MATH.SE

SVERIGES UNIVERSITETS MATEMATIKPORTAL

Förberedande kurs i matematik 1

Till detta kursmaterial finns prov och lärare på Internet.

Detta material är en utskrift av det webbaserade innehållet i
`wiki.math.se/wikis/sommarmatte1`

Studiematerialet hör till en kurs som ges i samarbete mellan flera av landets högskolor och centret MATH.SE.

Anmälan och tillgång till forum, examination och personlig mentor

Anmälan till kursen sker fortlöpande under året genom ett elektroniskt formulär på `www.sommarmatte.se` och man får då direkt ett användarnamn och lösenord som ger tillgång till diskussionsforum, support, uppföljning och prov. Du får också en personlig mentor som hjälper dig att lyckas med dina studier. All examination sker via Internet efter hand som du arbetar med kursens avsnitt.

Observera att fullständiga lösningar till övningsuppgifterna återfinns i onlinematerialet.

Kontaktinformation: `www.math.se/kontakt.html`

Förberedande kurs i matematik 1

Innehåll

För fullständiga lösningar, senaste versionen av materialet, externa länkar, mm., se studiematerialet på Internet `www.math.se/wiki`

Välkommen till kursen

Vad gjorde att Elin blev intresserad av matematik?

Titta på videon där Elin Ottergren, mentor på kursen och tidigare nätstudent, berättar om hur hennes matematikintresse väcktes.

(`http://smaug.nti.se/temp/KTH/film6.html`)

Nu finns ett enkelt sätt att komma bättre rustad till dina högskolestudier

Den här kursen är till för dig som ska läsa en utbildning där matematik ingår, och som vill vara ordentligt förberedd inför kursstarten. Kursen är också bra för dig som av andra anledningar vill fräscha upp dina kunskaper i matematik.

Kursen är en överbryggning från gymnasiet in i högskolan. Även om du klarat matematiken mycket bra tidigare rekommenderar vi dig att läsa kursen. Den berättigar till studiemedel och kan läsas helt via Internet. Kursen ges i samarbete mellan flera av landets högskolor och centret MATH.SE.

Du bestämmer själv när du vill studera och kan lätt anpassa studierna efter dina övriga planer.

Anmälan och tillgång till forum, support, examination och personlig mentor

Kurslitteraturen är öppet tillgänglig via Internet. Anmälan till kursen sker fortlöpande under året genom ett elektroniskt formulär på `www.math.se` och du får då direkt ett användarnamn och lösenord som ger tillgång till allt kursmaterial, diskussionsforum, support, uppföljning och prov. Du får också en personlig mentor som hjälper dig att lyckas med dina studier.

Handledning och examination

Du kan när som helst på nätet diskutera med studiekamrater, ställa frågor och få handledning av lärare. Examination sker via Internet efterhand som du arbetar med kursen. Vissa av våra högskolor erbjuder handledning och satsningar på plats som komplement till det som sker på Internet.

Observera att materialet i denna kurs är utformat för att man ska arbeta med det utan hjälp av miniräknare.

När du kommer till högskolan kommer du nämligen *inte* att få använda miniräknare på dina ”tentor”, åtminstone inte på grundkurserna. På högre kurser i matematik har man knappast någon användning för miniräknare, eftersom matematiken då mer handlar om att förstå principer än att utföra räkneoperationer. Det är exempelvis viktigare att förstå varför $7 + 3$ är detsamma som $3 + 7$, än att kunna utföra additionen och få fram svaret 10.

Så här lyckas du med kursen:

1. Börja med att läsa genomgången till ett avsnitt och tänka igenom exemplen.
2. Arbeta sedan med övningsuppgifterna och försök att lösa dem utan miniräknare. Kontrollera att du kommit fram till rätt svar genom att klicka på svarsknappen. Har du inte det, så kan du klicka på lösningsknappen, för att se hur du ska göra.
3. Gå därefter vidare och svara på frågorna i grundprovet som hör till avsnittet.
4. Skulle du fastna, se efter om någon ställt en fråga om just detta i avsnittets forum. Ställ annars en fråga om du undrar över något. Din lärare (eller en studiekamrat) kommer att besvara den inom några timmar.
5. När du är klar med övningsuppgifterna och grundproven i ett avsnitt så ska du göra slutprovet för att bli godkänd på avsnittet. Där gäller det att svara rätt på tre frågor i följd för att kunna gå vidare.
6. När du fått alla rätt på både grundprov och slutprov, så är du godkänd på den delen och kan gå vidare till nästa del i kursen.

P.S. Tycker du att innehållet i ett avsnitt känns välbekant, så kan du testa att gå direkt till grundprovet och slutprovet. Du måste få alla rätt på ett prov, men kan göra om provet flera gånger, om du inte lyckas på första försöket. Det är ditt senaste resultat som visas i statistiken.

Hur går kursen till?

Elins tips till dig som ska läsa matte på högskolan. Vad kan vara bra att veta?

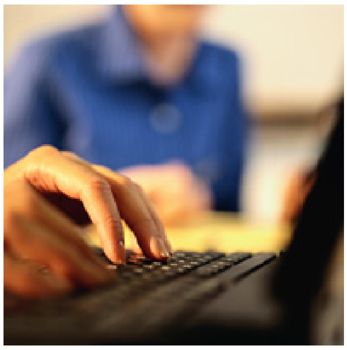
Titta på videon där Elin Ottergren, mentor på kursen och tidigare "nätstudent", tipsar dig.

(`http://smaug.nti.se/temp/KTH/film7.html`)

Aktuella kunskaper ökar dina chanser att lyckas

Kursen är en överbryggning från gymnasiet in i högskolan och går igenom några av de basfärdigheter som vi tycker är viktiga att du har fullt uppdaterade inför dina högskolestudier. Du läser helt flexibelt i den takt som passar dig själv.

Så här är det tänkt att du ska arbeta med kursen:



- Börja med att läsa genomgången till ett avsnitt och tänka igenom exemplen.
- Arbeta därefter med övningsuppgifterna och svara på frågorna i grundprovet som hör till avsnittet. Skulle du fastna, se efter om någon ställt en fråga om just detta i avsnittets forum, annars ställ en fråga själv.
- När du är klar med övningsuppgifterna och grundprovet i ett avsnitt så gör du slutprovet för att bli godkänd på avsnittet.
- När du klarat alla slutprov så får du en individuell inlämningsuppgift som du både ska lösa självständigt och skicka in och därefter bearbeta i grupp.

Din personliga mentor stöder dig

När du loggat in med ditt användarnamn kommer du till "Student lounge". Där hittar du mailadress och telefonnummer till din personliga mentor som du kan kontakta, om du kör fast på en uppgift eller har något du behöver fråga om.
Mentorerna har tagit namn som Albert Einstein, Kurt Gödel, Arkimedes osv., men bakom dem finns en hel grupp personer,

vilka är lärare och/eller studenter på någon högskola inom MATH.SE. Din mentor vill inget hellre än att hjälpa dig. Vårt gemensamma mål är att alla som börjar på kursen ska klara av den och få en bra grund att stå på inför sina högskolestudier. För oss finns inga dumma frågor, bara de som inte ställs!

Så går examinationen till

Du examineras online

Examinationen består av två självrättande prov per avsnitt och en inlämningsuppgift samt gruppuppgift i slutet av kursen. Var och en av kursens 5 delar motsvarar 1 högskolepoäng och rapporteras i allmänhet till Ladok var för sig på den högskola där du är kursregistrerad (för vissa kurstillfällen sker rapportering när hela kursen är klar). Kursbetyg erhålles när alla fem momenten är godkända. Som betyg på kursen ges underkänt eller godkänt.

Grundproven och slutproven rättas via datorn

Till varje avsnitt i kursen finns det både ett grundprov och ett slutprov. Länk till proven finns i din "Student Lounge" som du kommer till när du loggat in med ditt personliga användarnamn. Du kan inte bli underkänd på dessa prov, utan misslyckas du med något prov så är det bara att göra om tills du får alla rätt.

Slutproven består av tre slumpmässigt genererade frågor som rättas automatiskt av datorn. Här ska du kunna lösa ett problem på papper och skriva in rätt svar på skärmen. *Du måste svara rätt på samtliga tre frågor i följd för att bli godkänd.*

Om du svarat fel på någon fråga kan du göra ett nytt försök. Du får nu tre nya varianter på frågorna som du ska lösa (även om du skulle ha klarat någon eller några av de tidigare frågorna ska du alltså klara alla tre frågor i denna omgång på nytt). Tänk på att det är ditt senaste resultat som registreras i studiestatistiken.

Inlämningsuppgiften är en viktig del av examinationen

Inlämningsuppgifterna är formellt den femte delen av kursen, men du löser dem lämpligen i samband med att du läser motsvarande kapitel. Via en länk i din student lounge kommer du åt inlämningsuppgifterna och de blir var och en tillgänglig efter att alla prov är godkända på motsvarande kapitel.

När du skickar lösningarna till en inlämningsuppgifterna är det viktigt att de är väl förklarade, resonemangen tydliga och presentationen genomarbetad. I kapitel 5 finns en beskrivning om vad du ska tänka på när du skriver lösningar, för närvarande gäller att du inte ska använda latex för att skriva in lösningar på inlämningsuppgifter, latex är dock mycket användbart i andra sammanhang, t.ex. i kursens forum.

Inlämningsformuläret är textbaserat, det innebär att vi inte har stöd för latex. Du kan istället skriva `2^3` för upphöjt till, `roten(4)` för roten ur och i övrigt vara noggrann med att förklara vad du gör. Var noggrann med att använda parenteser, vad är täljare och nämnare i nedanstående exempel? Vi kan inte se det!

```
e^3x -5 / x^2-2x +4
```

Om du inte blir godkänd på en inlämningsuppgift ska du läsa igenom kommentarerna från den rättande läraren och förbättra din lösning innan du skickar in den igen. Detta upprepas tills du blir godkänd.

1.1 Olika typer av tal

Innehåll:

- Naturliga tal
- Negativa tal
- Prioriteringsregler och parenteser
- Rationella tal
- Något om irrationella tal
- Reella tal

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Beräkna uttryck som innehåller heltal, de fyra räknesätten och parenteser.
- Veta skillnaden mellan naturliga tal, heltal, rationella tal och irrationella tal.
- Omvandla bråktal till decimalform och omvänt.
- Avgöra vilket av två bråktal som är störst, dels med decimalbråksutveckling, dels genom förlängning av bråken.
- Ange ett närmevärde till decimaltal och bråktal med ett givet antal decimaler.

Räkneoperationer med tal

Att arbeta med tal innebär att man utför en rad räkneoperationer. De grundläggande är de fyra räknesätten. I figuren som följer finns några begrepp som är bra att kunna för att förstå matematisk text.

När man adderar tal är summan inte beroende av i vilken ordning termerna adderas

$$3+4+5=3+5+4=5+4+3=12.$$

När tal subtraheras är naturligtvis ordningen viktig

$$5-2=3 \quad \text{medan} \quad 2-5=-3.$$

Om vi pratar om differensen mellan två tal menar vi vanligtvis skillnaden mellan det större och det mindre. Således menar vi att differensen mellan 2 och 5 är 3.

Addition

term summa

$$3 + 4 = 7$$

Subtraktion

term differens

$$13 - 4 = 9$$

Multiplikation

faktor produkt

$$3 \cdot 4 = 12$$

Division

täljare kvot

$$\frac{8}{4} = 2$$

nämnare

Figuren visar de fyra räknesätten och namnen på de olika delar som ingår.

När tal multipliceras är ordningen mellan faktorerna inte viktig

$$3 \cdot 4 \cdot 5 = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Vid division är ordningen av betydelse

$$\frac{6}{3} = 2 \quad \text{medan} \quad \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

Räkneordning i uttryck (Prioriteringsregler)

När flera räknesätt förekommer i ett matematiskt uttryck är det viktigt att man har en överenskommelse om i vilken ordning operationerna ska utföras. Följande gäller:

- Parenteser (parentesen "längst in" först)
- Multiplikation och division (från vänster till höger)
- Addition och subtraktion (från vänster till höger)

Exempel 1

a) $3 - (2 \cdot (3 + 2) - 5) = 3 - (2 \cdot 5 - 5) = 3 - (10 - 5) = 3 - 5 = -2$

b) $3 - 2 \cdot (3 + 2) - 5 = 3 - 2 \cdot 5 - 5 = 3 - 10 - 5 = -7 - 5 = -12$

c) $5 + 3 \cdot \left(5 - \frac{-4}{2}\right) - 3 \cdot (2 + (2 - 4)) = 5 + 3 \cdot (5 - (-2)) - 3 \cdot (2 + (-2))$

$= 5 + 3 \cdot (5 + 2) - 3 \cdot (2 - 2) = 5 + 3 \cdot 7 - 3 \cdot 0 = 5 + 21 - 0 = 26$

”Osynliga” parenteser

Vid division ska täljare och nämnare beräknas var för sig innan divisionen utförs. Man kan därför säga att det finns ”osynliga parenteser” omkring täljare och nämnare.

Exempel 2

a) $\dfrac{7+5}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

b) $\dfrac{6}{1+2} = \dfrac{6}{3} = 2$

c) $\dfrac{12+8}{6+4} = \dfrac{20}{10} = 2$

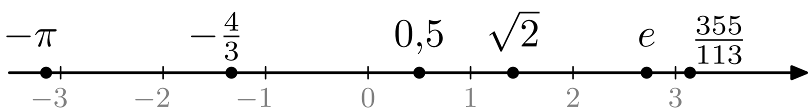
Speciellt viktigt är detta vid användandet av miniräknare. Divisionen

$$\frac{8+4}{2+4}$$

måste skrivas $(8+4)/(2+4)$ på miniräknaren för att det korrekta svaret 2 ska erhållas. Ett vanligt misstag är att skriva $8+4/2+4$, vilket av miniräknaren tolkas som $8+2+4=14$.

Olika typer av tal

De tal vi använder oss av för att beskriva antal och mått, mm., kallas sammanfattningsvis för de reella talen och kan illustreras med hjälp av en tallinje:



De reella talen ”fyller” tallinjen, dvs. inga hål eller mellanrum finns någonstans längs tallinjen. Varje punkt på tallinjen kan anges med hjälp av en följd av decimaler. Mängden av de reella talen är alla decimaltal och betecknas med **R**. Tallinjen visar också talen i storleksordning; ett tal till höger är alltid större än ett tal till vänster. Man brukar dela upp de reella talen i följande typer av tal:

*Naturliga tal (symboliseras vanligen med bokstaven **N**)*

De tal som används när man räknar antal: 0, 1, 2, 3, 4, . . .

Heltal (**Z**)

De naturliga talen och deras negativa motsvarigheter: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

Rationella tal (**Q**)

Alla tal som kan skrivas som en kvot mellan heltal (bråk), t.ex.

$$-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{37}{128}, \quad \text{osv.}$$

Observera att även heltalen räknas som rationella tal, eftersom

$$-1 = \frac{-1}{1}, \quad 0 = \frac{0}{1}, \quad 1 = \frac{1}{1}, \quad 2 = \frac{2}{1}, \quad \text{osv.}$$

Ett rationellt tal kan skrivas på flera olika sätt, eftersom t.ex.

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{100}{50} = \frac{384}{192} \quad \text{osv.}$$

Exempel 3

a) Att multiplicera täljare och nämnare hos ett rationellt tal med samma faktor kallas förlängning och förändrar inte talets värde

$$\frac{1}{3} = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1\cdot 5}{3\cdot 5} = \frac{5}{15} \quad \text{osv.}$$

b) Att dividera täljare och nämnare hos ett rationellt tal med samma tal kallas förkortning och förändrar inte heller talets värde

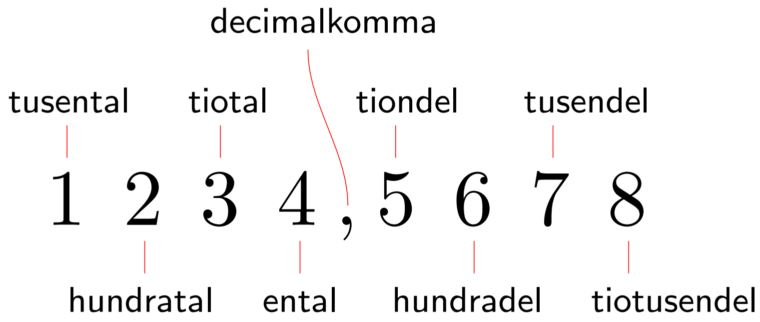
$$\frac{75}{105} = \frac{75/5}{105/5} = \frac{15}{21} = \frac{15/3}{21/3} = \frac{5}{7} \quad \text{osv.}$$

Irrationella tal

De tal på tallinjen som inte kan skrivas som bråk kallas irrationella tal. Exempel på irrationella tal är de flesta rötter, som $\sqrt{2}$ och $\sqrt{3}$, men även talet π t.ex.

Decimalform

Alla typer av reella tal kan skrivas på decimalform, med ett godtyckligt antal decimaler. Decimalerna som skrivs till höger om decimalkommat anger antal tiondelar, hundradelar, tusendelar, osv., på samma sätt som siffrorna till vänster om decimalkommat anger antalet ental, tiotal, hundratal, osv.



Exempel 4

$$1234{,}5678 = 1000 + 200 + 30 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{8}{10000}$$

Ett rationellt tal kan skrivas på decimalform genom att utföra divisionen. Således är talet $\frac{3}{4}$ samma som ”3 dividerat med 4”, dvs. 0,75.

Läs om liggande stolen på wikipedia.

Exempel 5

a) $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}5\underline{0}$

b) $\frac{1}{3} = 0{,}333333\ldots = 0{,}\underline{3}$

c) $\frac{5}{12} = 0{,}4166666\ldots = 0{,}41\underline{6}$

d) $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots = 0{,}\underline{142857}$

(understrykningen markerar decimaler som upprepas)

Som synes har de rationella talen ovan en periodisk decimalutveckling, dvs. decimalutvecklingen slutar alltid med att en viss följd av decimaler upprepas i all oändlighet. Detta gäller för alla rationella tal och skiljer dessa från de irrationella, vilka inte har något periodiskt mönster i sin decimalutveckling.

Omvänt gäller också att alla tal med en periodisk decimalutveckling är rationella tal.

Exempel 6

Talen π och $\sqrt{2}$ är irrationella tal och har därför inget periodiskt mönster i sin decimalutveckling.

a) $\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\ \ldots$

b) $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\ \ldots$

Exempel 7

a) $0{,}600\ \ldots = 0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

b) $0{,}35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

c) $0{,}0025 = \frac{25}{10\,000} = \frac{1}{400}$

Exempel 8

Talet $x = 0{,}215151515\ \ldots$ är rationellt, eftersom det har en periodisk decimalutveckling. Vi kan skriva detta rationella tal som en kvot av två heltal på följande sätt.

Multiplicerar vi talet med 10 förskjuts decimalkommat ett steg åt höger

$$10\,x = 2{,}151515\ \ldots$$

och multiplicerar vi talet med $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ flyttas decimalkommat tre steg åt höger

$$1000\,x = 215{,}1515\ \ldots$$

Nu ser vi att $1000\,x$ och $10\,x$ har samma decimalutveckling så differensen mellan talen

$$1000x - 10x = 215{,}1515\ \ldots - 2{,}151515\ \ldots$$

blir ett heltal

$$990x = 213.$$

Alltså är

$$x = \frac{213}{990} = \frac{71}{330}.$$

Avrundning

Eftersom det är opraktiskt att räkna med långa decimalutvecklingar så avrundar man ofta tal till ett lämpligt antal decimaler. Överenskommelsen som gäller är att siffrorna 0, 1, 2, 3 och 4 avrundas nedåt medan 5, 6, 7, 8 och 9 avrundas uppåt.

