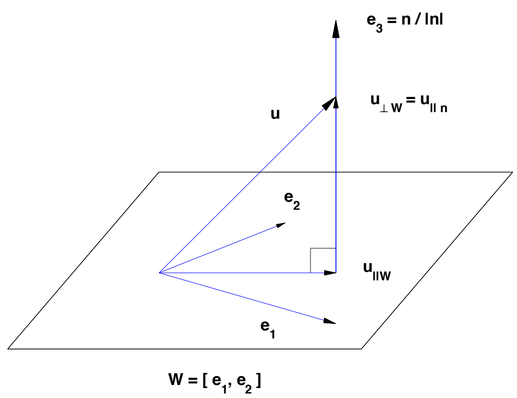
$$
P_W(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

och

$$
P_{W^\perp}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

□

Figur 12.31.



I förra exemplet visade vi att det finns en matris som hör till en projektion på ett underrum. I exemplet som följer startar vi med underrummet är givet som plan och bestämmer matrisen som hör ihop med projektionen på detta plan. Frågeställningen om att bestämma matrisen till en projektion eller allmännare en avbildning är mycket viktig i många tillämpningar. Syftet med Exempel 12.30 och Exempel 12.32 är dessutom att knyta ihop teorin för euklidiska rum i detta kapitel med teorin för linjära avbildningar i Kapitel 16, se Exempel 16.14.

Exempel 12.32. Betrakta underrummet $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}^3 : \ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$. Låt $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbf{E}^3$ vara godtycklig. Bestäm de ortogonala projektionerna $P_W(\boldsymbol{u})$ och $P_{W^\perp}(\boldsymbol{u})$.

Lösning: Låt oss börja med att hitta en ON-bas i W. Eftersom W är ett plan i $\mathbf{E}^3$, så är $\dim W = 2$. Vi väljer $\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)^t$ och $\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}(1,-2,2)^t$. Alltså är $W = [\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2]$. Vidare, så är $W^\perp = [\boldsymbol{n} = (2,-1,-2)^t]$. För att utvidga till en ON-bas $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ för $\mathbf{E}^3$, väljer vi en normerad vektor $\boldsymbol{f}_3$ ur $W^\perp$, dvs $\boldsymbol{f}_3 = \dfrac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|} = \dfrac{1}{3}(2,-1,-2)^t$.

a) Ortogonala projektionen $P_{W^\perp}(\boldsymbol{u})$ av $\boldsymbol{u}$ på $W^\perp$, dvs på normalen $\boldsymbol{n}$ ges av

$$
\begin{aligned}
P_{W^\perp}(\boldsymbol{u}) &= (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{f}_3)\boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{3}((x_1,x_2,x_3)^t \mid (2,-1,-2)^t)\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2x_1 - x_2 - 2x_3}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

b) Ortogonala projektionen $P_W(\boldsymbol{u})$ av $\boldsymbol{u}$ i planet W ges av

$$P_W(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{f}_1)\boldsymbol{f}_1 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{f}_2)\boldsymbol{f}_2.$$

Vi kan också bestämma $P_W(\boldsymbol{u})$ via sambandet

$$\boldsymbol{u} = P_W(\boldsymbol{u}) + P_{W^\perp}(\boldsymbol{u}).$$

Vi får

$$P_W(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - P_{W^\perp}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}.$$

Dessa projektioner har en matrisframställning, ty

$$P_W(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

och

$$P_{W^\perp}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

□

Exempel 12.33. Låt $W = [(1,-1,1,-1)^t, (2,0,2,0)^t] \subset \mathbf{E}^4$.

1. Bestäm en ON-bas för W.
2. Besäm en ON-bas för hela $\mathbf{E}^4$, där så många som möjligt av basvektorerna tillhör W.
3. Låt $\boldsymbol{u} = (1,2,3,4)^t$. Bestäm ortogonala projektionerna $P_W(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{\|W}$ och $P_{W^\perp}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{\|W^\perp}$.
4. Bestäm avståndet från punkten $(1,2,3,4)$ till W.
5. Låt $\boldsymbol{u} = (x_1,x_2,x_3,x_4)^t$. Bestäm ortogonala projektionen $P_W(\boldsymbol{u})$.

Lösning: 1. Vektorerna $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ i W är linjärt oberoende och därmed en bas för W. Alltså $\dim W = 2$ och $\dim W^\perp = 2$. Låt $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{v}_1$. Då är $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{||\boldsymbol{f}_1||}\boldsymbol{f}_1 = \dfrac{1}{2}(1,-1,1,-1)^t$ den första basvektorn i W. Gram-Schmidt ger

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^t$$

och därmed är $\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{1}{2}(1,1,1,1)^t$ den andra basvektorn i W. Således är $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ en ON-bas i W med $W = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$.

