2.2. Linjärt beroende och oberoende

Definition 2.15. Låt $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ vara en mängd vektorer i rummet. Vektorerna $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ är **linjärt beroende** om det finns reella tal λ_1, λ_2 och λ_3, ej alla noll, så att

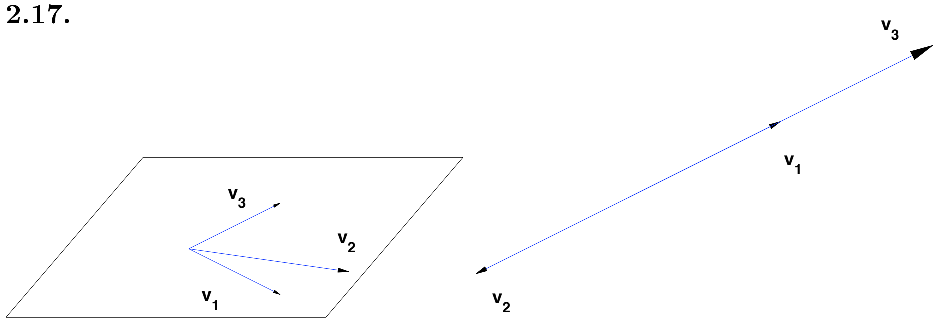
$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}.$$

Mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ är **linjärt oberoende** om

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}, \quad \text{endast för} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \qquad (\textbf{Trivial lösning!})$$

Exempel 2.16. Om mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ är linjärt beroende, så betyder det att en eller flera vektorer är en linjärkombination i dem andra. Geometriskt betyder det att vektorerna ligger i samma plan eller parallella med en linje.

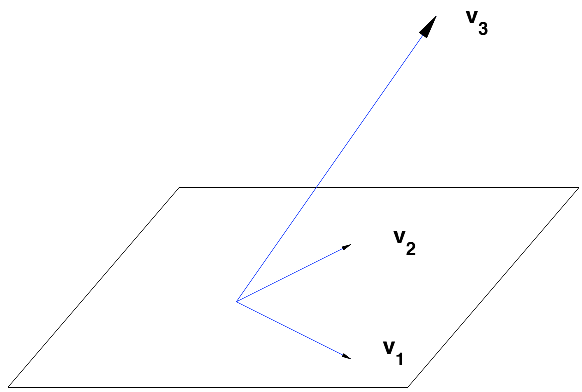
Figur 2.17.



□

Exempel 2.18. Om mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ är linjärt oberoende, så är ingen vektor en linjärkombination av dem andra. Geometriskt betyder det att vektorerna spänner upp hela rummet.

Figur 2.19.



□

Exempel 2.20. Undersök om mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, där $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_3 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ är linjärt beroende eller linjärt oberoende.

Lösning: Enligt Definition 2.15 så är mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ linjärt beroende om det finns $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ ej alla 0, så att

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllll}\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0\\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right).$$

Systemt har endast lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Alltså är mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, linjärt oberoende.

Geometriskt betyder detta att ingen vektor är en linjärkombination av de övriga; vektorerna ligger inte i ett och samma plan utan spänner upp rummet. □

Exempel 2.21. Undersök om mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, där $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_3 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ är linjärt beroende eller linjärt oberoende.

Lösning: Definition 2.15 igen ger att

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllll}\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0\\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcr}\lambda_1 & = & -t\\ \lambda_2 & = & -t\\ \lambda_3 & = & t\end{array}\right.$$

där $t \in \mathbf{R}$. Då alla λ:na inte är 0 är mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ linjärt beroende.

Låt oss titta på detta lite närmare. Med lösningen $\lambda_1 = -t$, $\lambda_2 = -t$ och $\lambda_3 = t$ insatt i definitionen får vi

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad -t\boldsymbol{v}_1 - t\boldsymbol{v}_2 + t\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Dividerar vi med $-t$ får vi relationen

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Vi ser nu att varje vektor kan skrivas som en linjärkombination i de övriga, t.ex.,

$$\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \qquad \text{eller} \qquad \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2.$$

Detta betyder att i en linjärt beroende mängd av vektorer så finns det minst en vektor som är en linjärkombination i de övriga.

Geometriskt betyder detta att minst en vektor är en linjärkombination i de övriga; vektorerna ligger därmed i ett och samma plan. □

Exempel 2.22. a) Vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_4 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är linjärt beroende men spänner upp rummet.

b) Vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ är linjärt oberoende men spänner ej upp rummet. □

Exempel 2.23. Ligger vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ i samma plan om

$$\text{a)} \quad \boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \text{och} \quad \boldsymbol{w} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \quad \boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \text{och} \quad \boldsymbol{w} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Lösning: a) Vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ ligger i samma plan om mängden $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ är linjärt beroende. Eftersom

$$\lambda_1\boldsymbol{u} + \lambda_2\boldsymbol{v} + \lambda_3\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \lambda_1\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

endast för $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, så är mängden $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ linjärt oberoende och ligger därmed inte i samma plan.

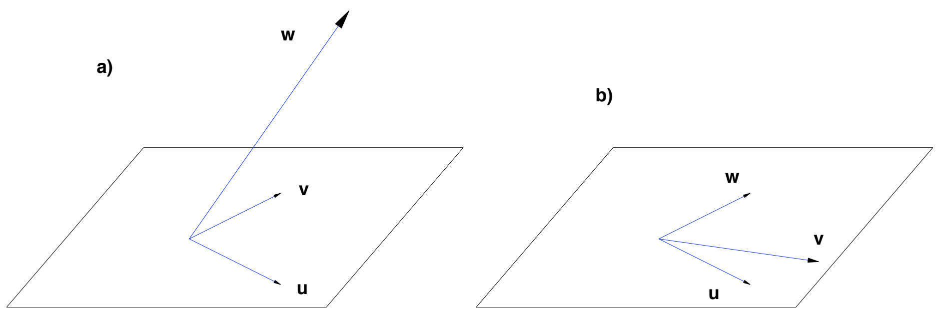
b) Vi undersöker linjärt beroende och får att

$$\lambda_1\boldsymbol{u} + \lambda_2\boldsymbol{v} + \lambda_3\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \lambda_1\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

har lösningen $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$. Detta betyder att mängden $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ är linjärt beroende och ligger därmed i samma plan. Dessutom gäller relationen

$$-2\boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}.$$

Figur 2.24.



□