Vi använder symbolen $\approx$ (är ungefär lika med) för att markera att en avrundning har skett.

Exempel 9

Avrundning till 3 decimalers noggrannhet:

a) 1,0004 $\approx 1,000$

b) 0,9999 $\approx$ 1,000

c) 2,9994999 $\approx$ 2,999

d) 2,99950 $\approx$ 3,000

Exempel 10

Avrundning till 4 decimalers noggrannhet:

a) $\pi \approx$ 3,1416

b) $\frac{2}{3} \approx$ 0,6667

Jämförelse av tal

Man anger storleksförhållandet mellan tal med hjälp av symbolerna $>$ (är större än), $<$ (är mindre än) och $=$ (är lika med). Storleksförhållandet mellan två tal kan avgöras dels genom att skriva talen i decimalform, eller genom att skriva rationella tal som bråk med gemensam nämnare.

Exempel 11

a) Vilket är störst av talen $\frac{1}{3}$ och 0,33?

Vi har att
$$x = \frac{1}{3} = \frac{100}{300} \quad \text{och} \quad y = 0{,}33 = \frac{33}{100} = \frac{99}{300}.$$

Alltså är $x > y$ eftersom $100/300 > 99/300$.

Alternativt så kan man se att $1/3 > 0{,}33$ eftersom $1/3 = 0{,}3333\ldots > 0{,}33$.

b) Vilket tal är störst av $\frac{2}{5}$ och $\frac{3}{7}$?

Skriv talen med gemensam nämnare, t.ex. 35:

$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35} \quad \text{och} \quad \frac{3}{7} = \frac{15}{35}.$$

Alltså är $\frac{3}{7} > \frac{2}{5}$ eftersom $\frac{15}{35} > \frac{14}{35}$.

Råd för inläsning

Grund- och slutprov

Efter att du har läst texten och arbetat med övningarna ska du göra grund- och slutprovet för att bli godkänd på detta avsnitt. Du hittar länken till proven i din student lounge.

Att tänka på

Var noggrann! Många lösningar blir fel på grund av misstag i avskriften eller andra enkla fel, och inte för att du skulle ha tänkt fel.

Lästips

För dig som vill fördjupa dig ytterligare eller behöver en längre förklaring så vill vi tipsa om

- Läs mer om Aritmetik i engelska Wikipedia (`http://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic`)
- Vem upptäckte Nollan? Läs mer i ”The MacTutor History of Mathematics archive” (`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Zero.html`)
- Liggande stolen — en beskrivning (`http://www.fritext.se/matte/grunder/posi3.html`)
- Visste du att $0{,}999\ldots = 1$? (`http://en.wikipedia.org/wiki/0.999...`)

Länktips

Hur många färger behövs det för att färglägga en karta? Hur många gånger måste man blanda en kortlek? Vilket är det största primtalet? Finns det några

”turnummer”? Vilket är det vackraste talet? Lyssna till den kända författaren och matematikern Simon Singh, som bland annat berättar om de magiska talen 4 och 7, om primtalen, Keplers högar och om nollan.

- Lyssna på BBC-programmen ”5 Numbers” (`http://www.bbc.co.uk/radio4/science/5numbers1.shtml`)
- Lyssna på BBC-programmen ”Another 5 numbers” (`http://www.bbc.co.uk/radio4/science/another5.shtml`)

1.1 Övningar

Övning 1.1:1

Beräkna (utan hjälp av räknedosa)

a) $3-7-4+6-5$

b) $3-(7-4)+(6-5)$

c) $3-(7-(4+6)-5)$

d) $3-(7-(4+6))-5$

Övning 1.1:2

Beräkna

a) $(3-(7-4))(6-5)$

b) $3-(((7-4)+6)-5)$

c) $3\cdot(-7)-4\cdot(6-5)$

d) $3\cdot(-7)-(4+6)/(-5)$

Övning 1.1:3

Vilka av följande tal tillhör de naturliga talen? heltalen? rationella talen? irrationella talen?

a) 8

b) -4

c) $8-4$

d) $4-8$

e) $8\cdot(-4)$

f) $(-8)\cdot(-4)$

Övning 1.1:4

Vilka av följande tal tillhör de naturliga talen? heltalen? rationella talen? irrationella talen?

a) $\dfrac{4}{-8}$

b) $\dfrac{-8}{-4}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

d) $\left(\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)^2$

e) $-\pi$

f) $\pi+1$

Övning 1.1:5

Ordna följande tal i storleksordning

a) 2, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{3}$ och $\frac{7}{3}$

b) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{3}{10}$ och $-\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$ och $\frac{21}{34}$

Övning 1.1:6

Ange decimalutvecklingen med tre korrekta decimaler till

a) $\frac{7}{6}$

b) $\frac{9}{4}$

c) $\frac{2}{7}$

d) $\sqrt{2}$

Övning 1.1:7

Vilka av följande tal är rationella? Skriv dessa som en kvot mellan två heltal.

a) $3{,}14$

b) $3{,}1416\,1416\,1416\,\ldots$

c) $0{,}2\,001\,001\,001\,\ldots$

d) $0{,}10\,100\,1000\,10000\,1\ldots$ (en 1:a, en 0:a, en 1:a, två 0:or, en 1:a, tre 0:or osv.)

1.2 Bråkräkning

Innehåll:

- Addition och subtraktion av bråktal
- Multiplikation och division av bråktal

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Beräkna uttryck som innehåller bråktal, de fyra räknesätten och parenteser.
- Förkorta bråk så långt som möjligt.
- Bestämma minsta gemensamma nämnare (MGN).

Förlängning och förkortning

Ett rationellt tal kan skrivas på många sätt, beroende på vilken nämnare man väljer att använda. Exempelvis har vi att

$$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} \quad \text{osv.}$$

Värdet av ett rationellt tal ändras inte när man multiplicerar eller dividerar täljare och nämnare med samma tal. Dessa operationer kallas *förlängning* respektive *förkortning*.

Exempel 1

Förlängning:

a) $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2\cdot 5}{3\cdot 5} = \dfrac{10}{15}$

b) $\dfrac{5}{7} = \dfrac{5\cdot 4}{7\cdot 4} = \dfrac{20}{28}$

Förkortning:

c) $\dfrac{9}{12} = \dfrac{9/3}{12/3} = \dfrac{3}{4}$

d) $\dfrac{72}{108} = \dfrac{72/2}{108/2} = \dfrac{36}{54} = \dfrac{36/6}{54/6} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{6/3}{9/3} = \dfrac{2}{3}$

Man bör alltid ange ett bråk förkortat så långt som möjligt. Detta kan vara arbetsamt när stora tal är inblandade, varför man redan under en pågående uträkning bör försöka hålla bråk i så förkortad form som möjligt.

Addition och subtraktion av bråk

Vid addition och subtraktion av tal i bråkform måste bråken ha samma nämnare. Om så inte är fallet måste man först förlänga respektive bråk med lämpliga tal så att gemensam nämnare erhålles.

Exempel 2

a) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \dfrac{9}{15} + \dfrac{10}{15} = \dfrac{9+10}{15} = \dfrac{19}{15}$

b) $\dfrac{5}{6} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} - \dfrac{2 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \dfrac{15}{18} - \dfrac{4}{18} = \dfrac{15-4}{18} = \dfrac{11}{18}$

Det viktiga är här att åstadkomma en gemensam nämnare, men man bör sträva efter att hitta en så låg gemensam nämnare som möjligt. Idealet är att hitta den minsta gemensamma nämnaren (MGN). Man kan alltid erhålla en gemensam nämnare genom att multiplicera de inblandade nämnarna med varandra. Detta är dock inte alltid nödvändigt.

Exempel 3

a) $\dfrac{7}{15} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{7 \cdot 12}{15 \cdot 12} - \dfrac{1 \cdot 15}{12 \cdot 15} = \dfrac{84}{180} - \dfrac{15}{180} = \dfrac{69}{180} = \dfrac{69/3}{180/3} = \dfrac{23}{60}$

b) $\dfrac{7}{15} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{7 \cdot 4}{15 \cdot 4} - \dfrac{1 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \dfrac{28}{60} - \dfrac{5}{60} = \dfrac{23}{60}$

c)
$$\begin{aligned}\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} &= \frac{1 \cdot 4 \cdot 6}{8 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 8 \cdot 6}{4 \cdot 8 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 8 \cdot 4}{6 \cdot 8 \cdot 4} \\ &= \frac{24}{192} + \frac{144}{192} - \frac{32}{192} = \frac{136}{192} = \frac{136/8}{192/8} = \frac{17}{24}\end{aligned}$$

d) $\dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \dfrac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} - \dfrac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \dfrac{3}{24} + \dfrac{18}{24} - \dfrac{4}{24} = \dfrac{17}{24}$

Man bör vara så pass tränad i huvudräkning att man snabbt kan hitta MGN om nämnarna är av rimlig storlek. Att allmänt bestämma den minsta gemensamma nämnaren kräver att man studerar vilka primtal som ingår som faktorer i respektive nämnare.

Exempel 4

a) Beräkna $\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{42}$.

Delar vi upp 60 och 42 i så små heltalsfaktorer som möjligt, så kan vi bestämma det minsta heltal som är delbart med 60 och 42 genom att multiplicera ihop deras faktorer men undvika att ta med för många av faktorerna som talen har gemensamt

$$\left.\begin{aligned} 60 &= 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 \\ 42 &= 2\cdot 3\cdot 7 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \text{MGN} = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 420.$$

Vi kan då skriva

$$\frac{1}{60}+\frac{1}{42}=\frac{1\cdot 7}{60\cdot 7}+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{42\cdot 2\cdot 5}=\frac{7}{420}+\frac{10}{420}=\frac{17}{420}.$$

b) Beräkna $\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{5}{18}$.

Minsta gemensamma nämnare väljs så att den innehåller precis så många primtalsfaktorer så att den blir delbar med 15, 6 och 18

$$\left.\begin{aligned} 15 &= 3\cdot 5 \\ 6 &= 2\cdot 3 \\ 18 &= 2\cdot 3\cdot 3 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \text{MGN} = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 90\,.$$

Vi kan då skriva

$$\frac{2}{15}+\frac{1}{6}-\frac{5}{18}=\frac{2\cdot 2\cdot 3}{15\cdot 2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{6\cdot 3\cdot 5}-\frac{5\cdot 5}{18\cdot 5}=\frac{12}{90}+\frac{15}{90}-\frac{25}{90}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}.$$

Multiplikation

När ett bråk multipliceras med ett heltal, multipliceras endast täljaren med heltalet. Det är uppenbart att om t.ex. $\frac{1}{3}$ multipliceras med 2 så blir resultatet $\frac{2}{3}$, dvs.

$$\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{1\cdot 2}{3}=\frac{2}{3}.$$

Om två bråk multipliceras med varandra, multipliceras täljarna med varandra och nämnarna med varandra.

Exempel 5

a) $8 \cdot \frac{3}{7} = \frac{8 \cdot 3}{7} = \frac{24}{7}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$

Innan man genomför multiplikationen bör man alltid kontrollera om det är möjligt att förkorta bråket. Detta utförs genom att *stryka* eventuella gemensamma faktorer i täljare och nämnare.

Exempel 6

Jämför uträkningarna:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15} = \frac{6/3}{15/3} = \frac{2}{5}$

b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\cancel{3} \cdot 2}{5 \cdot \cancel{3}} = \frac{2}{5}$

Att stryka treorna i 6b innebär ju bara att man förkortar bråket med 3 i ett tidigare skede.

Exempel 7

a) $\frac{7}{10} \cdot \frac{2}{7} = \frac{\cancel{7}}{10} \cdot \frac{2}{\cancel{7}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{\cancel{2} \cdot 5} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{5}$

b) $\frac{14}{15} \cdot \frac{20}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot \cancel{7}}{3 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot \cancel{7}} = \frac{2}{3 \cdot \cancel{5}} \cdot \frac{4 \cdot \cancel{5}}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$

Division

Om $\frac{1}{4}$ delas i 2 så blir svaret $\frac{1}{8}$. Om $\frac{1}{2}$ delas i 5 så blir resultatet $\frac{1}{10}$. Vi har alltså att

$$\frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8} \qquad \text{och} \qquad \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}.$$

När ett bråk divideras med ett heltal, multipliceras alltså nämnaren med heltalet.

Exempel 8

a) $\frac{3}{5}\Big/4 = \frac{3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$

b) $\frac{6}{7}\Big/3 = \frac{6}{7 \cdot 3} = \frac{2 \cdot \cancel{3}}{7 \cdot \cancel{3}} = \frac{2}{7}$

När ett tal divideras med ett bråk, multipliceras talet med bråket inverterat ("upp-och-nervänt"). Att t.ex. dividera med $\frac{1}{2}$ är ju samma sak som att multiplicera med $\frac{2}{1}$, dvs. 2.

Exempel 9

a) $\frac{3}{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{2}{1} = \frac{3 \cdot 2}{1} = 6$

b) $\frac{5}{\frac{3}{7}} = 5 \cdot \frac{7}{3} = \frac{5 \cdot 7}{3} = \frac{35}{3}$

c) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 5} = \frac{16}{15}$

d) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{9} = \frac{\cancel{3}}{2 \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot 3} = \frac{5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$

Hur kan bråkdivision förvandlas till multiplikation? Förklaringen är att om ett bråk multipliceras med sitt inverterade bråk blir produkten alltid 1, t.ex.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}=1 \qquad \text{eller} \qquad \frac{9}{17}\cdot\frac{17}{9}=\frac{\cancel{9}}{\cancel{17}}\cdot\frac{\cancel{17}}{\cancel{9}}=1.$$

Om man i en bråkdivision förlänger täljare och nämnare med nämnarens inverterade bråk, får man alltid 1 i nämnaren och resultatet blir täljaren multiplicerad med den ursprungliga nämnarens inverterade bråk.

Exempel 10

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}}{\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}}{1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}$$

Bråk som andelar

Rationella tal är alltså tal som kan skrivas i bråkform, omvandlas till decimalform, eller markeras på en tallinje. I vårt vardagliga språkbruk används också bråk när man beskriver andelar av något. Här nedan ges några exempel. Lägg märke till hur vi använder ordet *"av"*, vilket kan betyda såväl multiplikation som division.

Exempel 11

a) Olle satsade 20 kr och Stina 50 kr.

Olles andel är $\dfrac{20}{50+20}=\dfrac{20}{70}=\dfrac{2}{7}$ och han bör alltså få $\frac{2}{7}$ av vinsten.

b) Hur stor del utgör 45 kr av 100 kr?

Svar: 45 kr är $\dfrac{45}{100}=\dfrac{9}{20}$ av 100 kr.

c) Hur stor del utgör $\frac{1}{3}$ liter av $\frac{1}{2}$ liter?

Svar: $\frac{1}{3}$ liter är $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{1}=\dfrac{2}{3}$ av $\frac{1}{2}$ liter.

d) Hur mycket är $\frac{5}{8}$ av 1000?

Svar: $\dfrac{5}{8} \cdot 1000 = \dfrac{5000}{8} = 625$

e) Hur mycket är $\frac{2}{3}$ av $\frac{6}{7}$?

Svar: $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{6}{7} = \dfrac{2}{\cancel{3}} \cdot \dfrac{2 \cdot \cancel{3}}{7} = \dfrac{2 \cdot 2}{7} = \dfrac{4}{7}$

Blandade uttryck

När bråk förekommer i räkneuttryck gäller naturligtvis metoderna för de fyra räknesätten som vanligt, samt prioriteringsreglerna (multiplikation/division före addition/subtraktion). Kom också ihåg att täljare och nämnare i ett divisionsuttryck beräknas var för sig innan divisionen utförs (”osynliga parenteser”).

Exempel 12

a) $$\frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}} = \frac{1}{\frac{8}{12}+\frac{9}{12}} = \frac{1}{\frac{17}{12}} = 1 \cdot \frac{12}{17} = \frac{12}{17}$$

b) $$\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{4}{3}+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{4\cdot 2}{3\cdot 2}-\frac{1}{6}}{\frac{4\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{8}{6}-\frac{1}{6}}{\frac{8}{6}+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{9}{6}} = \frac{7}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{9} = \frac{7}{9}$$

c) $$\frac{3-\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}-2} = \frac{\frac{3\cdot 5}{5}-\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}-\frac{2\cdot 3}{3}} = \frac{\frac{15}{5}-\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}-\frac{6}{3}} = \frac{\frac{12}{5}}{-\frac{4}{3}} = \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$= -\frac{3\cdot \cancel{4}}{5} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} = -\frac{3\cdot 3}{5} = -\frac{9}{5}$$

d) $$\frac{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\Big/\frac{1}{5}-\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}-\frac{3\cdot 1}{5\cdot 3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{1}-\frac{\frac{3}{12}-\frac{4}{12}}{2}} = \frac{\frac{1}{\frac{5}{6}}-\frac{1}{5}}{\frac{10}{3}-\frac{-\frac{1}{12}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{6}{5} - \frac{1}{5}}{\frac{10}{3} + \frac{1}{24}} = \frac{1}{\frac{80}{24} + \frac{1}{24}} = \frac{1}{\frac{81}{24}} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$

Råd för inläsning

Grund- och slutprov
Efter att du har läst texten och arbetat med övningarna ska du göra grund- och slutprovet för att bli godkänd på detta avsnitt. Du hittar länken till proven i din student lounge.

Tänk på att:
Sträva alltid efter att skriva ett uttryck i enklast möjliga form. Vad som är "enklast" beror dock oftast på sammanhanget.

Det är viktigt att du verkligen behärskar bråkräkning. Att du kan hitta en gemensam nämnare, förkorta och förlänga etc. Principerna är nämligen grundläggande när man ska räkna med rationella uttryck som innehåller variabler och för att du ska kunna hantera andra matematiska uttryck och operationer.

Rationella uttryck med bråk som innehåller variabler (x, y, ...) är mycket vanliga när man studerar funktioner, speciellt ändringskvoter, gränsvärden och derivata.

Lästips
För dig som vill fördjupa dig ytterligare eller behöver en längre förklaring.

- Läs mer om bråk och bråkräkning i engelska Wikipedia (`http://en.wikipedia.org/wiki/Fraction_(mathematics)`)
- Bråkräkning — Fri text (`http://www.fritext.se/matte/brak/brak.html`)

Länktips

- Experimentera interaktivt med bråk (`http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_105_g_2_t_1.html`)
- Här kan du få en bild av hur det går till när man lägger ihop bråk. (`http://www.theducation.se/kurser/experiment/gyma/applets/ex13_brakaddition/Ex13Applet.html`)

1.2 Övningar

Övning 1.2:1

Skriv på gemensamt bråkstreck

a) $\dfrac{7}{4}+\dfrac{11}{7}$ b) $\dfrac{2}{7}-\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1}{6}-\dfrac{2}{5}$

d) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}$ e) $\dfrac{8}{7}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{3}$

Övning 1.2:2

Bestäm minsta gemensamma nämnare

a) $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{10}$ b) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}$ c) $\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{14}$ d) $\dfrac{2}{45}+\dfrac{1}{75}$

Övning 1.2:3

Beräkna följande uttryck genom att använda minsta gemensamma nämnare:

a) $\dfrac{3}{20}+\dfrac{7}{50}-\dfrac{1}{10}$ b) $\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{40}-\dfrac{1}{16}$

Övning 1.2:4

Förenkla följande uttryck genom att skriva på gemensamt bråkstreck. Bråket ska vara färdigförkortat.

a) $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{10}}$ b) $\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{8}}$ c) $\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}}$

Övning 1.2:5

Förenkla följande uttryck genom att skriva på gemensamt bråkstreck. Bråket ska vara färdigförkortat.

a) $\dfrac{2}{\frac{1}{7}-\frac{1}{15}}$ b) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$ c) $\dfrac{\frac{3}{10}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{8}-\frac{3}{16}}$

Övning 1.2:6

Förenkla $$\dfrac{\dfrac{2}{3+\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2-\frac{2}{7}}}.$$

1.3 Potenser

Innehåll:

- Positiv heltalsexponent
- Negativ heltalsexponent
- Rationell exponent
- Potenslagar

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Känna till begreppen bas och exponent.
- Beräkna uttryck med heltalsexponent.
- Hantera potenslagarna i förenkling av potensuttryck.
- Veta när potenslagarna är giltiga (positiv bas).
- Avgöra vilket av två potensuttryck som är störst baserat på jämförelse av bas/exponent.

