6.4. Linjära ekvationssytem och matriser

Vi har tidigare sett att linjära ekvationssytem kan skrivas om med hjälp av matriser, så visst finns det ett samband mellan dessa. Nedan ska vi studera detta samband lite närmare och betraktar därför skärningen mellan olika linjer som beskrivs av följande linjära ekvationssystem:

a) $\begin{cases} x+y &= 5 \\ x+y &= 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y &= 5 \\ x-y &= 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y &= 5 \\ 2x+2y &= 10 \end{cases}$

I a) är linjerna parallella utan att sammanfalla och vi ser att ekvationssytemet saknar lösning, i b) skär linjerna varandra endast i punkten $(3,2)$ och i c) sammanfaller linjerna så att systemet har oändligt många lösningar. Detta resultat visas i nästa sats.

Sats 6.28. Ett linjärt ekvationssystem har antingen

1. ingen lösning
2. en entydig lösning eller
3. oändligt många lösningar

Bevis: Efter att ovan ha sett exempel på att fall 1., 2. och 3. kan inträffa återstår att visa att systemet inte kan ha 2 eller fler lösningar. Antag att ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har 2 skilda lösningar som vi kallar för $\boldsymbol{x}_1$ och $\boldsymbol{x}_2$. Bilda den **linjära kombinationen**

$$\boldsymbol{x}_A = (1-t)\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{x}_2. \tag{6.2}$$

Då är

$$A\boldsymbol{x}_A = A((1-t)\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{x}_2) = (1-t)A\boldsymbol{x}_1 + tA\boldsymbol{x}_2 = (1-t)\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}. \tag{6.3}$$

Alltså är $\boldsymbol{x}_A$ en lösning för varje reellt tal t. Därmed har vi visat att om systemet har 2 lösningar eller fler så har det också oändligt många lösningar. $\square$

Ur beviset ovan kan vi se att vi har följande resultat.

Sats 6.29. Den **allmänna lösningen** till

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ges av

$$\boldsymbol{x}_A = \boldsymbol{x}_p + t\boldsymbol{x}_h, \qquad t \in \mathbf{R},$$

där $\boldsymbol{x}_h$ är den **homogena lösningen** till

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

och $\boldsymbol{x}_p$ är den **partikulära lösningen** till

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Bevis: Om vi i (6.3) sätter
$$\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1,$$
så följer att
$$A\boldsymbol{x}_h = A(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_2 - A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$
dvs $\boldsymbol{x}_h$ är en homogen lösning. Vi döper om $\boldsymbol{x}_1$ till $\boldsymbol{x}_p$ och får $A\boldsymbol{x}_p = A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}$, dvs $\boldsymbol{x}_p$ är en partilulär lösning. Slutligen följer av (6.2) att

$$\boldsymbol{x}_A = \boldsymbol{x}_p + t\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)$$

är en lösning till systemet. □

Exempel 6.30. Systemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & 6y & + & 6z & = & 4 \\ -3x & + & 5y & - & z & = & -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 6 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

har allmänna lösningen

$$\boldsymbol{x}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}_p + t\boldsymbol{x}_h,$$

ty

$$A\boldsymbol{x}_h = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 6 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0},$$

och

$$A\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 6 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

□

Sista resultatet i det här avsnittet är mycket användbart.

Sats 6.31. Antag att A är en $n\times n$-matris och $\boldsymbol{b}$ en $n\times 1$ kolonnmatris. Då är följande påståenden ekvivalenta

i) ekvationssystemet $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ har en entydig lösning för varje $\boldsymbol{b}$

ii) A är inverterbar

iii) A:s kolonner (eller rader) är linjärt oberoende.

Bevis: i) $\Rightarrow$ ii). Antag att ekvationssystemet $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ har en entydig lösning för varje $\boldsymbol{b}$. Vi söker alltså en $n\times n$-matris B sådan att $AB=E$. Låt $n\times 1$ kolonnmatrisen E_j, $j=1,2,\dots,n$ vara j:te kolonn i enhetshets matrisen E, dvs $E=(E_1\ E_2\ \dots\ E_n)$. Enligt förutsättningen så finns det en $n\times 1$ kolonnmatris X_j, $j=1,2,\dots,n$ så att

$$AX_j=E_j,\qquad j=1,2,\dots,n.$$

Bilda B genom att låta X_j vara kolonner i B. Då är

$$AB=A(X_1\ X_2\ \dots\ X_n)=(E_1\ E_2\ \dots\ E_n)=E.$$

Alltså är B invers till A.

ii) $\Rightarrow$ iii). Antag att A är inverterbar och låt A_k, $k=1,2,\dots,n$ vara kolonner i A, dvs $A=(A_1,A_2,\dots,A_n)$. Kolonnerna A_k, $k=1,2,\dots,n$ är linjärt beroende om det finns tal x_k, $k=1,2,\dots,n$ ej alla noll, så att

$$x_1A_1+x_2A_2+\cdots x_nA_n=0\Leftrightarrow(A_1,A_2,\dots,A_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow A\boldsymbol{x}=0.$$

$$\Leftrightarrow A^{-1}A\boldsymbol{x}=A^{-1}\mathbf{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=A^{-1}\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

Alltså har ekvationssystemet den entydiga lösningen $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ vilket visar att kolonnerna A_k, $k=1,2,\dots,A_n$ är linjärt oberoende.

iii) $\Rightarrow$ i). Antag att kolonnerna $A_k=(a_{1k},a_{2k},\dots,a_{nk})^t$, $k=1,2,\dots,A_n$ är linjärt oberoende, dvs det homogena ekvationssystemet

$$x_1A_1+x_2A_2+\cdots x_nA_n=0\Leftrightarrow A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

har den entydiga lösningen $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Detta betyder att systemet

$$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdot\ \cdot\ \cdot&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdot\ \cdot\ \cdot&a_{2n}\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\ \cdot\ \cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\ \cdot\ \cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\ \cdot\ \cdot&\cdot\\ a_{m1}&a_{m2}&a_{m3}&\cdot\ \cdot\ \cdot&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{pmatrix}$$

efter Gausselimination ser ut

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

som har en entydig lösning $x_n = 0$ och därmed $x_{n-1} = \cdots = x_1 = 0$.
För systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, där $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^t$ betyder detta att det ser ut enligt

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b'_n \end{pmatrix}$$

som har entydig lösning $x_n = b'_n/a'_{nn}$ osv. Antag nu att för ett fixt högerled $\boldsymbol{b}$ så har systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ två lösningar $\boldsymbol{x}_1$ och $\boldsymbol{x}_2$. Sätt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$. Då gäller att

$$A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{x}_2 - A\boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_2 - A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

Eftersom A:s kolonner är linjärt oberoende så är $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, dvs $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$, vilket visar i). $\square$

Exempel 6.32. Lös ekvationssystemet i Exempel 6.16.

Lösning: Systemet kan skrivas på matrisform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{dvs} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Om A är inverterbar så ges lösningen av $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$. Vi bestämmer om möjligt inversen A^{-1}. Vi löser det utökade systemet

$$\begin{aligned}
(A|E) \quad &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \\
&\Leftrightarrow (E|A^{-1}).
\end{aligned}$$

En kontroll visar att $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Lösningen till systemt blir därmed

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1/2 & 3/2 \\ 5 & -1/2 & -3/2 \\ -2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Insättning i ekvationssystemet visar att $x = -2$, $y = 3$, $z = -1$ är en lösning. $\square$