2. Fyll ut till en ON-bas för hela $\mathbf{E}^4$ med en ON-bas $\{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ från $W^\perp$. Vi söker därför vektorer $\boldsymbol{w} \in W^\perp$ som uppfyller

$$\begin{cases} \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{e}_1 &= 0 \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{e}_2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

Detta system har lösningen $\boldsymbol{w}_1 = (1,1,-1,-1)^t$ och $\boldsymbol{w}_2 = (1,-1,-1,1)^t$. Då dessa redan är ortogonala behöver vi bara normera dem och vi får därmed ON-basen $\boldsymbol{e}_3 = \dfrac{1}{2}(1,1,-1,-1)^t$ och $\boldsymbol{e}_4 = \dfrac{1}{2}(1,-1,-1,1)^t$ i $W^\perp$. Alltså fyller vi ut med $\boldsymbol{e}_3$ och $\boldsymbol{e}_4$ till en ON-bas $\underline{\boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)$ för hela $\mathbf{E}^4$.

3. Enligt Sats 12.22 ges varje vektor entydigt av

$$\boldsymbol{u} = \underbrace{(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2}_{P_W(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{\|W}} + \underbrace{(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{e}_4}_{P_{W^\perp}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{\|W^\perp}}.$$

Om $\boldsymbol{u} = (1,2,3,4)^t$, så är

$$P_W(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = (2,3,2,3)^t$$

och

$$P_{W^\perp}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{e}_4 = (-1,-1,1,1)^t.$$

4. Eftersom vektorn $\boldsymbol{u}$ är ortsvektorn till punkten $(1,2,3,4)$ ges avståndet till W av

$$\|P_{W^\perp}(\boldsymbol{u})\| = ||(-1,-1,1,1)^t|| = 2. \text{ l.e.}$$

5. Ortogonala projektionen $P_W(\boldsymbol{u})$ ges av

$$\begin{aligned} P_W(\boldsymbol{u}) &= (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

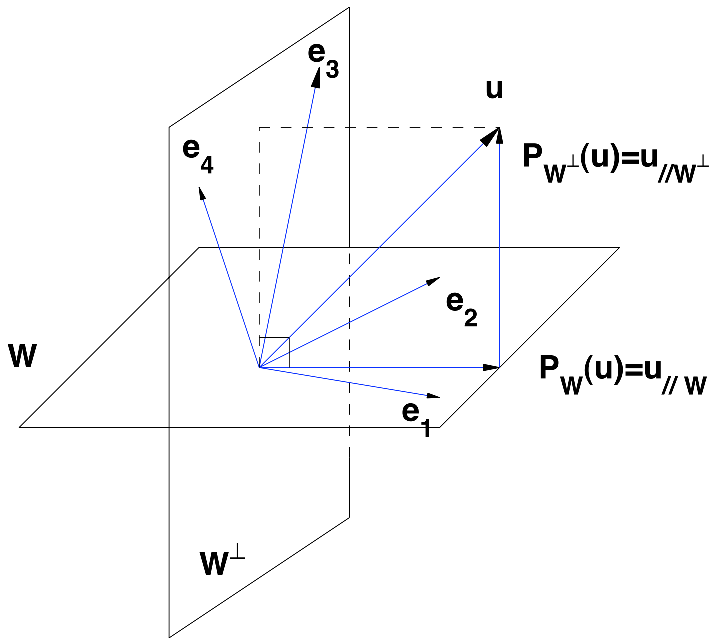
Sista uttrycket kan skrivas som en matrisprodukt så att

$$P_W(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Detta visar att ortogonala projektionen har en matrisframställning som vi med dess hjälp kan projicera vektorer i W. Vi kommer tillbaka till detta i Kapitel 16. T.ex., så är

$$P_W\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Figur 12.34.



Exempel 12.35. Låt $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}^4 : \ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

1. Bestäm en ON-bas för W.
2. Skriv $\boldsymbol{u} = (1, 0, 1, 4)^t$ på formen $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\|W} + \boldsymbol{u}_{\|W^\perp}$.

Lösning: Om $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$ så är $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$, dvs

$$\boldsymbol{x} = t_1(-1, 0, 0, 1)^t + t_2(1, 0, 1, 0)^t + t_3(1, 1, 0, 0)^t.$$

Vidare är $\dim W = 3$. Vi har sett att G-S processen alltid kan användas för att bestämma en ON-mängd ur en given mängd. Ibland kan vi använda en lämplig kombination av t:na:

1. Kombinationen $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ ger $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1, 1)^t$. Vi väljer därmed
$$\boldsymbol{e_1} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^t.$$
2. Kombinationen $t_1 = t_2 = -1$, $t_3 = 1$ ger $\boldsymbol{x} = (1, 1, -1, -1)^t$. Vi väljer
$$\boldsymbol{e_2} = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)^t.$$
3. Kombinationen $t_1 = t_2 = -1$, $t_3 = 1$ ger $\boldsymbol{x} = (1, 1, -1, -1)^t$. Vi tar
$$\boldsymbol{e_3} = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^t.$$