Heltalspotenser

Vi använder multiplikationssymbolen som ett kortare skrivsätt för upprepad addition av samma tal, t.ex.

$$4+4+4+4+4=4\cdot 5.$$

På ett liknande sätt används potenser som ett kortare skrivsätt för upprepad multiplikation av samma tal:

$$4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4=4^5.$$

Siffran 4 kallas för potensens *bas* och siffran 5 dess *exponent*.

Exempel 1

a) $5^3=5\cdot 5\cdot 5=125$

b) $10^5=10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=100000$

c) $0{,}1^3 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$

d) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$, men
$-2^4 = -(2^4) = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

e) $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, men $(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$

Exempel 2

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

b) $(2 \cdot 3)^4 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^4 = 1296$

Det sista exemplet kan generaliseras till två användbara räkneregler för potenser:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad \text{och} \quad (ab)^m = a^m b^m.$$

Potenslagar

Med definitionen av potens följer ytterligare några räkneregler som förenklar beräkningar med potenser inblandade. Man ser t.ex. att

$$2^3 \cdot 2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{3 st}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{5 st}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{(3+5) st}} = 2^{3+5} = 2^8$$

vilket generellt kan skrivas

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Vid division av potenser kan också beräkningarna förenklas om potenserna har samma bas

$$\frac{2^7}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^{7-3} = 2^4.$$

Den allmänna regeln blir

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

När man råkar ut för en potens av en potens finns ytterligare en användbar räkneregel. Vi ser att

$$(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = \underbrace{5 \cdot 5}_{\text{2 st}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{\text{2 st}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{\text{2 st}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{3 gånger 2 st}} = 5^{2 \cdot 3} = 5^6.$$

och

$$(5^3)^2 = 5^3 \cdot 5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{3 st}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{3 st}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \ \cdot \ 5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{2 gånger 3 st}} = 5^{3 \cdot 2} = 5^6.$$

Allmänt kan detta skrivas

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Exempel 3

a) $2^9 \cdot 2^{14} = 2^{9+14} = 2^{23}$

b) $5 \cdot 5^3 = 5^1 \cdot 5^3 = 5^{1+3} = 5^4$

c) $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9$

d) $10^5 \cdot 1000 = 10^5 \cdot 10^3 = 10^{5+3} = 10^8$

Exempel 4

a) $\dfrac{3^{100}}{3^{98}} = 3^{100-98} = 3^2$

b) $\dfrac{7^{10}}{7} = \dfrac{7^{10}}{7^1} = 7^{10-1} = 7^9$

Om ett bråk har samma potensuttryck i både täljare och nämnare så inträffar följande:

$$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \quad \text{samtidigt som} \quad \frac{5^3}{5^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{125}{125} = 1.$$

För att räknereglerna för potenser ska stämma gör man alltså den naturliga definitionen att för alla a som inte är 0 gäller att

$$a^0 = 1.$$

Vi kan också råka ut för att exponenten i nämnaren är större än den i täljaren. Vi får t.ex.

$$\frac{3^4}{3^6} = 3^{4-6} = 3^{-2} \quad \text{och} \quad \frac{3^4}{3^6} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{3^2}.$$

Vi ser här att enligt våra räkneregler måste den negativa exponenten betyda att

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}.$$

Den allmänna definitionen av negativa exponenter är att, för alla tal a som inte är 0 gäller att

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exempel 5

a) $\dfrac{7^{1293}}{7^{1293}} = 7^{1293-1293} = 7^0 = 1$

b) $3^7 \cdot 3^{-9} \cdot 3^4 = 3^{7+(-9)+4} = 3^2$

c) $0{,}001 = \dfrac{1}{1000} = \dfrac{1}{10^3} = 10^{-3}$

d) $0{,}008 = \dfrac{8}{1000} = \dfrac{1}{125} = \dfrac{1}{5^3} = 5^{-3}$

e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^1} = 1 \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

f) $\left(\dfrac{1}{3^2}\right)^{-3} = (3^{-2})^{-3} = 3^{(-2)\cdot(-3)} = 3^6$

g) $0{,}01^5 = (10^{-2})^5 = 10^{-2\cdot 5} = 10^{-10}$

Om basen i ett potensuttryck är -1 så blir uttrycket alternerande -1 eller $+1$ beroende på exponentens värde

$$\begin{aligned}
&(-1)^1 = -1\\
&(-1)^2 = (-1)\cdot(-1) = +1\\
&(-1)^3 = (-1)\cdot(-1)^2 = (-1)\cdot 1 = -1\\
&(-1)^4 = (-1)\cdot(-1)^3 = (-1)\cdot(-1) = +1\\
&\quad\text{osv.}
\end{aligned}$$

Regeln är att $(-1)^n$ är lika med -1 om n är udda och lika med $+1$ om n är jämn.

Exempel 6

a) $(-1)^{56} = 1$ eftersom 56 är ett jämnt tal

b) $\dfrac{1}{(-1)^{11}} = \dfrac{1}{-1} = -1$ eftersom 11 är ett udda tal

c) $$\begin{aligned}\frac{(-2)^{127}}{2^{130}} &= \frac{(-1\cdot 2)^{127}}{2^{130}} = \frac{(-1)^{127}\cdot 2^{127}}{2^{130}} = \frac{-1\cdot 2^{127}}{2^{130}}\\ &= -2^{127-130} = -2^{-3} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Byte av bas

Man bör vara uppmärksam på att vid förenkling av uttryck om möjligt försöka skriva ihop potenser genom att välja samma bas. Det handlar ofta om att välja 2, 3 eller 5 som bas och därför bör man lära sig att känna igen potenser av dessa tal, exempelvis

$$4 = 2^2,\ \ 8 = 2^3,\ \ 16 = 2^4,\ \ 32 = 2^5,\ \ 64 = 2^6,\ \ 128 = 2^7,\ \ldots$$
$$9 = 3^2,\ \ 27 = 3^3,\ \ 81 = 3^4,\ \ 243 = 3^5,\ \ldots$$
$$25 = 5^2,\ \ 125 = 5^3,\ \ 625 = 5^4,\ \ldots$$

Men även

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}, \ \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}, \ \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}, \ \dots \\
\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}, \ \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}, \ \dots \\
\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}, \ \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}, \ \dots
\end{gathered}
$$

osv.

Exempel 7

a) Skriv $8^3 \cdot 4^{-2} \cdot 16$ som en potens med basen 2.

$$
\begin{aligned}
8^3 \cdot 4^{-2} \cdot 16 &= (2^3)^3 \cdot (2^2)^{-2} \cdot 2^4 = 2^{3\cdot 3} \cdot 2^{2\cdot(-2)} \cdot 2^4 \\
&= 2^9 \cdot 2^{-4} \cdot 2^4 = 2^{9-4+4} = 2^9
\end{aligned}
$$

b) Skriv $\dfrac{27^2 \cdot (1/9)^{-2}}{81^2}$ som en potens av basen 3.

$$
\begin{aligned}
\frac{27^2 \cdot (1/9)^{-2}}{81^2} &= \frac{(3^3)^2 \cdot (1/3^2)^{-2}}{(3^4)^2} = \frac{(3^3)^2 \cdot (3^{-2})^{-2}}{(3^4)^2} \\
&= \frac{3^{3\cdot 2} \cdot 3^{(-2)\cdot(-2)}}{3^{4\cdot 2}} = \frac{3^6 \cdot 3^4}{3^8} = \frac{3^{6+4}}{3^8} = \frac{3^{10}}{3^8} = 3^{10-8} = 3^2
\end{aligned}
$$

c) Skriv $\dfrac{81 \cdot 32^2 \cdot (2/3)^2}{2^5 + 2^4}$ så enkelt som möjligt.

$$
\begin{aligned}
\frac{81 \cdot 32^2 \cdot (2/3)^2}{2^5 + 2^4} &= \frac{3^4 \cdot (2^5)^2 \cdot \dfrac{2^2}{3^2}}{2^{4+1} + 2^4} = \frac{3^4 \cdot 2^{5\cdot 2} \cdot \dfrac{2^2}{3^2}}{2^4 \cdot 2^1 + 2^4} = \frac{3^4 \cdot 2^{10} \cdot \dfrac{2^2}{3^2}}{2^4 \cdot (2^1 + 1)} \\
&= \frac{\dfrac{3^4 \cdot 2^{10} \cdot 2^2}{3^2}}{2^4 \cdot 3} = \frac{3^4 \cdot 2^{10} \cdot 2^2}{3^2 \cdot 2^4 \cdot 3} = 3^{4-2-1} \cdot 2^{10+2-4} = 3^1 \cdot 2^8 = 3 \cdot 2^8
\end{aligned}
$$

Rationell exponent

Vad händer om ett tal höjs upp till en rationell exponent? Gäller fortfarande de definitioner och räkneregler vi har använt oss av ovan?

Eftersom exempelvis

$$2^{1/2} \cdot 2^{1/2} = 2^{1/2+1/2} = 2^1 = 2$$

så måste $2^{1/2}$ vara samma sak som $\sqrt{2}$ i och med att $\sqrt{2}$ definieras som det tal som uppfyller $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

Allmänt kan vi göra definitionen

$$a^{1/2} = \sqrt{a}.$$

Vi måste då förutsätta att $a \geq 0$, eftersom inget reellt tal multiplicerat med sig själv kan ge ett negativt tal.

Man ser också att exempelvis

$$5^{1/3} \cdot 5^{1/3} \cdot 5^{1/3} = 5^{1/3+1/3+1/3} = 5^1 = 5$$

som innebär att $5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$, vilket kan generaliseras till att

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Genom att kombinera denna definition med en av de tidigare potenslagarna ($(a^m)^n = a^{m \cdot n}$) får vi att, för alla $a \geq 0$ gäller att

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

eller

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a}\,)^m.$$

Exempel 8

a) $27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$ eftersom $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

b) $1000^{-1/3} = \dfrac{1}{1000^{1/3}} = \dfrac{1}{(10^3)^{1/3}} = \dfrac{1}{10^{3\cdot\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{10^1} = \dfrac{1}{10}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{8}} = \dfrac{1}{8^{1/2}} = \dfrac{1}{(2^3)^{1/2}} = \dfrac{1}{2^{3/2}} = 2^{-3/2}$

d) $\dfrac{1}{16^{-1/3}} = \dfrac{1}{(2^4)^{-1/3}} = \dfrac{1}{2^{-4/3}} = 2^{-(-4/3)} = 2^{4/3}$

Jämförelse av potenser

Om man utan tillgång till miniräknare vill jämföra storleken av potenser, kan man i vissa fall avgöra detta genom att jämföra basen eller exponenten.

Om basen i en potens är större än 1 så blir potensen större ju större exponenten är. Är däremot basen mellan 0 och 1 så blir potensen mindre istället när exponenten växer.

Exempel 9

a) $3^{5/6} > 3^{3/4}$ eftersom basen 3 är större än 1 och den första exponenten $5/6$ är större än den andra exponenten $3/4$.

b) $3^{-3/4} > 3^{-5/6}$ eftersom basen är större än 1 och exponenterna uppfyller $-3/4 > -5/6$.

c) $0{,}3^5 < 0{,}3^4$ eftersom basen 0,3 är mellan 0 och 1 och $5 > 4$.

Har en potens en positiv exponent så blir potensen större ju större basen är. Det motsatta gäller om exponenten är negativ: då blir potensen mindre när basen blir större.

Exempel 10

a) $5^{3/2} > 4^{3/2}$ eftersom basen 5 är större än basen 4 och båda potenserna har samma positiva exponenten $3/2$.

b) $2^{-5/3} > 3^{-5/3}$ eftersom baserna uppfyller $2 < 3$ och potenserna har den negativa exponenten $-5/3$.

Ibland krävs det en omskrivning av potenserna för att kunna avgöra storleksförhållandet. Vill man t.ex. jämföra 125^2 med 36^3 kan man göra omskrivningarna

$$125^2 = (5^3)^2 = 5^6 \quad \text{och} \quad 36^3 = (6^2)^3 = 6^6$$

varefter man kan konstatera att $36^3 > 125^2$.

Exempel 11

Avgör vilket tal som är störst av

a) $25^{1/3}$ och $5^{3/4}$.

Basen 25 kan skrivas om i termer av den andra basen 5 genom att $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$. Därför är

$$25^{1/3} = (5^2)^{1/3} = 5^{2 \cdot \frac{1}{3}} = 5^{2/3}$$

och då ser vi att

$$5^{3/4} > 25^{1/3}$$

eftersom $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ och basen 5 är större än 1.

b) $(\sqrt{8}\,)^5$ och 128.

Både 8 och 128 kan skrivas som potenser av 2

$$\begin{aligned} 8 &= 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3, \\ 128 &= 2 \cdot 64 = 2 \cdot 2 \cdot 32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^3 = 2^7. \end{aligned}$$

Detta betyder att

$$\begin{aligned} (\sqrt{8}\,)^5 &= (8^{1/2})^5 = (8)^{5/2} = (2^3)^{5/2} = 2^{3 \cdot \frac{5}{2}} = 2^{15/2} \\ 128 &= 2^7 = 2^{14/2} \end{aligned}$$

och därför är

$$(\sqrt{8}\,)^5 > 128$$

i och med att $\frac{15}{2} > \frac{14}{2}$ och basen 2 är större än 1.

c) $(8^2)^{1/5}$ och $(\sqrt{27}\,)^{4/5}$.

Eftersom $8 = 2^3$ och $27 = 3^3$ så kan ett första steg vara att förenkla och skriva talen som potenser av 2 respektive 3,

$$\begin{aligned} (8^2)^{1/5} &= (8)^{2/5} = (2^3)^{2/5} = 2^{3 \cdot \frac{2}{5}} = 2^{6/5}, \\ (\sqrt{27}\,)^{4/5} &= (27^{1/2})^{4/5} = 27^{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}} = 27^{2/5} = (3^3)^{2/5} = 3^{3 \cdot \frac{2}{5}} = 3^{6/5}. \end{aligned}$$

Nu ser vi att

$$(\sqrt{27}\,)^{4/5} > (8^2)^{1/5}$$

eftersom $3 > 2$ och exponenten $\frac{6}{5}$ är positiv.

d) $3^{1/3}$ och $2^{1/2}$

Vi skriver exponenterna med gemensam nämnare

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \quad \text{och} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6}.$$

Då har vi att

$$\begin{aligned} 3^{1/3} &= 3^{2/6} = (3^2)^{1/6} = 9^{1/6} \\ 2^{1/2} &= 2^{3/6} = (2^3)^{1/6} = 8^{1/6} \end{aligned}$$

och vi ser att

$$3^{1/3} > 2^{1/2}$$

eftersom $9 > 8$ och exponenten $1/6$ är positiv.

Råd för inläsning

Grund- och slutprov

Efter att du har läst texten och arbetat med övningarna ska du göra grund- och slutprovet för att bli godkänd på detta avsnitt. Du hittar länken till proven i din student lounge.

Tänk på att:

Ett tal upphöjt till 0 är 1, om talet (basen) är skild från 0.

Lästips

För dig som vill fördjupa dig ytterligare eller behöver en längre förklaring

- Läs mer om potenser på engelska Wikipedia (`http://en.wikipedia.org/wiki/Exponent`)
- Vilket är det största primtalet? Läs mer på The Prime Pages (`http://primes.utm.edu/`)

Länktips

- Här kan du träna på potenslagarna (`http://www.ltcconline.net/greenl/java/BasicAlgebra/ExponentRules/ExponentRules.html`)

1.3 Övningar

Övning 1.3:1

Beräkna

a) $2^3 \cdot 3^2$ b) $3^5 \cdot 9^{-2}$ c) $(-5)^3$ d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$

Övning 1.3:2

Skriv som en potens av 2

a) $2 \cdot 4 \cdot 8$ b) $0{,}25$ c) 1

Övning 1.3:3

Skriv som en potens av 3

a) $\dfrac{1}{3}$ b) 243 c) 9^2 d) $\dfrac{1}{27}$ e) $\dfrac{3}{9^2}$

Övning 1.3:4

Beräkna

a) $2^9 \cdot 2^{-7}$ b) $3^{13} \cdot 9^{-3} \cdot 27^{-2}$ c) $\dfrac{5^{12}}{5^{-4}} \cdot (5^2)^{-6}$

d) $2^{2^3} \cdot (-2)^{-4}$ e) $625 \cdot (5^8 + 5^9)^{-1}$

Övning 1.3:5

Beräkna

a) $4^{1/2}$ b) $4^{-1/2}$

c) $9^{3/2}$ d) $\left(47^{2/3}\right)^3$

e) $3^{1,4} \cdot 3^{0,6}$ f) $\left(125^{1/3}\right)^2 \cdot \left(27^{1/3}\right)^{-2} \cdot 9^{1/2}$

Övning 1.3:6

Avgör vilket tal som är störst av

a) $256^{1/3}$ och $200^{1/3}$ b) $0{,}5^{-3}$ och $0{,}4^{-3}$ c) $0{,}2^5$ och $0{,}2^7$

d) $400^{1/3}$ och $\left(5^{1/3}\right)^4$ e) $125^{1/2}$ och $625^{1/3}$ f) 2^{56} och 3^{40}

2.1 Algebraiska uttryck

Innehåll:

- Distributiva lagen
- Kvadreringsreglerna
- Konjugatregeln
- Rationella uttryck

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Förenkla komplicerade algebraiska uttryck.
- Faktorisera uttryck med kvadreringsreglerna och konjugatregeln.
- Utveckla uttryck med kvadreringsreglerna och konjugatregeln.

Distributiva lagen

Den distributiva lagen anger hur man multiplicerar in en faktor i en parentes.

$$a(b+c) = ab + ac$$

Exempel 1

a) $4(x+y) = 4x + 4y$

b) $2(a-b) = 2a - 2b$

c) $x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x \cdot \frac{1}{x} + x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = 1 + \frac{1}{x}$

d) $a(x+y+z) = ax + ay + az$

Med den distributiva lagen kan vi också förstå hur vi kan hantera minustecken framför parentesuttryck. Regeln säger att en parentes med ett minustecken framför kan tas bort om alla termer inuti parentesen byter tecken.

Exempel 2

a) $-(x+y) = (-1)\cdot(x+y) = (-1)x + (-1)y = -x - y$

b) $-(x^2 - x) = (-1)\cdot(x^2 - x) = (-1)x^2 - (-1)x = -x^2 + x$
där vi i sista ledet använt att $-(-1)x = (-1)(-1)x = 1\cdot x = x$.

c) $$\begin{aligned} -(x+y-y^3) &= (-1)\cdot(x+y-y^3) = (-1)\cdot x + (-1)\cdot y - (-1)\cdot y^3 \\ &= -x - y + y^3 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x^2 - 2x - (3x+2) &= x^2 - 2x - 3x - 2 = x^2 - (2+3)x - 2 \\ &= x^2 - 5x - 2 \end{aligned}$$

Om den distributiva lagen används baklänges så sägs vi faktorisera uttrycket. Ofta försöker man bryta ut en så stor faktor som möjligt.

Exempel 3

a) $3x + 9y = 3x + 3\cdot 3y = 3(x+3y)$

b) $xy + y^2 = xy + y\cdot y = y(x+y)$

c) $2x^2 - 4x = 2x\cdot x - 2\cdot 2\cdot x = 2x(x-2)$

d) $\dfrac{y-x}{x-y} = \dfrac{-(x-y)}{x-y} = \dfrac{-1}{1} = -1$

Kvadreringsreglerna

Den distributiva lagen behöver ibland användas upprepade gånger för att behandla större uttryck. Om vi betraktar
$$(a+b)(c+d)$$
och ser $a+b$ som en faktor som multipliceras in i parentesen $(c+d)$ så får vi

$$\begin{aligned} \,(c+d) &= \,c + \,d, \\ (a+b)\,(c+d) &= (a+b)\,c + (a+b)\,d. \end{aligned}$$

Sedan kan c och d multipliceras in i respektive parentes

$$(a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd.$$

Ett minnesvärt sätt att sammanfatta formeln är:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exempel 4

a) $$(x+1)(x-2) = x \cdot x + x \cdot (-2) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-2) = x^2 - 2x + x - 2$$
$$= x^2 - x - 2$$

b) $$3(x-y)(2x+1) = 3(x \cdot 2x + x \cdot 1 - y \cdot 2x - y \cdot 1) = 3(2x^2 + x - 2xy - y)$$
$$= 6x^2 + 3x - 6xy - 3y$$

c) $$(1-x)(2-x) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-x) - x \cdot 2 - x \cdot (-x) = 2 - x - 2x + x^2$$
$$= 2 - 3x + x^2$$

där vi använt att $-x \cdot (-x) = (-1)x \cdot (-1)x = (-1)^2 x^2 = 1 \cdot x^2 = x^2$.

Två viktiga specialfall av ovanstående formel är när $a+b$ och $c+d$ är samma uttryck

Kvadreringsreglerna

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Dessa formler kallas för första och andra kvadreringsregeln.

Exempel 5

a) $$(x+2)^2 = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

b) $$(-x+3)^2 = (-x)^2 + 2 \cdot 3(-x) + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

där $(-x)^2 = ((-1)x)^2 = (-1)^2 x^2 = 1 \cdot x^2 = x^2$.

c) $$(x^2-4)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 + 4^2 = x^4 - 8x^2 + 16$$

d) $$(x+1)^2 - (x-1)^2 = (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)$$
$$= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1$$
$$= 2x + 2x = 4x$$

e) $(2x+4)(x+2) = 2(x+2)(x+2) = 2(x+2)^2 = 2(x^2+4x+4)$
$= 2x^2+8x+8$

f) $(x-2)^3 = (x-2)(x-2)^2 = (x-2)(x^2-4x+4)$
$= x \cdot x^2 + x \cdot (-4x) + x \cdot 4 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot (-4x) - 2 \cdot 4$
$= x^3 - 4x^2 + 4x - 2x^2 + 8x - 8 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Kvadreringsreglerna används också i omvänd riktning för att faktorisera uttryck.

Exempel 6

a) $x^2+2x+1 = (x+1)^2$

b) $x^6 - 4x^3 + 4 = (x^3)^2 - 2 \cdot 2x^3 + 2^2 = (x^3-2)^2$

c) $x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

Konjugatregeln

Ett tredje specialfall av den första formeln i förra avsnittet är konjugatregeln

Konjugatregeln:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Denna formel kan vi få fram direkt genom att utveckla vänsterledet

$$(a+b)(a-b) = a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Exempel 7

a) $(x-4y)(x+4y) = x^2 - (4y)^2 = x^2 - 16y^2$

b) $(x^2+2x)(x^2-2x) = (x^2)^2 - (2x)^2 = x^4 - 4x^2$

c) $(y+3)(3-y) = (3+y)(3-y) = 3^2 - y^2 = 9 - y^2$

d) $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2+4)(x^2-4) = (x^2+4)(x^2-2^2)$
$= (x^2+4)(x+2)(x-2)$

Rationella uttryck

Räkning med algebraiska uttryck som innehåller bråk liknar till stor del vanlig bråkräkning.

Multiplikation och division av bråkuttryck följer samma räkneregler som gäller för vanliga bråktal,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \text{och} \qquad \frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Exempel 8

a) $\dfrac{3x}{x-y} \cdot \dfrac{4x}{2x+y} = \dfrac{3x \cdot 4x}{(x-y)\cdot(2x+y)} = \dfrac{12x^2}{(x-y)(2x+y)}$

b) $\dfrac{\dfrac{a}{x}}{\dfrac{x+1}{a}} = \dfrac{a^2}{x(x+1)}$

c) $\dfrac{\dfrac{x}{(x+1)^2}}{\dfrac{x-2}{x-1}} = \dfrac{x(x-1)}{(x-2)(x+1)^2}$

Förlängning av ett bråkuttryck innebär att vi multiplicerar täljare och nämnare med samma faktor

$$\frac{x+2}{x+1} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{(x+2)(x+3)(x+4)}{(x+1)(x+3)(x+4)} = \ldots$$

Förkortning av ett bråkuttryck innebär att vi stryker faktorer som täljaren och nämnaren har gemensamt

$$\frac{(x+2)\cancel{(x+3)}(x+4)}{(x+1)\cancel{(x+3)}(x+4)} = \frac{(x+2)\cancel{(x+4)}}{(x+1)\cancel{(x+4)}} = \frac{x+2}{x+1}.$$

Exempel 9

a) $$\frac{x}{x+1} = \frac{x}{x+1}\cdot\frac{x+2}{x+2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)(x+2)}$$

b) $$\frac{x^2-1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x}$$

c) $$\frac{(x^2-y^2)(x-2)}{(x^2-4)(x+y)} = \{\text{ konjugatregeln }\} = \frac{(x+y)(x-y)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x+y)} = \frac{x-y}{x+2}$$

När bråkuttryck adderas eller subtraheras behöver de, om så är nödvändigt, förlängas så att de får samma nämnare innan täljarna kan kombineras ihop,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1}\cdot\frac{x}{x} = \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)}.$$

Ofta försöker man förlänga med så lite som möjligt för att underlätta räknandet. Minsta gemensamma nämnare (MGN) är den gemensamma nämnare som innehåller minst antal faktorer.

Exempel 10

a) $$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \quad \text{har MGN} = (x+1)(x+2)$$

Förläng den första termen med $(x+2)$ och den andra termen med $(x+1)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} &= \frac{x+2}{(x+1)(x+2)} + \frac{x+1}{(x+2)(x+1)}\\ &= \frac{x+2+x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}.\end{aligned}$$

b) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \text{har MGN} = x^2$$

Vi behöver bara förlänga den första termen för att få en gemensam nämnare

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}.$$

c) $\dfrac{1}{x(x+1)^2} - \dfrac{1}{x^2(x+2)}$ har MGN $= x^2(x+1)^2(x+2)$

Den första termen förlängs med $x(x+2)$ medan den andra termen förlängs med $(x+1)^2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x+1)^2} - \frac{1}{x^2(x+2)} &= \frac{x(x+2)}{x^2(x+1)^2(x+2)} - \frac{(x+1)^2}{x^2(x+1)^2(x+2)} \\
&= \frac{x^2+2x}{x^2(x+1)^2(x+2)} - \frac{x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2(x+2)} \\
&= \frac{x^2+2x-(x^2+2x+1)}{x^2(x+1)^2(x+2)} \\
&= \frac{x^2+2x-x^2-2x-1}{x^2(x+1)^2(x+2)} \\
&= \frac{-1}{x^2(x+1)^2(x+2)}.
\end{aligned}$$

d) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x(x-1)} - 1$ har MGN $= x(x-1)(x+1)$

Vi förlänger alla termer så att de får den gemensamma nämnaren $x(x-1)(x+1)$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x(x-1)} - 1 &= \frac{x^2(x-1)}{x(x-1)(x+1)} - \frac{x+1}{x(x-1)(x+1)} - \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{x^3-x^2}{x(x-1)(x+1)} - \frac{x+1}{x(x-1)(x+1)} - \frac{x^3-x}{x(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{x^3-x^2-(x+1)-(x^3-x)}{x(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{x^3-x^2-x-1-x^3+x}{x(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{-x^2-1}{x(x-1)(x+1)}.
\end{aligned}$$

Vid förenkling av större uttryck är det ofta nödvändigt att både förlänga och förkorta i steg. Eftersom förkortning förutsätter att vi kan faktorisera uttryck är det viktigt att försöka behålla uttryck (t.ex. nämnare) faktoriserade och inte utveckla något som vi senare behöver faktorisera.

Exempel 11

a) $$\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x+2)(x-2)} = \{\ \text{MGN} = (x+2)(x-2)\ \}$$
$$= \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} - \frac{4}{(x+2)(x-2)}$$
$$= \frac{x+2-4}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2}$$

b) $$\frac{x+\frac{1}{x}}{x^2+1} = \frac{\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}}{x^2+1} = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x}$$

c) $$\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{x+y} = \frac{\frac{y^2}{x^2y^2}-\frac{x^2}{x^2y^2}}{x+y} = \frac{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}{x+y} = \frac{y^2-x^2}{x^2y^2(x+y)}$$
$$= \frac{(y+x)(y-x)}{x^2y^2(x+y)} = \frac{y-x}{x^2y^2}$$

Råd för inläsning

Grund- och slutprov

Efter att du har läst texten och arbetat med övningarna ska du göra grund- och slutprovet för att bli godkänd på detta avsnitt. Du hittar länken till proven i din student lounge.

Tänk på att:

Var noggrann. Om du gör ett fel på ett ställe så kommer resten av uträkningen också vara fel.

Använd många mellanled. Om du är osäker på en uträkning utför då hellre enkla steg än ett stort steg.

Utveckla inte i onödan. Du kan vid ett senare tillfälle vara tvungen att faktorisera tillbaka.

Lästips

- Läs mer om algebra på engelska Wikipedia (`http://en.wikipedia.org/wiki/Algebra`)
- Understanding Algebra — engelsk textbok på nätet (`http://www.jamesbrennan.org/algebra/`)

2.1 Övningar

Övning 2.1:1

Utveckla

a)	$3x(x-1)$	b)	$(1+x-x^2)xy$	c)	$-x^2(4-y^2)$
d)	$x^3y^2\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{xy}+1\right)$	e)	$(x-7)^2$	f)	$(5+4y)^2$
g)	$(y^2-3x^3)^2$	h)	$(5x^3+3x^5)^2$		

Övning 2.1:2

Utveckla

a)	$(x-4)(x-5)-3x(2x-3)$	b)	$(1-5x)(1+15x)-3(2-5x)(2+5x)$
c)	$(3x+4)^2-(3x-2)(3x-8)$	d)	$(3x^2+2)(3x^2-2)(9x^4+4)$
e)	$(a+b)^2+(a-b)^2$		

Övning 2.1:3

Faktorisera så långt som möjligt

a)	x^2-36	b)	$5x^2-20$	c)	x^2+6x+9
d)	$x^2-10x+25$	e)	$18x-2x^3$	f)	$16x^2+8x+1$

Övning 2.1:4

Bestäm koefficienterna framför x och x^2 när följande uttryck utvecklas

a) $(x+2)(3x^2-x+5)$

b) $(1+x+x^2+x^3)(2-x+x^2+x^4)$

c) $(x-x^3+x^5)(1+3x+5x^2)(2-7x^2-x^4)$

Övning 2.1:5

Förenkla så långt som möjligt

a)	$\dfrac{1}{x-x^2}-\dfrac{1}{x}$	b)	$\dfrac{1}{y^2-2y}-\dfrac{2}{y^2-4}$
c)	$\dfrac{(3x^2-12)(x^2-1)}{(x+1)(x+2)}$	d)	$\dfrac{(y^2+4y+4)(2y-4)}{(y^2+4)(y^2-4)}$

Övning 2.1:6

Förenkla så långt som möjligt

a) $\left(x-y+\dfrac{x^2}{y-x}\right)\left(\dfrac{y}{2x-y}-1\right)$

b) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x}{x+3}-2$

c) $\dfrac{2a+b}{a^2-ab}-\dfrac{2}{a-b}$

d) $\dfrac{a-b+\dfrac{b^2}{a+b}}{1-\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2}$

Övning 2.1:7

Förenkla följande bråkuttryck genom att skriva på gemensamt bråkstreck

a) $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{2}{x+5}$

b) $x+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2}$

c) $\dfrac{ax}{a+1}-\dfrac{ax^2}{(a+1)^2}$

Övning 2.1:8

Förenkla följande bråkuttryck genom att skriva på gemensamt bråkstreck

a) $\dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{3+x}$

b) $\dfrac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x-3}}$

c) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}}$

2.2 Linjära uttryck

Innehåll:

- Förstagradsekvationer
- Räta linjens ekvation
- Geometriska problem
- Områden som definieras av olikheter

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Lösa algebraiska ekvationer som efter förenkling leder till förstagradsekvationer.
- Omvandla mellan formerna $y = kx + m$ och $ax + by + c = 0$.
- Skissera räta linjer utgående från ekvationen.
- Lösa geometriska problem som innehåller räta linjer.
- Skissera områden som ges av linjära olikheter och bestämma arean av dessa.

Förstagradsekvationer

För att lösa förstagradsekvationer (även kallade linjära ekvationer) utför vi räkneoperationer på båda leden samtidigt, som successivt förenklar ekvationen och till slut gör att vi får x ensamt i ena ledet.

Exempel 1

a) Lös ekvationen $x + 3 = 7$.

Subtrahera 3 från båda led

$$x + 3 - 3 = 7 - 3.$$

Vänsterledet förenklas då till x och vi får att

$$x = 7 - 3 = 4.$$

b) Lös ekvationen $3x = 6$.

Dividera båda led med 3
$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}.$$
Efter att ha förkortat bort 3 i vänsterledet har vi att
$$x = \frac{6}{3} = 2.$$

c) Lös ekvationen $2x + 1 = 5$.

Först subtraherar vi båda led med 1 för att få $2x$ ensamt i vänsterledet
$$2x = 5 - 1.$$
Sedan dividerar vi båda led med 2 och får svaret
$$x = \frac{4}{2} = 2.$$

En förstagradsekvation kan skrivas på normalformen $ax = b$. Lösningen är då helt enkelt $x = b/a$ (man måste anta att $a \neq 0$). De eventuella svårigheter som kan uppstå när man löser en förstagradsekvation gäller alltså inte själva lösningsformeln utan snarare de förenklingar som kan behövas för att komma till normalformen. Här nedan visas några exempel som har det gemensamt att en ekvation förenklas till linjär normalform och därmed får en unik lösning.

Exempel 2

Lös ekvationen $2x - 3 = 5x + 7$.

Eftersom x förekommer både i vänster- och högerledet subtraherar vi $2x$ från båda led
$$2x - 3 - 2x = 5x + 7 - 2x$$
och får x samlat i högerledet
$$-3 = 3x + 7.$$
Nu subtraherar vi 7 från båda led
$$-3 - 7 = 3x + 7 - 7$$
och får $3x$ ensamt kvar i högerledet
$$-10 = 3x.$$

Det sista steget är att dividera båda led med 3

$$\frac{-10}{3} = \frac{3x}{3}$$

och detta ger att

$$x = -\frac{10}{3}.$$

Exempel 3

Lös ut x från ekvationen $ax + 7 = 3x - b$.

Genom att subtrahera båda led med $3x$

$$\begin{aligned} ax + 7 - 3x &= 3x - b - 3x \\ ax + 7 - 3x &= - b \end{aligned}$$

och sedan med 7

$$\begin{aligned} ax + 7 - 3x - 7 &= -b - 7 \\ ax \phantom{{}+7} - 3x \phantom{{}-7} &= -b - 7 \end{aligned}$$

har vi samlat alla termer som innehåller x i vänsterledet och övriga termer i högerledet. Eftersom termerna i vänsterledet har x som en gemensam faktor kan x brytas ut

$$(a - 3)x = -b - 7.$$

Dividera båda led med $a - 3$

$$x = \frac{-b - 7}{a - 3}.$$

Det är inte alltid uppenbart att man har att göra med en förstagradsekvation. I följande två exempel förvandlas den ursprungliga ekvationen genom förenklingar till en förstagradsekvation.

Exempel 4

Lös ekvationen $(x - 3)^2 + 3x^2 = (2x + 7)^2$.

Utveckla kvadratuttrycken i båda leden

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 + 3x^2 &= 4x^2 + 28x + 49, \\ 4x^2 - 6x + 9 &= 4x^2 + 28x + 49. \end{aligned}$$

Subtrahera $4x^2$ från båda led

$$-6x + 9 = 28x + 49.$$

Addera $6x$ till båda led

$$9 = 34x + 49.$$

Subtrahera 49 från båda led

$$-40 = 34x.$$

Dividera båda led med 34

$$x = \frac{-40}{34} = -\frac{20}{17}.$$

Exempel 5

Lös ekvationen $\dfrac{x+2}{x^2+x} = \dfrac{3}{2+3x}$.

Flytta över båda termerna i ena ledet

$$\frac{x+2}{x^2+x} - \frac{3}{2+3x} = 0.$$

Förläng termerna så att de får samma nämnare

$$\frac{(x+2)(2+3x)}{(x^2+x)(2+3x)} - \frac{3(x^2+x)}{(2+3x)(x^2+x)} = 0$$

och förenkla täljaren

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)(2+3x) - 3(x^2+x)}{(x^2+x)(2+3x)} &= 0, \\ \frac{3x^2+8x+4-(3x^2+3x)}{(x^2+x)(2+3x)} &= 0, \\ \frac{5x+4}{(x^2+x)(2+3x)} &= 0. \end{aligned}$$

Denna ekvation är uppfylld bara när täljaren är lika med noll (samtidigt som nämnaren inte är lika med noll),

$$5x + 4 = 0$$

vilket ger att $x = -\frac{4}{5}$.

Räta linjer

Funktioner av typen

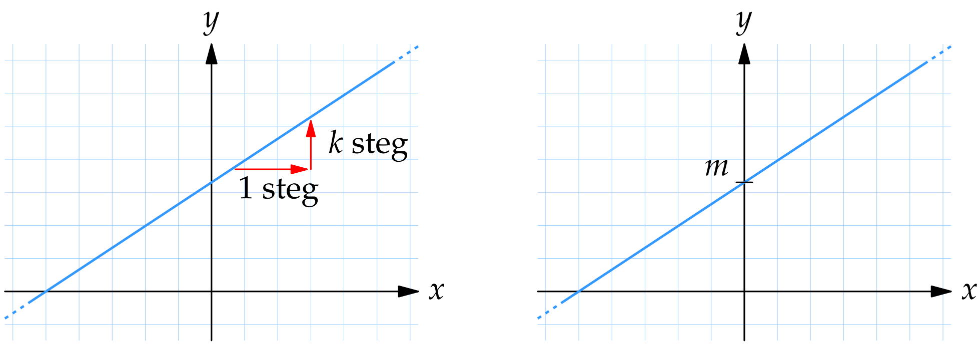
$$y = 2x + 1$$
$$y = -x + 3$$
$$y = \tfrac{1}{2}x - 5$$

är exempel på linjära funktioner och de kan allmänt skrivas i formen

$$y = kx + m$$

där k och m är konstanter.

Grafen till en linjär funktion är alltid en rät linje och konstanten k anger linjens lutning mot x-axeln och m anger y-koordinaten för den punkt där linjen skär y-axeln.



Linjen $y = kx + m$ har lutning k och skär y-axeln i $(0, m)$.