Alltså är $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ en ON-bas i W. Vi fyller ut med "**normalen**" $\boldsymbol{e_4} = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)^t$ till en ON-bas för hela $\mathbf{E}^4$. Vidare är

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\|W} + \boldsymbol{u}_{\|W^\perp},$$

där

$$\boldsymbol{u}_{\|W} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3 = (0, 1, 2, 3)^t$$

och

$$\boldsymbol{u}_{\|W^\perp} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{e}_4 = (1, -1, -1, 1)^t.$$

□

Exempel 12.36. Låt $W = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3] \subseteq \mathbf{E}^4$ där $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,2,2)^t$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,0,0,1)^t$ och $\boldsymbol{v}_3 = (1,0,-1,5)^t$.

1. Bestäm först en ON-bas för W och utvidga sen till en ON-bas för hela $\mathbf{E}^4$.
2. Bestäm koordinaterna för $\boldsymbol{u} = (2,3,6,2)^t$ i denna bas.
3. Dela upp $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\|W} + \boldsymbol{u}_{\|W^\perp}$.
4. Låt $\boldsymbol{u} = (2,3,6,2)^t$ och bestäm den vektor $\boldsymbol{w} \in W$ som minimerar avståndet $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\|$, dvs ligger **närmast** $\boldsymbol{u}$.
5. Ange detta minimum.

Lösning: 1. För att konstruera en ON-bas i W använder vi G-S processen. Låt $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{v}_1$ och sätt $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{f}_1\|}\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{3}(1,0,2,2)^t$. Vidare väljer vi

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = (2,0,-2,1)^t,$$

och därmed

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{3}(2,0,-2,1)^t.$$

Till sist låter vi

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = (-2,0,-1,2)^t$$

och i så fall blir

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{3}(-2,0,-1,2)^t.$$

Vi utvidgar denna bas till en ON-bas $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ för $\mathbf{E}^4$ genom att välja $\boldsymbol{e}_4$ som en ON-bas i ortogonala komplementet $W^\perp$ så att

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_4 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0 \\ \boldsymbol{e}_4 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0 \\ \boldsymbol{e}_4 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alltså, så är $\underline{\boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)$ en ON-bas för hela $\mathbf{E}^4$. Observera nu att underrummet $W = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ har dimension 3. Detta betydet att ortogonala komplementet $W^\perp = [\boldsymbol{e}_4]$ har $\dim W^\perp = 1$. Eftersom W har endast 1 dimension kvar upp till $\mathbf{E}^4$, så är W ett hyperplan som har en ekvation som kan skrivas på normalform. Normalen till W ges också av $\boldsymbol{e}_4$. Alltså, har vi att $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}^4 : \ x_2 = 0\}$. Vi kunde också ha bestämt ekvationen till W på samma sätt som i Exempel 12.23 b).

2. Enligt Sats 12.14 kan varje godtycklig vektor $\boldsymbol{u}$ skrivas entydigt som en linjärkombination av ON-basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ via

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3 + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{e}_4,$$

där talen $(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$ är koordinaterna till vektorn $\boldsymbol{u}$ i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$.
Vektorn $\boldsymbol{u} = (2, 4, 6, 2)^t$ har koordinaterna

$$(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{3}((2, 3, 6, 2)^t|(1, 0, 2, 2)^t) = 6,$$

$$(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{3}((2, 3, 6, 2)^t|(2, 0, -2, 1)^t) = -2,$$

$$(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{3}((2, 3, 6, 2)^t|(-2, 0, -1, 2)^t = -2,$$

och

$$(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_4) = ((2, 3, 6, 2)^t|(0, 1, 0, 0)^t = 3.$$

Därmed ges $\boldsymbol{u}$ i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ av

$$\boldsymbol{u} = 6\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3 + 3\boldsymbol{e}_4 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Varje godtycklig vektor $\boldsymbol{u}$ kan delas upp enligt

$$\boldsymbol{u} = \underbrace{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3}_{\boldsymbol{u}_{\|W}} + \underbrace{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{e}_4}_{\boldsymbol{u}_{\|W^\perp}}.$$

4. Närmaste vektorn till $\boldsymbol{u}$ i W är

$$\boldsymbol{u}_{\|W} = (2, 0, 6, 2)^t.$$

5. Avståndet från $\boldsymbol{u}$ till W ges av

$$\|\boldsymbol{u}_{\|W^\perp}\| = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\|W}\| = \|(0, 2, 0, 0)^t\| = 2 \text{ l.e.}$$

□