Konstanten k kallas för linjens riktningskoefficient och innebär att en enhetsförändring i positiv x-led på linjen ger k enheters förändring i positiv y-led. Det gäller därmed att om

- $k > 0$ så lutar linjen uppåt,
- $k < 0$ så lutar linjen nedåt.

För en horisontell linje (parallell med x-axeln) är $k = 0$ medan en vertikal linje (parallell med y-axeln) inte har något k-värde (en sådan linje kan inte skrivas i formen $y = kx + m$).

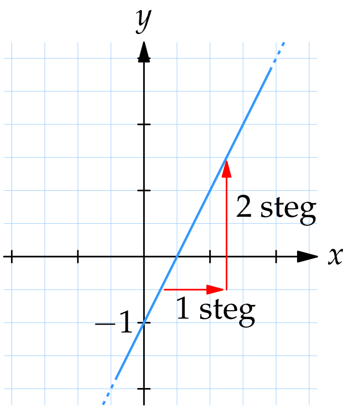
Exempel 6

a) Skissera linjen $y = 2x - 1$.

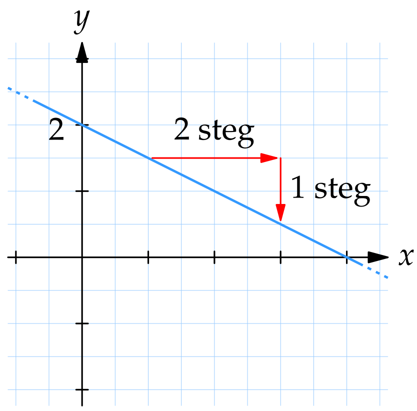
Jämför vi linjens ekvation med $y = kx + m$ så ser vi att $k = 2$ och $m = -1$. Detta betyder att linjens riktningskoefficient är 2 och att den skär y-axeln i punkten $(0, -1)$. Se figuren till vänster nedan.

b) Skissera linjen $y = 2 - \frac{1}{2}x$.

Linjens ekvation kan skrivas som $y = -\frac{1}{2}x + 2$ och då ser vi att dess riktningskoefficient är $k = -\frac{1}{2}$ och att $m = 2$. Se figuren nedan till höger.



Linjen $y = 2x - 1$

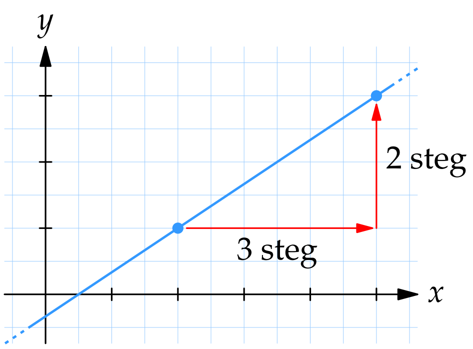


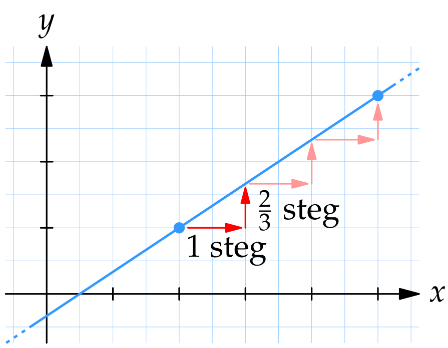
Linjen $y = 2 - x/2$

Exempel 7

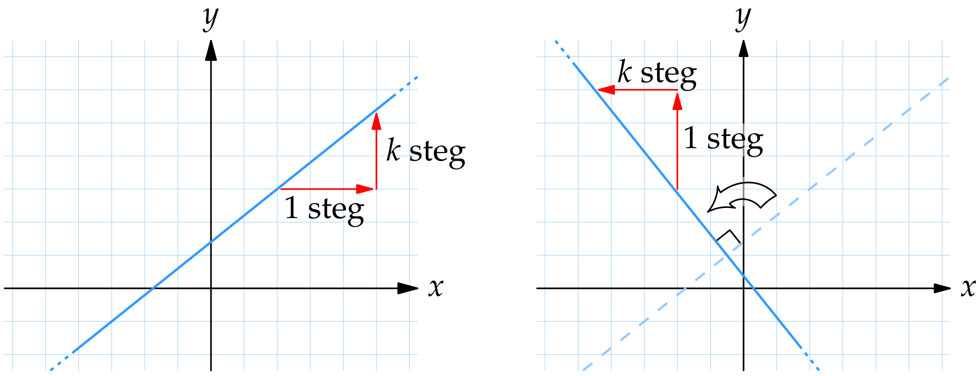
Vilken riktningskoefficient har den räta linje som går genom punkterna $(2, 1)$ och $(5, 3)$?

Ritar vi upp punkterna och linjen i ett koordinatsystem så ser vi att $5 - 2 = 3$ steg i x-led motsvaras av $3 - 1 = 2$ steg i y-led på linjen. Det betyder att 1 steg i x-led måste motsvaras av $k = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3}$ steg i y-led. Alltså är linjens riktningskoefficient $k = \frac{2}{3}$.





Två räta linjer som är parallella har uppenbarligen samma riktningskoefficient. Det går också att se (t.ex. i figuren nedan) att två linjer som är vinkelräta har riktningskoefficienter k_1 respektive k_2 som uppfyller $k_2 = -1/k_1$, vilket också kan skrivas som $k_1 k_2 = -1$.



Den räta linjen i figuren till vänster har riktningskoefficient k, dvs. 1 steg i x-led motsvaras av k steg i y-led. Om linjen vrids 90° motsols får vi linjen i figuren till höger, och den linjen har riktningskoefficient $-\frac{1}{k}$ eftersom nu motsvaras $-k$ steg i x-led av 1 steg i y-led.

Exempel 8

a) Linjerna $y = 3x - 1$ och $y = 3x + 5$ är parallella.

b) Linjerna $y = x + 1$ och $y = 2 - x$ är vinkelräta.

Alla räta linjer (även den vertikala linjen) kan skrivas i den allmänna formen

$$ax + by = c$$

där a, b och c är konstanter.

Exempel 9

a) Skriv linjen $y = 5x + 7$ i formen $ax + by = c$.

Flytta över x-termen till vänsterledet: $-5x + y = 7$.

b) Skriv linjen $2x + 3y = -1$ i formen $y = kx + m$.

Flytta över x-termen i högerledet $3y = -2x - 1$ och dela båda led med 3

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}.$$

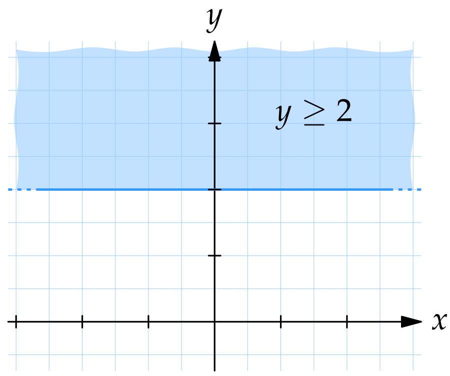
Områden i koordinatsystem

Genom att tolka olikheter geometriskt kan de användas för att beskriva områden i planet.

Exempel 10

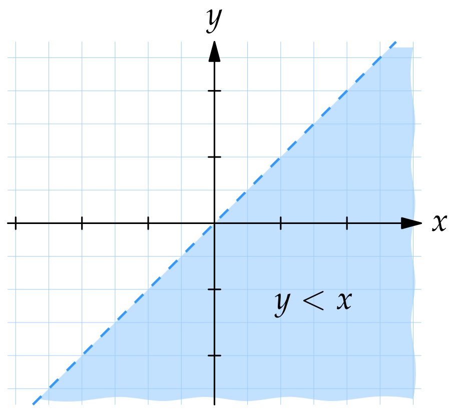
a) Skissera området i xy-planet som uppfyller $y \geq 2$.

Området ges av alla punkter (x, y) vars y-koordinat är 2 eller större, dvs. alla punkter på eller ovanför linjen $y = 2$.



b) Skissera området i xy-planet som uppfyller $y < x$.

En punkt (x, y) som uppfyller olikheten $y < x$ har en x-koordinat som är större än dess y-koordinat. Området består alltså av alla punkter till höger om linjen $y = x$.



Att linjen $y = x$ är streckad betyder att punkterna på linjen inte tillhör det färgade området.

Exempel 11

Skissera området i xy-planet som uppfyller $2 \leq 3x + 2y \leq 4$.

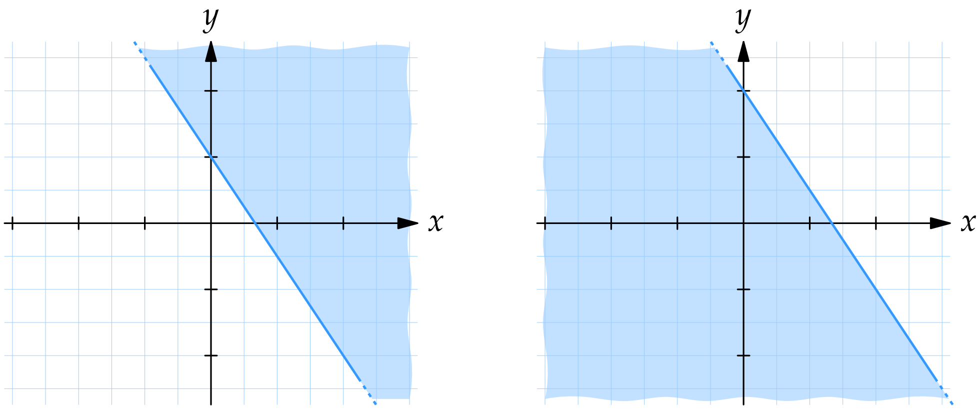
Den dubbla olikheten kan delas upp i två olikheter

$$3x + 2y \geq 2 \quad \text{och} \quad 3x + 2y \leq 4.$$

Flyttar vi över x-termerna till högerledet och delar båda led med 2 får vi

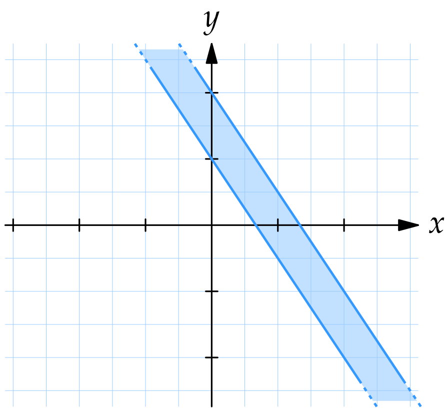
$$y \geq 1 - \frac{3}{2}x \quad \text{och} \quad y \leq 2 - \frac{3}{2}x.$$

De punkter som uppfyller den första olikheten ligger på och ovanför linjen $y = 1 - \frac{3}{2}x$ medan de punkter som uppfyller den andra olikheten ligger på eller under linjen $y = 2 - \frac{3}{2}x$.



Figuren till vänster visar området $3x + 2y \geq 2$ och figuren till höger området $3x + 2y \leq 4$.

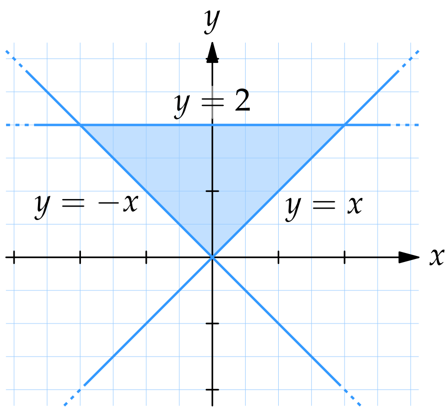
Punkter som uppfyller båda olikheterna tillhör det bandformade område som de färgade områdena ovan har gemensamt.



Figuren visar området $2 \leq 3x + 2y \leq 4$.

Exempel 12

Om vi ritar upp linjerna $y = x$, $y = -x$ och $y = 2$ så begränsar dessa linjer en triangel, i koordinatsystemet.



Vi upptäcker att för att en punkt skall ligga i denna triangel så måste vi sätta en del krav på den.

Vi ser att dess y-koordinat måste vara mindre än 2. Samtidigt ser vi att triangeln nedåt begränsas av $y = 0$. y-koordinaten måste således ligga i intervallet $0 \leq y \leq 2$.

För x-koordinaten blir det lite mer komplicerat. Vi ser att x-koordinaten måste ligga ovanför linjerna $y = -x$ och $y = x$. Vi ser att detta är uppfyllt då $-y \leq x \leq y$. Eftersom vi redan har begränsningar för y-koordinaten så ser vi att x inte kan vara större än 2 eller mindre än -2 automatiskt.

Vi ser att basen i triangeln blir 4 längdenheter och höjden 2 längdenheter.

Arean av denna triangel blir alltså $4 \cdot 2/2 = 4$ areaenheter.

Råd för inläsning

Grund- och slutprov

Efter att du har läst texten och arbetat med övningarna ska du göra grund- och slutprovet för att bli godkänd på detta avsnitt. Du hittar länken till proven i din student lounge.

Tänk på att...

Rita egna figurer när du löser geometriska problem och att vara noggrann när du ritar! En bra figur kan vara halva lösningen, men en dålig figur kan lura en.

Lästips

För dig som vill fördjupa dig ytterligare eller behöver en längre förklaring vill vi tipsa om:

- Läs mer om räta linjens ekvation i Bruno Kevius matematiska ordlista (`http://matmin.kevius.com/linje.html`)

Länktips

- Experimentera med räta linjens ekvation (`http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Calculus/StraightLine.shtml`)
- Experimentera med Arkimedes triangel och andragradskurvor (`http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/ArchimedesTriangle.shtml`)

2.2 Övningar

Övning 2.2:1

Lös ekvationerna

a) $x-2=-1$

b) $2x+1=13$

c) $\frac{1}{3}x-1=x$

d) $5x+7=2x-6$

Övning 2.2:2

Lös ekvationerna

a) $\dfrac{5x}{6}-\dfrac{x+2}{9}=\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{8x+3}{7}-\dfrac{5x-7}{4}=2$

c) $(x+3)^2-(x-5)^2=6x+4$

d) $(x^2+4x+1)^2+3x^4-2x^2=(2x^2+2x+3)^2$

Övning 2.2:3

Lös ekvationerna

a) $\dfrac{x+3}{x-3}-\dfrac{x+5}{x-2}=0$

b) $\dfrac{4x}{4x-7}-\dfrac{1}{2x-3}=1$

c) $\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)(x^2+\frac{1}{2})=\dfrac{6x-1}{3x-3}$

d) $\left(\dfrac{2}{x}-3\right)\left(\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{2}\right)-\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{2}{3}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{3}\right)=0$

Övning 2.2:4

a) Skriv ekvationen för linjen $y=2x+3$ på formen $ax+by=c$.

b) Skriv ekvationen för linjen $3x+4y-5=0$ på formen $y=kx+m$.

Övning 2.2:5

a) Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkterna $(2,3)$ och $(3,0)$.

b) Bestäm ekvationen för den räta linje som har riktningskoefficient -3 och går genom punkten $(1,-2)$.

c) Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkten $(-1,2)$ och är parallell med linjen $y=3x+1$.

d) Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkten $(2,4)$ och är vinkelrät mot linjen $y=2x+5$.

e) Bestäm riktningskoefficienten, k, för den räta linje som skär x-axeln i punkten $(5,0)$ och y-axeln i punkten $(0,-8)$.

Övning 2.2:6

Finn skärningspunkten mellan följande linjer

a) $y = 3x + 5$ och x-axeln

b) $y = -x + 5$ och y-axeln

c) $4x + 5y + 6 = 0$ och y-axeln

d) $x + y + 1 = 0$ och $x = 12$

e) $2x + y - 1 = 0$ och $y - 2x - 2 = 0$

Övning 2.2:7

Skissera grafen till följande funktioner

a) $f(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = 2 - x$

c) $f(x) = 2$

Övning 2.2:8

Rita in i ett xy-plan alla punkter vars koordinater (x, y) uppfyller

a) $y \geq x$

b) $y < 3x - 4$

c) $2x + 3y \leq 6$

Övning 2.2:9

Beräkna arean av den triangel som

a) har hörn i punkterna $(1, 4)$, $(3, 3)$ och $(1, 0)$.

b) begränsas av linjerna $x = 2y$, $y = 4$ och $y = 10 - 2x$.

c) beskrivs av olikheterna $x + y \geq -2$, $2x - y \leq 2$ och $2y - x \leq 2$.

2.3 Andragradsuttryck

Innehåll:

- Kvadratkomplettering
- Andragradsekvationer
- Faktorisering
- Parabler

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Kvadratkomplettera andragradsuttryck.
- Lösa andragradsekvationer med kvadratkomplettering (ej färdig formel) och veta hur man kontrollerar svaret.
- Faktorisera andragradsuttryck (när det är möjligt).
- Direkt lösa faktoriserade eller nästan faktoriserade andragradsekvationer.
- Bestämma det minsta/största värde ett andragradsuttryck antar.
- Skissera parabler genom kvadratkomplettering.

Andragradsekvationer

En andragradsekvation är en ekvation som kan skrivas som

$$x^2 + px + q = 0$$

där x är den obekanta och p och q är konstanter.

Enklare typer av andragradsekvationer kan vi lösa direkt genom rotutdragning.

Ekvationen $x^2 = a$ där a är ett positivt tal har två lösningar (rötter) $x = \sqrt{a}$ och $x = -\sqrt{a}$.

Exempel 1

a) $x^2 = 4$ har rötterna $x = \sqrt{4} = 2$ och $x = -\sqrt{4} = -2$.

b) $2x^2 = 18$ skrivs om till $x^2 = 9$ och har rötterna $x = \sqrt{9} = 3$ och $x = -\sqrt{9} = -3$.

c) $3x^2 - 15 = 0$ kan skrivas som $x^2 = 5$ och har rötterna $x = \sqrt{5} \approx 2{,}236$ och $x = -\sqrt{5} \approx -2{,}236$.

d) $9x^2 + 25 = 0$ saknar lösningar eftersom vänsterledet kommer alltid att vara större än eller lika med 25 oavsett hur x väljs (kvadraten x^2 är alltid större än eller lika med noll).

Exempel 2

a) Lös ekvationen $(x-1)^2 = 16$.

Genom att betrakta $x - 1$ som obekant ger rotutdragning att ekvationen har två lösningar:

- $x - 1 = \sqrt{16} = 4$ vilket ger att $x = 1 + 4 = 5$,
- $x - 1 = -\sqrt{16} = -4$ vilket ger att $x = 1 - 4 = -3$.

b) Lös ekvationen $2(x+1)^2 - 8 = 0$.

Flytta över termen 8 till högerledet och dela båda led med 2,

$$(x+1)^2 = 4.$$

Rotutdragning ger att:

- $x + 1 = \sqrt{4} = 2$, dvs. $x = -1 + 2 = 1$,
- $x + 1 = -\sqrt{4} = -2$, dvs. $x = -1 - 2 = -3$.

För att lösa allmänna andragradsekvationer använder vi en teknik som kallas kvadratkomplettering.

Om vi betraktar kvadreringsregeln

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

och subtraherar a^2 från båda led så får vi

Kvadratkomplettering:

$$x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$$

Exempel 3

a) Lös ekvationen $x^2 + 2x - 8 = 0$.

De två termerna $x^2 + 2x$ kvadratkompletteras (använd $a = 1$ i formeln)

$$\underline{x^2 + 2x} - 8 = \underline{(x+1)^2 - 1^2} - 8 = (x+1)^2 - 9,$$

där understrykningen visar vilka termer som är inblandade i kvadratkompletteringen. Ekvationen kan därför skrivas som

$$(x+1)^2 - 9 = 0,$$

vilken vi löser med rotutdragning

- $x + 1 = \sqrt{9} = 3$ och därmed $x = -1 + 3 = 2$,
- $x + 1 = -\sqrt{9} = -3$ och därmed $x = -1 - 3 = -4$.

b) Lös ekvationen $2x^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0$.

Dividera båda led med 2

$$x^2 - x - \tfrac{3}{4} = 0.$$

Vänsterledet kvadratkompletteras (använd $a = -\frac{1}{2}$)

$$\underline{x^2 - x} - \tfrac{3}{4} = \underline{\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} - \tfrac{3}{4} = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 1$$

och detta ger oss ekvationen

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0.$$

Rotutdragning ger att

- $x - \frac{1}{2} = \sqrt{1} = 1$, dvs. $x = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$,
- $x - \frac{1}{2} = -\sqrt{1} = -1$, dvs. $x = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

Tips!

Tänk på att man alltid kan pröva lösningar till en ekvation genom att sätta in värdet och se om ekvationen blir uppfylld. Man gör detta för att upptäcka eventuella slarvfel. För exempel 3a ovan har vi två fall att pröva. Vi kallar vänster- och högerleden för VL respektive HL:

- $x = 2$ medför att $\text{VL} = 2^2 + 2 \cdot 2 - 8 = 4 + 4 - 8 = 0 = \text{HL}$.
- $x = -4$ medför att $\text{VL} = (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 8 = 16 - 8 - 8 = 0 = \text{HL}$.

I båda fallen kommer vi fram till VL = HL. Ekvationen är alltså uppfylld i båda fallen.

Med kvadratkomplettering går det att visa att den allmänna andragradsekvationen

$$x^2 + px + q = 0$$

har lösningarna

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

förutsatt att uttrycket under rottecknet inte är negativt.

Ibland kan man faktorisera ekvationer och direkt se vilka lösningarna är.

Exempel 4

a) Lös ekvationen $x^2 - 4x = 0$.

I vänsterledet kan vi bryta ut ett x

$$x(x-4) = 0.$$

Ekvationens vänsterled blir noll när någon av faktorerna är noll, vilket ger oss två lösningar

- $x = 0$, eller
- $x - 4 = 0$ dvs. $x = 4$.

Parabler

Funktionerna

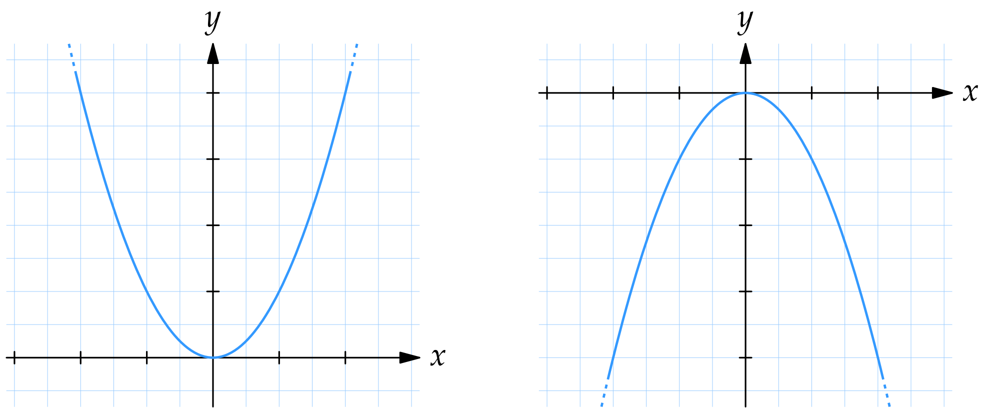
$$y = x^2 - 2x + 5$$
$$y = 4 - 3x^2$$
$$y = \tfrac{1}{5}x^2 + 3x$$

är exempel på andragradsfunktioner. Allmänt kan en andragradsfunktion skrivas som

$$y = ax^2 + bx + c$$

där a, b och c är konstanter och där $a \neq 0$.

Grafen till en andragradsfunktion kallas för en parabel och figurerna visar utseendet för två typexempel $y = x^2$ och $y = -x^2$.



Figuren till vänster visar parabeln $y = x^2$ och figuren till höger parabeln $y = -x^2$.

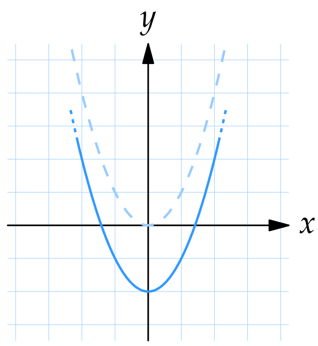
Eftersom uttrycket x^2 är som minst när $x = 0$ har parabeln $y = x^2$ ett minimum när $x = 0$ och parabeln $y = -x^2$ ett maximum för $x = 0$.

Notera också att parablerna ovan är symmetriska kring y-axeln eftersom värdet på x^2 inte beror på vilket tecken x har.

Exempel 5

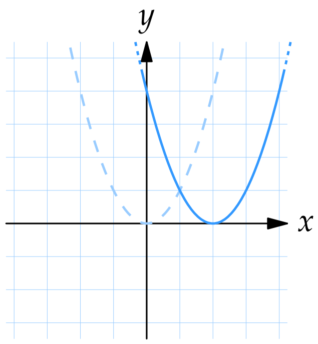
a) Skissera parabeln $y = x^2 - 2$.

Jämfört med parabeln $y = x^2$ har punkter på parabeln ($y = x^2 - 2$) y-värden som är två enheter mindre, dvs. parabeln är förskjuten två enheter neråt i y-led.



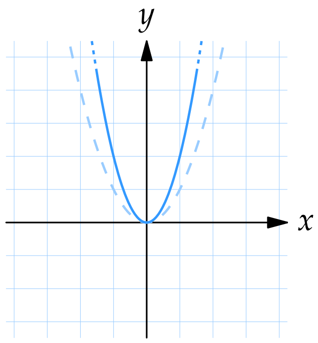
b) Skissera parabeln $y = (x-2)^2$.

På parabeln $y = (x-2)^2$ behöver vi välja x-värden två enheter större jämfört med parabeln $y = x^2$ för att få motsvarande y-värden. Alltså är parabeln $y = (x-2)^2$ förskjuten två enheter åt höger jämfört med $y = x^2$.



c) Skissera parabeln $y = 2x^2$.

Varje punkt på parabeln $y = 2x^2$ har dubbelt så stort y-värde än vad motsvarande punkt med samma x-värde har på parabeln $y = x^2$. Parabeln $y = 2x^2$ är expanderad med faktorn 2 i y-led jämfört med $y = x^2$.



Med kvadratkomplettering kan vi behandla alla typer av parabler.

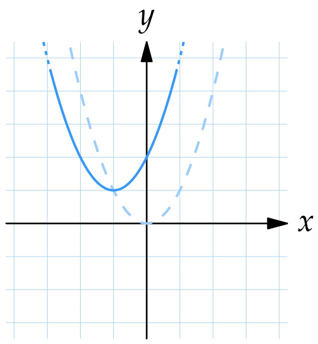
Exempel 6

Skissera parabeln $y = x^2 + 2x + 2$.

Om högerledet kvadratkompletteras

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 - 1^2 + 2 = (x+1)^2 + 1$$

så ser vi från det resulterande uttrycket $y = (x+1)^2 + 1$ att parabeln är förskjuten en enhet åt vänster i x-led jämfört med $y = x^2$ (eftersom det står $(x+1)^2$ istället för x^2) och en enhet uppåt i y-led.



Exempel 7

Bestäm var parabeln $y = x^2 - 4x + 3$ skär x-axeln.

En punkt ligger på x-axeln om dess y-koordinat är noll, och de punkter på parabeln som har $y = 0$ har en x-koordinat som uppfyller ekvationen

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Vänsterledet kvadratkompletteras

$$x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 2^2 + 3 = (x-2)^2 - 1$$

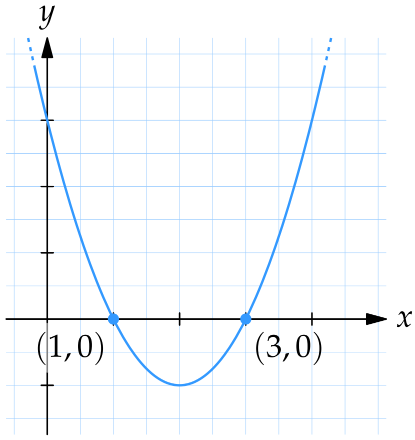
och detta ger ekvationen

$$(x-2)^2 = 1.$$

Efter rotutdragning får vi lösningarna

- $x - 2 = \sqrt{1} = 1, \quad \text{dvs.} \quad x = 2 + 1 = 3,$
- $x - 2 = -\sqrt{1} = -1, \quad \text{dvs.} \quad x = 2 - 1 = 1.$

Parabeln skär x-axeln i punkterna $(1,0)$ och $(3,0)$.



Exempel 8

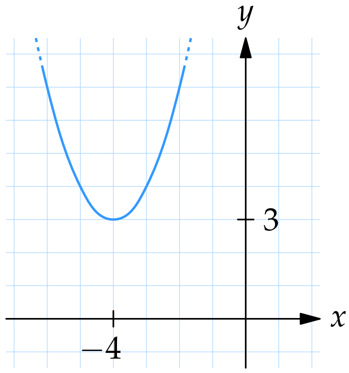
Bestäm det minsta värde som uttrycket $x^2 + 8x + 19$ antar.

Vi kvadratkompletterar

$$x^2 + 8x + 19 = (x+4)^2 - 4^2 + 19 = (x+4)^2 + 3$$

och då ser vi att uttrycket blir som minst lika med 3 eftersom kvadraten $(x+4)^2$ alltid är större än eller lika med 0 oavsett vad x är.

I figuren till höger ser vi att hela parabeln $y = x^2 + 8x + 19$ ligger ovanför x-axeln och har ett minimumvärde 3 när $x = -4$.



Råd för inläsning

Grund- och slutprov
Efter att du har läst texten och arbetat med övningarna ska du göra grund- och slutprovet för att bli godkänd på detta avsnitt. Du hittar länken till proven i din student lounge.

Tänk på att:
Lägg ner mycket tid på algebra! Algebra är matematikens alfabet. När du väl har förstått algebra, kommer din förståelse av statistik, yta, volym och geometri vara mycket större.

Lästips
För dig som vill fördjupa dig ytterligare eller skulle vilja ha en längre förklaring

- Läs mer om andragradsekvationer på engelska Wikipedia
(`http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_equation`)
- Läs mer om andragradsekvationer i MathWorld
(`http://mathworld.wolfram.com/QuadraticEquation.html`)
- 101 uses of a quadratic equation — by Chris Budd and Chris Sangwin
(`http://plus.maths.org/issue29/features/quadratic/index-gifd.html`)

2.3 Övningar

Övning 2.3:1

Kvadratkomplettera följande uttryck

a) $x^2 - 2x$ b) $x^2 + 2x - 1$ c) $5 + 2x - x^2$ d) $x^2 + 5x + 3$

Övning 2.3:2

Lös följande andragradsekvationer med kvadratkomplettering

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ b) $y^2 + 2y - 15 = 0$ c) $y^2 + 3y + 4 = 0$

d) $4x^2 - 28x + 13 = 0$ e) $5x^2 + 2x - 3 = 0$ f) $3x^2 - 10x + 8 = 0$

Övning 2.3:3

Lös följande ekvationer direkt

a) $x(x+3) = 0$ b) $(x-3)(x+5) = 0$

c) $5(3x-2)(x+8) = 0$ d) $x(x+3) - x(2x-9) = 0$

e) $(x+3)(x-1) - (x+3)(2x-9) = 0$ f) $x(x^2 - 2x) + x(2-x) = 0$

Övning 2.3:4

Bestäm en andragradsekvation som har rötterna

a) -1 och 2

b) $1 + \sqrt{3}$ och $1 - \sqrt{3}$

c) 3 och $\sqrt{3}$

Övning 2.3:5

a) Bestäm en andragradsekvation som bara har -7 som rot.

b) Bestäm ett värde på x som gör att uttrycket $4x^2 - 28x + 48$ är negativt.

c) Ekvationen $x^2 + 4x + b = 0$ har en rot $x = 1$. Bestäm värdet på konstanten b.

Övning 2.3:6

Bestäm det minsta värde som följande polynom antar

a) $x^2 - 2x + 1$ b) $x^2 - 4x + 2$ c) $x^2 - 5x + 7$

Övning 2.3:7

Bestäm det största värde som följande polynom antar

a) $1 - x^2$ b) $-x^2 + 3x - 4$ c) $x^2 + x + 1$

Övning 2.3:8

Skissera grafen till följande funktioner

a) $f(x) = x^2 + 1$ b) $f(x) = (x-1)^2 + 2$ c) $f(x) = x^2 - 6x + 11$

Övning 2.3:9

Hitta alla skärningspunkter mellan x-axeln och kurvan

a) $y = x^2 - 1$ b) $y = x^2 - 5x + 6$ c) $y = 3x^2 - 12x + 9$

Övning 2.3:10

Rita in i ett xy-plan alla punkter vars koordinater (x, y) uppfyller

a) $y \geq x^2$ och $y \leq 1$ b) $y \leq 1 - x^2$ och $x \geq 2y - 3$

c) $1 \geq x \geq y^2$ d) $x^2 \leq y \leq x$

3.1 Rötter

Innehåll:

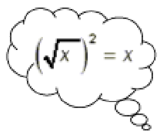
- Kvadratrot och n:te rot
- Rotlagar

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Skriva om ett rotuttryck i potensform.
- Beräkna kvadratroten ur några enkla heltal.
- Kvadratroten ur ett negativt tal inte är definierad.
- Kvadratroten ur ett tal betecknar den positiva roten.
- Hantera rotlagarna i förenkling av rotuttryck.
- Veta när rotlagarna är giltiga (icke-negativa radikander).
- Förenkla rotuttryck med kvadratrötter i nämnaren.
- Veta när n:te roten ur ett negativt tal är definierad (n udda).

Kvadratrötter



Symbolen $\sqrt{a}$, kvadratroten ur a, används som bekant för att beteckna det tal som multiplicerat med sig självt blir a. Man måste dock vara lite mer exakt när man definierar denna symbol.

Ekvationen $x^2 = 4$ har två lösningar $x = 2$ och $x = -2$, eftersom såväl $2 \cdot 2 = 4$ som $(-2) \cdot (-2) = 4$. Man skulle då kunna tro att $\sqrt{4}$ kan vara vilken som helst av -2 och 2, dvs. $\sqrt{4} = \pm 2$, men $\sqrt{4}$ betecknar **bara** det positiva talet 2.

Kvadratroten $\sqrt{a}$ betecknar det **icke-negativa tal** som multiplicerat med sig självt blir a, dvs. den icke-negativa lösningen till ekvationen $x^2 = a$.

Kvadratroten ur a kan även skrivas $a^{1/2}$.

Det är därför fel att påstå att $\sqrt{4} = \pm 2$, men korrekt att säga att ekvationen $x^2 = 4$ har lösningarna $x = \pm 2$.

Exempel 1

a) $\sqrt{0} = 0$ eftersom $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ och 0 är inte negativ.

b) $\sqrt{100} = 10$ eftersom $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$ och 10 är ett positivt tal.

c) $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ eftersom $0{,}5^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ och 0,5 är positiv.

d) $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ eftersom $1{,}4142 \cdot 1{,}4142 \approx 2$ och 1,4142 är positiv.

e) Ekvationen $x^2 = 2$ har lösningarna $x = \sqrt{2} \approx 1{,}414$ och $x = -\sqrt{2} \approx -1{,}414$.

f) $\sqrt{-4}$ är inte definierad, eftersom det inte finns något reellt tal x som uppfyller $x^2 = -4$.

g) $\sqrt{(-7)^2} = 7$ eftersom $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{(-7) \cdot (-7)} = \sqrt{49} = \sqrt{7 \cdot 7} = 7$.

När man räknar med kvadratrötter kan det vara bra att känna till några räkneregler. Eftersom $\sqrt{a} = a^{1/2}$ kan vi överföra potenslagarna till ”rotlagar”. Vi har t.ex. att

$$\sqrt{9 \cdot 4} = (9 \cdot 4)^{1/2} = 9^{1/2} \cdot 4^{1/2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4}.$$

På detta sätt kan vi få fram följande räkneregler för kvadratrötter, som gäller för alla reella tal $a, b \geq 0$:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$

(Vi måste dock vid divisionen ovan som vanligt förutsätta att b inte är 0.)

Exempel 2

a) $\sqrt{64 \cdot 81} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{81} = 8 \cdot 9 = 72$

b) $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$

c) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6$

d) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

e) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Observera att räknereglerna ovan förutsätter att a och $b \geq 0$. Om a och b är negativa (< 0) så är inte $\sqrt{a}$ och $\sqrt{b}$ definierade som reella tal. Man skulle t.ex. kunna frestas att skriva

$$-1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

men ser då att något inte stämmer. Anledningen är att $\sqrt{-1}$ inte är ett reellt tal, vilket alltså gör att räknereglerna ovan inte får användas.

Högre ordningars rötter

Kubikroten ur ett tal a definieras som det tal som multiplicerat med sig självt tre gånger ger a, och betecknas $\sqrt[3]{a}$.

Exempel 3

a) $\sqrt[3]{8} = 2$ eftersom $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

b) $\sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$ eftersom $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}027$.

c) $\sqrt[3]{-8} = -2$ eftersom $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Notera att, till skillnad från kvadratrötter, är kubikrötter även definierade för negativa tal.

Det går sedan att för positiva heltal n definiera n:te roten ur ett tal a som

- om n är jämn och $a \geq 0$ är $\sqrt[n]{a}$ det icke-negativa tal som multiplicerat med sig självt n gånger blir a,
- om n är udda så är $\sqrt[n]{a}$ det tal som multiplicerat med sig självt n gånger blir a.

Roten $\sqrt[n]{a}$ kan även skrivas som $a^{1/n}$.

Exempel 4

a) $\sqrt[4]{625} = 5$ eftersom $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

b) $\sqrt[5]{-243} = -3$ eftersom $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$.

c) $\sqrt[6]{-17}$ är inte definierad eftersom 6 är jämn och -17 är ett negativt tal.

För n:te rötter gäller samma räkneregler som för kvadratrötter om a, $b \geq 0$. Observera att om n är udda gäller de även för negativa a och b, dvs. för alla reella tal a och b.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

Förenkling av rotuttryck

Ofta kan man genom att använda räknereglerna för rötter förenkla rotuttryck väsentligt. Liksom vid potensräkning handlar det ofta om att bryta ner uttryck i så ”små” rötter som möjligt. Exempelvis gör man gärna omskrivningen

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

eftersom man då kan förenkla t.ex.

$$\frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Genom att skriva rotuttryck i termer av ”små” rötter kan man också addera rötter av ”samma sort”, t.ex.

$$\sqrt{8} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2+1)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Exempel 5

a) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{2 \cdot 4}}{\sqrt{2 \cdot 9}} = \dfrac{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2}}{\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3}} = \dfrac{\sqrt{2 \cdot 2^2}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2}{3}$

b) $$\frac{\sqrt{72}}{6} = \frac{\sqrt{8\cdot 9}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 2}}{2\cdot 3} = \frac{2\cdot 3\sqrt{2}}{2\cdot 3} = \sqrt{2}$$

c) $$\begin{aligned}\sqrt{45}+\sqrt{20} &= \sqrt{9\cdot 5}+\sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{3^2\cdot 5}+\sqrt{2^2\cdot 5} = 3\sqrt{5}+2\sqrt{5}\\ &= (3+2)\sqrt{5} = 5\sqrt{5}\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\sqrt{50}+2\sqrt{3}-\sqrt{32}+\sqrt{27} &= \sqrt{5\cdot 10}+2\sqrt{3}-\sqrt{2\cdot 16}+\sqrt{3\cdot 9}\\ &= \sqrt{5\cdot 2\cdot 5}+2\sqrt{3}-\sqrt{2\cdot 4\cdot 4}+\sqrt{3\cdot 3\cdot 3}\\ &= \sqrt{5^2\cdot 2}+2\sqrt{3}-\sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 2}+\sqrt{3\cdot 3^2}\\ &= 5\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\cdot 2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\\ &= (5-4)\sqrt{2}+(2+3)\sqrt{3}\\ &= \sqrt{2}+5\sqrt{3}\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}\frac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{12}} &= \frac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3\cdot 4}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2\cdot 2}}\\ &= \frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

f) $$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2 = 3-2 = 1$$

där vi använt konjugatregeln $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ med $a=\sqrt{3}$ och $b=\sqrt{2}$.

Rationella rotuttryck

När rötter förekommer i ett rationellt uttryck vill man ofta undvika rötter i nämnaren (eftersom det är svårt vid handräkning att dividera med irrationella tal). Genom att förlänga med $\sqrt{2}$ kan man exempelvis göra omskrivningen

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

vilket oftast är att föredra.

I andra fall kan man utnyttja konjugatregeln, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, och förlänga med nämnarens s.k. *konjugerade uttryck*. På så sätt försvinner rottecknen från nämnaren genom kvadreringen, t.ex.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot 1}{(\sqrt{2}\,)^2-1^2} = \frac{\sqrt{3\cdot 2}-\sqrt{3}}{2-1} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{1} = \sqrt{6}-\sqrt{3}.$$

Exempel 6

a) $\dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{15}}{5} = 2\sqrt{15}$

b) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-2} = \dfrac{3(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)} = \dfrac{3\sqrt{2}+6}{(\sqrt{2}\,)^2-2^2} = \dfrac{3\sqrt{2}+6}{2-4} = -\dfrac{3\sqrt{2}+6}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}\,(\sqrt{6}-\sqrt{3}\,)}{(\sqrt{6}+\sqrt{3}\,)(\sqrt{6}-\sqrt{3}\,)} = \dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{6}-\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{(\sqrt{6}\,)^2-(\sqrt{3}\,)^2}$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{2\cdot 3}-\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{6-3} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{3} = \frac{(2-\sqrt{2}\,)\sqrt{3}}{3}$$

Råd för inläsning

Grund- och slutprov
Efter att du har läst texten och arbetat med övningarna ska du göra grund- och slutprovet för att bli godkänd på detta avsnitt. Du hittar länken till proven i din student lounge.

Tänk på att:
Kvadratroten ur ett tal är alltid icke-negativ (dvs. positiv eller lika med noll)!

Rotlagarna är egentligen specialfall av potenslagarna. Exempelvis: $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

Lästips
För dig som vill fördjupa dig ytterligare eller behöver en längre förklaring

- Läs mer om kvadratrötter i engelska Wikipedia
  (`http://en.wikipedia.org/wiki/Root_(mathematics)`)
- Hur vet man att roten ur 2 inte är ett bråktal?
  (`http://www.mathacademy.com/pr/prime/articles/irr2/`)

Länktips

- Hur man finner roten ur ett tal, utan hjälp av miniräknare? (`http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.sqrt.by.hand.html`)

3.1 Övningar

Övning 3.1:1

Skriv i potensform

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{7^5}$ c) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^4$ d) $\sqrt{\sqrt{3}}$

Övning 3.1:2

Förenkla så långt som möjligt

a) $\sqrt{3^2}$ b) $\sqrt{(-3)^2}$ c) $\sqrt{-3^2}$ d) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot 5$

e) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{8}$ f) $\sqrt[3]{8}$ g) $\sqrt[3]{-125}$

Övning 3.1:3

Förenkla så långt som möjligt

a) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$ b) $\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{18}}$

c) $\sqrt{16+\sqrt{16}}$ d) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)$

Övning 3.1:4

Förenkla så långt som möjligt

a) $\sqrt{0{,}16}$ b) $\sqrt[3]{0{,}027}$

c) $\sqrt{50}+4\sqrt{20}-3\sqrt{18}-2\sqrt{80}$ d) $\sqrt{48}+\sqrt{12}+\sqrt{3}-\sqrt{75}$

Övning 3.1:5

Skriv som ett uttryck utan rottecken i nämnaren

a) $\dfrac{2}{\sqrt{12}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}$ c) $\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{17}-\sqrt{13}}$

Övning 3.1:6

Skriv som ett uttryck utan rottecken i nämnaren

a) $\dfrac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{5}-2}$ b) $\dfrac{1}{(\sqrt{3}-2)^2-2}$

c) $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

Övning 3.1:7

Förenkla så långt som möjligt

a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{5\sqrt{7}-7\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{153}-\sqrt{68}$

Övning 3.1:8

Avgör vilket tal som är störst av

a) $\sqrt[3]{5}$ och $\sqrt[3]{6}$

b) $\sqrt{7}$ och 7

c) $\sqrt{7}$ och $2{,}5$

d) $\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{3}\right)^3$ och $\sqrt[3]{2}\cdot 3$

3.2 Rotekvationer

Innehåll:

- Rotekvationer av typen $\sqrt{ax+b} = cx + d$
- Falska rötter

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Lösa enkla rotekvationer med kvadrering.
- Hantera falska rötter och veta när de uppstår.

Rotekvationer

Det finns många olika varianter av rotekvationer, t.ex.

$$\sqrt{x} + 3x = 2,$$
$$\sqrt{x-1} - 2x = x^2,$$
$$\sqrt[3]{x+2} = x.$$

För att lösa rotekvationer vill man bli av med rottecknet. Strategin för att uppnå detta är att skriva ekvationen så att rottecknet blir ensamt kvar på ena sidan av likhetstecknet. Sedan kvadrerar man båda led i ekvationen (om det handlar om en kvadratrot), så att rottecknet försvinner och löser sedan den nya, kvadrerade, ekvationen. När man kvadrerar en ekvation måste man tänka på att de lösningar som man får fram kanske inte är lösningar till den ursprungliga ekvationen. Detta beror på att eventuella minustecken försvinner. Man tappar information när man kvadrerar. Oavsett om man hade något positivt eller negativt så har man alltid något positivt efter en kvadrering. Därför måste man pröva de lösningar som man får fram. Man behöver verifiera att de inte bara är lösningar till den kvadrerade ekvationen, utan också till den ursprungliga ekvationen.

Exempel 1

Minustecken försvinner vid kvadrering. Betrakta en enkel (trivial) ekvation

$$x = 2.$$

Om vi kvadrerar båda led i denna ekvation får vi

$$x^2 = 4.$$

Denna nya ekvation har två lösningar $x = 2$ eller $x = -2$. Lösningen $x = 2$ uppfyller den ursprungliga ekvationen medan $x = -2$ är en lösning som uppstod i den kvadrerade ekvationen.

Exempel 2

Lös ekvationen $2\sqrt{x-1} = 1 - x$.

Tvåan framför rottecknet är en faktor. Vi kan dividera vänster- och högerled med 2, men vi kan också låta tvåan stå kvar. Om vi kvadrerar ekvationen som den är får vi

$$4(x-1) = (1-x)^2$$

och utvecklar vi kvadraten fås

$$4(x-1) = 1 - 2x + x^2.$$

Detta är en andragradsekvation, som kan skrivas

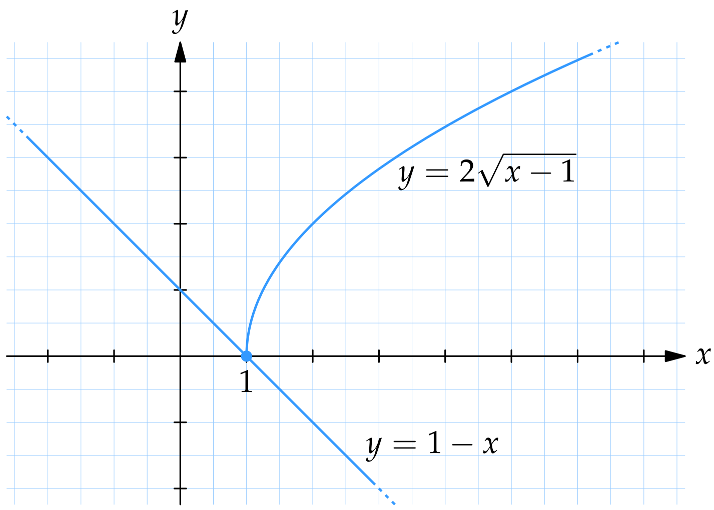
$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Denna kan lösas med kvadratkomplettering eller med den allmänna lösningsformeln. Lösningarna blir $x = 3 \pm 2$, dvs. $x = 1$ eller $x = 5$.

Eftersom vi kvadrerar ekvationen finns risken att detta introducerar falska rötter och därför behöver vi pröva om $x = 1$ och $x = 5$ också är lösningarna till den ursprungliga rotekvationen:

- $x = 1$ medför att $\text{VL} = 2\sqrt{1-1} = 0$ och $\text{HL} = 1 - 1 = 0$. Alltså är $\text{VL} = \text{HL}$ och ekvationen är uppfylld!
- $x = 5$ medför att $\text{VL} = 2\sqrt{5-1} = 2 \cdot 2 = 4$ och $\text{HL} = 1 - 5 = -4$. Alltså är $\text{VL} \neq \text{HL}$ och ekvationen är *inte* uppfylld!

Ekvationen har därmed bara en lösning $x = 1$.



Råd för inläsning

Grund- och slutprov
Efter att du har läst texten och arbetat med övningarna ska du göra grund- och slutprovet för att bli godkänd på detta avsnitt. Du hittar länken till proven i din student lounge.

Tänk på att:
När man kvadrerar en ekvation måste man tänka på att de lösningar som man får fram kanske inte är lösningar till den ursprungliga ekvationen, s. k. **falska rötter**. Detta beror på att eventuella minustecken försvinner. Man tappar information när man kvadrerar. Därför måste man verifiera att de lösningar man får fram, inte bara är lösningar till den kvadrerade ekvationen, utan också är lösningar till den ursprungliga ekvationen.

Du ska alltid pröva lösningarna till rotekvationer.

Lästips
För dig som vill fördjupa dig ytterligare eller skulle vilja ha en längre förklaring

- Understanding Algebra — engelsk bok på nätet för högskoleförberedande studier
(`http://www.jamesbrennan.org/algebra/`)

Länktips

- Vad är roten ur – ? Webmath.com hjälper dig att förenkla rotuttryck (`http://www.webmath.com/simpsqrt.html`)

3.2 Övningar

Övning 3.2:1

Lös ekvationen $\sqrt{x-4} = 6 - x$.

Övning 3.2:2

Lös ekvationen $\sqrt{2x+7} = x + 2$.

Övning 3.2:3

Lös ekvationen $\sqrt{3x-8} + 2 = x$.

Övning 3.2:4

Lös ekvationen $\sqrt{1-x} = 2 - x$.

Övning 3.2:5

Lös ekvationen $\sqrt{3x-2} = 2 - x$.

Övning 3.2:6

Lös ekvationen $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+5} = 4$.

3.3 Logaritmer

Innehåll:

- Logaritmer
- Logaritmlagar

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Känna till begreppen bas och exponent.
- Känna till beteckningarna ln, lg, log och $\log_a$.
- Beräkna enkla logaritmuttryck med hjälp av logaritmens definition.
- Logaritmen är bara definierad för positiva tal.
- Känna till talet e.
- Hantera logaritmlagarna i förenkling av logaritmuttryck.
- Veta när logaritmlagarna är giltiga.
- Uttrycka en logaritm i termer av en logaritm med en annan bas.
- Lösa ekvationer som innehåller exponentialuttryck och som med logaritmering leder till förstagradsekvationer.
- Avgöra vilket av två logaritmuttryck som är störst baserat på jämförelse av bas/argument.

Logaritmer med basen 10

Man använder gärna potenser med basen 10 för att skriva stora och små tal, t.ex.

$$\begin{aligned} 10^3 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000, \\ 10^{-2} &= \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100} = 0{,}01. \end{aligned}$$

Om man enbart betraktar exponenten skulle man i stället kunna säga att

> ”exponenten för 1000 är 3”, eller
> ”exponenten för 0,01 är -2”.

Precis så är *logaritmer* definierade. Man uttrycker sig på följande sätt:

> ”*logaritmen* för 1000 är 3”, vilket skrivs $\lg 1000 = 3$,
> ”*logaritmen* för 0,01 är -2”, vilket skrivs $\lg 0{,}01 = -2$.

Mer allmänt kan man uttrycka sig:

> Logaritmen av ett tal y betecknas med $\lg y$ och är den exponent som ska stå i den färgade rutan i likheten
> $$10^{\boxed{}} = y.$$

Notera här att y måste vara ett positivt tal för att logaritmen $\lg y$ ska vara definerad, eftersom det inte finns någon potens av 10 som blir negativ eller noll.

Exempel 1

a) $\lg 100000 = 5$ eftersom $10^{\boxed{5}} = 100\,000$.

b) $\lg 0{,}0001 = -4$ eftersom $10^{\boxed{-4}} = 0{,}0001$.

c) $\lg \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ eftersom $10^{\boxed{1/2}} = \sqrt{10}$.

d) $\lg 1 = 0$ eftersom $10^{\boxed{0}} = 1$.

e) $\lg 10^{78} = 78$ eftersom $10^{\boxed{78}} = 10^{78}$.

f) $\lg 50 \approx 1{,}699$ eftersom $10^{\boxed{1{,}699}} \approx 50$.

g) $\lg(-10)$ existerar inte eftersom $10^{\boxed{a}}$ aldrig kan bli -10 oavsett hur a väljs.

I det näst sista exemplet kan man snabbt inse att $\lg 50$ måste ligga någonstans mellan 1 och 2 eftersom $10^1 < 50 < 10^2$, men för att få fram ett mer exakt värde på det irrationella talet $\lg 50 = 1{,}69897\ldots$ behövs i praktiken en miniräknare (eller tabell.)

Exempel 2

a) $10^{\lg 100} = 100$

b) $10^{\lg a} = a$

c) $10^{\lg 50} = 50$

Olika baser

Man kan tänka sig logaritmer som använder en annan bas än 10 (utom 1!). Man måste då tydligt ange vilket tal man använder som bas för logaritmen. Använder man t.ex. 2 som bas skriver man $\log_2$ för "2-logaritmen".

Exempel 3

a) $\log_2 8 = 3$ eftersom $2^{3} = 8$.

b) $\log_2 2 = 1$ eftersom $2^{1} = 2$.

c) $\log_2 1024 = 10$ eftersom $2^{10} = 1024$.

d) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ eftersom $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$.

På samma sätt fungerar logaritmer i andra baser.

Exempel 4

a) $\log_3 9 = 2$ eftersom $3^{2} = 9$.

b) $\log_5 125 = 3$ eftersom $5^{3} = 125$.

c) $\log_4 \dfrac{1}{16} = -2$ eftersom $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$.

d) $\log_b \dfrac{1}{\sqrt{b}} = -\dfrac{1}{2}$ eftersom $b^{-1/2} = \dfrac{1}{b^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}}$ (om $b > 0$ och $b \neq 1$).

Om basen 10 används, skriver man sällan $\log_{10}$, utan som vi tidigare sett lg, eller enbart log, vilket förekommer på många miniräknare.

Naturliga logaritmer

I praktiken är det två baser som oftast används för logaritmer, förutom 10 även talet e ($\approx 2{,}71828\ldots$). Logaritmer med basen e kallas *naturliga logaritmer* och skrivs ln i stället för $\log_e$.

Exempel 5

a) $\ln 10 \approx 2{,}3$ eftersom $e^{\boxed{2{,}3}} \approx 10$.

b) $\ln e = 1$ eftersom $e^{\boxed{1}} = e$.

c) $\ln \dfrac{1}{e^3} = -3$ eftersom $e^{\boxed{-3}} = \dfrac{1}{e^3}$.

d) $\ln 1 = 0$ eftersom $e^{\boxed{0}} = 1$.

e) Om $y = e^a$ så är $a = \ln y$.

f) $e^{\boxed{\ln 5}} = 5$

g) $e^{\boxed{\ln x}} = x$

På de flesta mer avancerade miniräknare finns vanligtvis knappar för 10-logaritmer och naturliga logaritmer.

Logaritmlagar

Mellan år 1617 och 1624 publicerade Henry Biggs en logaritmtabell av alla heltal upp till 20 000 och år 1628 utökade Adriaan Vlacq tabellen till alla heltal upp till 100 000. Anledningen till att man lade ned så enormt mycket arbete på sådana tabeller är att man med hjälp av logaritmer kan multiplicera ihop tal bara genom att addera ihop deras logaritmer (addition går mycket snabbare att utföra än multiplikation).

Exempel 6

Beräkna $35 \cdot 54$.

Om vi vet att $35 \approx 10^{1{,}5441}$ och $54 \approx 10^{1{,}7324}$ (dvs. $\lg 35 \approx 1{,}5441$ och $\lg 54 \approx 1{,}7324$) då kan vi räkna ut att

$$35 \cdot 54 \approx 10^{1{,}5441} \cdot 10^{1{,}7324} = 10^{1{,}5441+1{,}7324} = 10^{3{,}2765}$$

och vet vi sedan att $10^{3{,}2765} \approx 1890$ (dvs. $\lg 1890 \approx 3{,}2765$) så har vi lyckats beräkna produkten

$$35 \cdot 54 = 1890$$

och detta bara genom att addera ihop exponenterna 1,5441 och 1,7324.

Detta är ett exempel på en logaritmlag som säger att

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

och som följer av att å ena sidan är

$$a \cdot b = 10^{\log a} \cdot 10^{\log b} = \{\text{potenslagarna}\} = 10^{\log a + \log b}$$

och å andra sidan är

$$a \cdot b = 10^{\log(ab)}.$$

Genom att utnyttja potenslagarna på detta sätt kan vi få fram motsvarande *logaritmlagar*:

$$\begin{aligned}\log(ab) &= \log a + \log b,\\ \log \frac{a}{b} &= \log a - \log b,\\ \log a^b &= b \cdot \log a.\end{aligned}$$

Logaritmlagarna gäller oavsett bas.

Exempel 7

a) $\lg 4 + \lg 7 = \lg(4 \cdot 7) = \lg 28$

b) $\lg 6 - \lg 3 = \lg \frac{6}{3} = \lg 2$

c) $2 \cdot \lg 5 = \lg 5^2 = \lg 25$

d) $\lg 200 = \lg(2 \cdot 100) = \lg 2 + \lg 100 = \lg 2 + 2$

Exempel 8

a) $\lg 9 + \lg 1000 - \lg 3 + \lg 0{,}001 = \lg 9 + 3 - \lg 3 - 3 = \lg 9 - \lg 3 = \lg \frac{9}{3} = \lg 3$

b) $\ln\frac{1}{e}+\ln\sqrt{e}=\ln\Bigl(\frac{1}{e}\cdot\sqrt{e}\,\Bigr)=\ln\Bigl(\frac{1}{(\sqrt{e}\,)^2}\cdot\sqrt{e}\,\Bigr)=\ln\frac{1}{\sqrt{e}}$

$$= \ln e^{-1/2} = -\tfrac{1}{2}\cdot\ln e = -\tfrac{1}{2}\cdot 1 = -\tfrac{1}{2}$$

c)
$$\begin{aligned}\log_2 36-\tfrac{1}{2}\log_2 81 &= \log_2(6\cdot 6)-\tfrac{1}{2}\log_2(9\cdot 9)\\ &= \log_2(2\cdot 2\cdot 3\cdot 3)-\tfrac{1}{2}\log_2(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)\\ &= \log_2(2^2\cdot 3^2)-\tfrac{1}{2}\log_2(3^4)\\ &= \log_2 2^2+\log_2 3^2-\tfrac{1}{2}\log_2 3^4\\ &= 2\log_2 2+2\log_2 3-\tfrac{1}{2}\cdot 4\log_2 3\\ &= 2\cdot 1+2\log_2 3-2\log_2 3 = 2\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\lg a^3-2\lg a+\lg\frac{1}{a} &= 3\lg a-2\lg a+\lg a^{-1}\\ &= (3-2)\lg a+(-1)\lg a=\lg a-\lg a=0\end{aligned}$$

Byte av bas

Ibland kan det vara bra att kunna uttrycka en logaritm som en logaritm av en annan bas.

Exempel 9

a) Uttryck $\lg 5$ i naturliga logaritmen.

Per definition är $\lg 5$ det tal som uppfyller likheten

$$10^{\lg 5}=5.$$

Logaritmera båda led med ln (naturliga logaritmen)

$$\ln 10^{\lg 5}=\ln 5.$$

Med hjälp av logaritmlagen $\ln a^b = b\ln a$ kan vänsterledet skrivas som $\lg 5\cdot \ln 10$ och likheten blir

$$\lg 5\cdot\ln 10=\ln 5.$$

Dela nu båda led med $\ln 10$ så får vi svaret

$$\lg 5=\frac{\ln 5}{\ln 10}\qquad(\approx 0{,}699\,,\quad \text{dvs. } 10^{0{,}699}\approx 5).$$

b) Uttryck 2-logaritmen för 100 i 10-logaritmen lg.

Om vi skriver upp sambandet som definierar $\log_2 100$

$$2^{\log_2 100} = 100$$

och logaritmerar båda led med 10-logaritmen (lg) så får vi att

$$\lg 2^{\log_2 100} = \lg 100.$$

Eftersom $\lg a^b = b \lg a$ så är $\lg 2^{\log_2 100} = \log_2 100 \cdot \lg 2$ och högerledet kan förenklas till $\lg 100 = 2$. Detta ger oss likheten

$$\log_2 100 \cdot \lg 2 = 2.$$

Division med $\lg 2$ ger slutligen att

$$\log_2 100 = \frac{2}{\lg 2} \qquad (\approx 6{,}64\,, \quad \text{dvs. } 2^{6{,}64} \approx 100).$$

Den allmänna formeln för byte från en bas a till en bas b kan härledas på samma sätt

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Vill man byta bas i en potens kan man göra detta med hjälp av logaritmer. Om man exempelvis vill skriva 2^5 med basen 10 så skriver man först om 2 med basen 10,

$$2 = 10^{\lg 2}$$

och utnyttjar sedan en av potenslagarna

$$2^5 = (10^{\lg 2})^5 = 10^{5 \cdot \lg 2} \quad (\approx 10^{1{,}505}\,).$$

Exempel 10

a) Skriv 10^x med basen e.

Först skriver vi 10 som en potens av e,

$$10 = e^{\ln 10}$$

och använder sedan potenslagarna

$$10^x = (e^{\ln 10})^x = e^{\,x \cdot \ln 10} \approx e^{2{,}3x}.$$

b) Skriv e^a med basen 10.

Talet e kan vi skriva som $e = 10^{\lg e}$ och därför är

$$e^a = (10^{\lg e})^a = 10^{a \cdot \lg e} \approx 10^{0{,}434a}.$$

Råd för inläsning

Grund- och slutprov
Efter att du har läst texten och arbetat med övningarna ska du göra grund- och slutprovet för att bli godkänd på detta avsnitt. Du hittar länken till proven i din student lounge.

Tänk på att:
Du kan behöva lägga ner mycket tid på logaritmer.

Logaritmer brukar behandlas översiktligt i gymnasiet. Därför brukar många högskolestudenter stöta på problem när det gäller att räkna med logaritmer.

Lästips
För dig som vill fördjupa dig ytterligare eller behöver en längre förklaring

- Läs mer om logaritmer på engelska Wikipedia (`http://en.wikipedia.org/wiki/Logarithm`)
- Läs mer om Talet e i The MacTutor History of Mathematics archive (`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/e.html`)

Länktips

- Experimentera med logaritmer och potenser (`http://www.ltcconline.net/greenl/java/IntermedCollegeAlgebra/LogGraph/logGraph.html`)
- Spela logaritm Memory (`http://www.ltcconline.net/greenl/java/IntermedCollegeAlgebra/LogConcentration/LogConcentration.htm`)
- Hjälp grodan hoppa till sitt näckrosblad i ”log”-spelet (`http://www.ltcconline.net/greenl/java/IntermedCollegeAlgebra/logger.htm`)

3.3 Övningar

Övning 3.3:1

Bestäm x om

a) $10^x = 1\,000$

b) $10^x = 0{,}1$

c) $\dfrac{1}{10^x} = 100$

d) $\dfrac{1}{10^x} = 0{,}000\,1$

Övning 3.3:2

Beräkna

a) $\lg 0{,}1$

b) $\lg 10\,000$

c) $\lg 0{,}001$

d) $\lg 1$

e) $10^{\lg 2}$

f) $\lg 10^3$

g) $10^{-\lg 0{,}1}$

h) $\lg \dfrac{1}{10^2}$

Övning 3.3:3

Beräkna

a) $\log_2 8$

b) $\log_9 \dfrac{1}{3}$

c) $\log_2 0{,}125$

d) $\log_3 \left(9 \cdot 3^{1/3}\right)$

e) $2^{\log_2 4}$

f) $\log_2 4 + \log_2 \dfrac{1}{16}$

g) $\log_3 12 - \log_3 4$

h) $\log_a \left(a^2 \sqrt{a}\,\right)$

Övning 3.3:4

Förenkla

a) $\lg 50 - \lg 5$

b) $\lg 23 + \lg \dfrac{1}{23}$

c) $\lg 27^{1/3} + \dfrac{\lg 3}{2} + \lg \dfrac{1}{9}$

Övning 3.3:5

Förenkla

a) $\ln e^3 + \ln e^2$

b) $\ln 8 - \ln 4 - \ln 2$

c) $(\ln 1) \cdot e^2$

d) $\ln e - 1$

e) $\ln \dfrac{1}{e^2}$

f) $\left(e^{\ln e}\right)^2$

Övning 3.3:6

Använd miniräknaren till höger för att beräkna med tre decimaler (Knappen `LN` betecknar den naturliga logaritmen i basen e):

a) $\log_3 4$

b) $\lg 46$

c) $\log_3 \log_2 \left(3^{118}\right)$

3.4 Logaritmekvationer

Innehåll:

- Logaritmekvationer
- Exponentialekvationer
- Falska rötter.

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Lösa ekvationer som innehåller logaritm- eller exponentialuttryck och som kan reduceras till första- eller andragradsekvationer.
- Hantera falska rötter och veta när de uppstår.

Grundekvationer

Ekvationer där logaritmer behövs eller är inblandade förekommer i många olika fall. Först ges några exempel där lösningen ges nästan direkt genom definitionen av logaritm, dvs.

$$\begin{aligned} 10^x &= y \quad &\Leftrightarrow \quad x &= \lg y \\ e^x &= y \quad &\Leftrightarrow \quad x &= \ln y \end{aligned}$$

(Vi använder oss här enbart av 10-logaritmer eller naturliga logaritmer.)

Exempel 1

Lös ekvationerna

a) $10^x = 537$ har lösningen $x = \lg 537$.

b) $10^{5x} = 537$ ger att $5x = \lg 537$, dvs. $x = \frac{1}{5} \lg 537$.

c) $\dfrac{3}{e^x} = 5$ Multiplikation av båda led med e^x och division med 5 ger att $\frac{3}{5} = e^x$, vilket betyder att $x = \ln \frac{3}{5}$.

d) $\lg x = 3$ Definitionen ger direkt att $x = 10^3 = 1000$.

e) $\lg(2x-4) = 2$ Från definitionen har vi att $2x - 4 = 10^2 = 100$ och då följer att $x = 52$.

Exempel 2

a) Lös ekvationen $(\sqrt{10}\,)^x = 25$.

Eftersom $\sqrt{10} = 10^{1/2}$ är vänsterledet lika med $(\sqrt{10}\,)^x = (10^{1/2})^x = 10^{x/2}$ och ekvationen lyder

$$10^{x/2} = 25.$$

Denna grundekvation har lösningen $x/2 = \lg 25$, dvs. $x = 2\lg 25$.

b) Lös ekvationen $\dfrac{3\ln 2x}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$.

Multiplicera båda led med 2 och subtrahera sedan 2 från båda led

$$3\ln 2x = -1.$$

Dividera båda led med 3

$$\ln 2x = -\frac{1}{3}.$$

Nu ger definitionen direkt att $2x = e^{-1/3}$, vilket betyder att

$$x = \tfrac{1}{2}\,e^{-1/3} = \frac{1}{2\,e^{1/3}}.$$

I många praktiska tillämpningar rörande exponentiell tillväxt eller avtagande dyker det upp ekvationer av typen

$$a^x = b,$$

där a och b är positiva tal. Dessa ekvationer löses enklast genom att ta logaritmen för båda led

$$\lg a^x = \lg b$$

och använda logaritmlagen för potenser

$$x \cdot \lg a = \lg b$$

vilket ger lösningen $x = \dfrac{\lg b}{\lg a}$.

Exempel 3

a) Lös ekvationen $3^x = 20$.

Logaritmera båda led

$$\lg 3^x = \lg 20.$$

Vänsterledet kan skrivas som $\lg 3^x = x \cdot \lg 3$ och då får vi att

$$x = \frac{\lg 20}{\lg 3} \quad (\approx 2{,}727).$$

b) Lös ekvationen $5000 \cdot 1{,}05^x = 10\,000$.

Dividera båda led med 5000

$$1{,}05^x = \frac{10\,000}{5\,000} = 2.$$

Denna ekvation löser vi genom att logaritmera båda led med lg och skriva om vänsterledet som $\lg 1{,}05^x = x \cdot \lg 1{,}05$,

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}05} \quad (\approx 14{,}2).$$

Exempel 4

a) Lös ekvationen $2^x \cdot 3^x = 5$.

Vänsterledet kan skrivas om med potenslagarna till $2^x \cdot 3^x = (2 \cdot 3)^x$ och ekvationen blir

$$6^x = 5.$$

Denna ekvation löser vi på vanligt sätt med logaritmering och får att

$$x = \frac{\lg 5}{\lg 6} \quad (\approx 0{,}898).$$

b) Lös ekvationen $5^{2x+1} = 3^{5x}$.

Logaritmera båda led och använd logaritmlagen $\lg a^b = b \cdot \lg a$

$$(2x+1)\lg 5 = 5x \cdot \lg 3,$$
$$2x \cdot \lg 5 + \lg 5 = 5x \cdot \lg 3.$$

Samla x i ena ledet

$$\begin{aligned}\lg 5 &= 5x \cdot \lg 3 - 2x \cdot \lg 5,\\ \lg 5 &= x\,(5\lg 3 - 2\lg 5).\end{aligned}$$

Lösningen är

$$x = \frac{\lg 5}{5\lg 3 - 2\lg 5}.$$

Några mer komplicerade ekvationer

Ekvationer som innehåller exponential- eller logaritmuttryck kan ibland behandlas som förstagrads- eller andragradsekvationer genom att betrakta ″$\ln x$″ eller ″e^x″ som obekant.

Exempel 5

Lös ekvationen $\dfrac{6e^x}{3e^x+1} = \dfrac{5}{e^{-x}+2}$.

Multiplicera båda led med $3e^x+1$ och $e^{-x}+2$ för att få bort nämnarna

$$6e^x(e^{-x}+2) = 5(3e^x+1).$$

Notera att eftersom e^x och e^{-x} alltid är positiva oavsett värdet på x så multiplicerar vi alltså ekvationen med faktorer $3e^x+1$ och $e^{-x}+2$ som är skilda från noll, så detta steg riskerar inte att introducera nya (falska) rötter till ekvationen.

Förenkla båda led

$$6 + 12e^x = 15e^x + 5,$$

där vi använt att $e^{-x}\cdot e^x = e^{-x+x} = e^0 = 1$. Betraktar vi nu e^x som obekant är ekvationen väsentligen en förstagradsekvation som har lösningen

$$e^x = \frac{1}{3}.$$

En logaritmering ger sedan svaret

$$x = \ln\frac{1}{3} = \ln 3^{-1} = -1\cdot\ln 3 = -\ln 3.$$

Exempel 6

Lös ekvationen $\dfrac{1}{\ln x} + \ln\dfrac{1}{x} = 1$.

Termen $\ln\dfrac{1}{x}$ kan skrivas som $\ln\dfrac{1}{x} = \ln x^{-1} = -1\cdot\ln x = -\ln x$ och då blir ekvationen

$$\frac{1}{\ln x} - \ln x = 1,$$

där vi kan betrakta $\ln x$ som en ny obekant. Multiplicerar vi båda led med $\ln x$ (som är skild från noll när $x \neq 1$) får vi en andragradsekvation i $\ln x$

$$\begin{gathered} 1-(\ln x)^2 = \ln x, \\ (\ln x)^2 + \ln x - 1 = 0. \end{gathered}$$

Kvadratkomplettering av vänsterledet

$$\begin{aligned} (\ln x)^2 + \ln x - 1 &= \bigl(\ln x + \tfrac{1}{2}\bigr)^2 - \bigl(\tfrac{1}{2}\bigr)^2 - 1 \\ &= \bigl(\ln x + \tfrac{1}{2}\bigr)^2 - \tfrac{5}{4} \end{aligned}$$

följt av rotutdragning ger att

$$\ln x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Detta betyder att ekvationen har två lösningar

$$x = e^{(-1+\sqrt{5})/2} \quad \text{och} \quad x = e^{-(1+\sqrt{5})/2}.$$

Falska rötter

När man löser ekvationer gäller det också att tänka på att argument till logaritmer måste vara positiva och att uttryck av typen $e^{(\cdots)}$ bara kan anta positiva värden. Risken är annars att man får med falska rötter.

Exempel 7

Lös ekvationen $\ln(4x^2 - 2x) = \ln(1-2x)$.

För att ekvationen ska vara uppfylld måste argumenten $4x^2 - 2x$ och $1 - 2x$ vara lika,

$$4x^2 - 2x = 1 - 2x, \tag{$*$}$$

och dessutom positiva. Vi löser ekvationen $(*)$ genom att flytta över alla termer i ena ledet

$$4x^2 - 1 = 0$$

och använder rotutdragning. Detta ger att

$$x = -\tfrac{1}{2} \quad \text{och} \quad x = \tfrac{1}{2}.$$

Vi kontrollerar nu om båda led i $(*)$ är positiva

- Om $x = -\frac{1}{2}$ blir båda led lika med $4x^2 - 2x = 1 - 2x = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 1 = 2 > 0$.
- Om $x = \frac{1}{2}$ blir båda led lika med $4x^2 - 2x = 1 - 2x = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0 \not> 0$.

Alltså har logaritmekvationen bara en lösning $x = -\frac{1}{2}$.

Exempel 8

Lös ekvationen $e^{2x} - e^x = \frac{1}{2}$.

Den första termen kan vi skriva som $e^{2x} = (e^x)^2$. Hela ekvationen är alltså en andragradsekvation med e^x som obekant

$$(e^x)^2 - e^x = \tfrac{1}{2}.$$

Ekvationen kan vara lite enklare att hantera om vi skriver t istället för e^x,

$$t^2 - t = \tfrac{1}{2}.$$

Kvadratkomplettera vänsterledet

$$\begin{aligned} \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 &= \tfrac{1}{2}, \\ \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^2 &= \tfrac{3}{4}, \end{aligned}$$

vilket ger lösningarna

$$t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad t = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Eftersom $\sqrt{3} > 1$ så är $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} < 0$ och det är bara $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ som ger en lösning till den ursprungliga ekvationen eftersom e^x alltid är positiv. Logaritmering ger slutligen att

$$x = \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

är den enda lösningen till ekvationen.

Råd för inläsning

Grund- och slutprov
Efter att du har läst texten och arbetat med övningarna ska du göra grund- och slutprovet för att bli godkänd på detta avsnitt. Du hittar länken till proven i din student lounge.

Tänk på att:
Du kan behöva lägga ner mycket tid på logaritmer.

Logaritmer brukar behandlas översiktligt i gymnasiet. Därför brukar många högskolestudenter stöta på problem när det gäller att räkna med logaritmer.

3.4 Övningar

Övning 3.4:1

Lös ekvationerna

a) $e^x = 13$ b) $13e^x = 2 \cdot 3^{-x}$ c) $3e^x = 7 \cdot 2^x$

Övning 3.4:2

Lös ekvationerna

a) $2^{x^2-2} = 1$ b) $e^{2x} + e^x = 4$ c) $3e^{x^2} = 2^x$

Övning 3.4:3

Lös ekvationerna

a) $2^{-x^2} = 2e^{2x}$ b) $\ln(x^2 + 3x) = \ln(3x^2 - 2x)$

c) $\ln x + \ln(x + 4) = \ln(2x + 3)$

4.1 Vinklar och cirklar

Innehåll:

- Olika vinkelmått (grader, radianer och varv)
- Pythagoras sats
- Avståndsformeln i planet
- Cirkelns ekvation

Lärandemål:

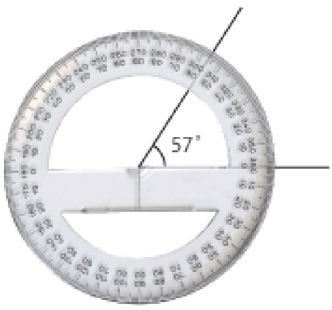
Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Omvandla mellan grader, radianer och varv.
- Beräkna arean och omkretsen av cirkelsektorer.
- Känna till begreppen katet, hypotenusa och rätvinklig triangel.
- Formulera och använda Pythagoras sats.
- Beräkna avståndet mellan två punkter i planet.
- Skissera cirklar med hjälp av att kvadratkomplettera deras ekvationer.
- Känna till begreppen enhetscirkel, tangent, radie, diameter, periferi, korda och cirkelbåge.
- Lösa geometriska problem som innehåller cirklar.

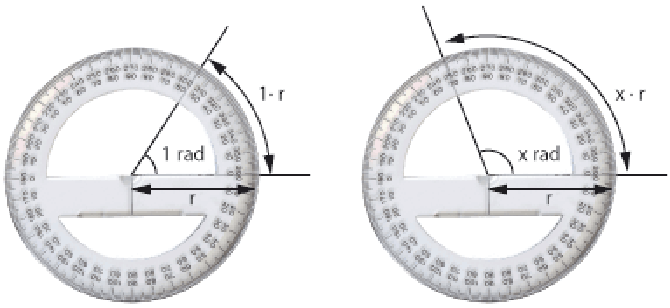
Vinkelmått

Det finns flera olika enheter för att mäta vinklar, som är praktiska i olika sammanhang. De två vanligaste vinkelmåtten i matematiken är grader och radianer.

- **Grader.** Om ett helt varv delas in i 360 delar, så kallas varje del 1 grad. Beteckningen för grader är °.



- **Radianer.** Ett annat sätt att mäta vinklar är att använda längden av vinkelns cirkelbåge i förhållande till radien som mått på vinkeln. Detta vinkelmått kallas för radian. Ett varv är alltså 2π radianer eftersom cirkelns omkrets är $2\pi r$, där r är cirkelns radie.



Ett helt varv är $360°$ eller 2π radianer och det gör att

$$1° = \frac{1}{360} \cdot 2\pi \text{ radianer} = \frac{\pi}{180} \text{ radianer},$$
$$1 \text{ radian} = \frac{1}{2\pi} \cdot 360° = \frac{180°}{\pi}.$$

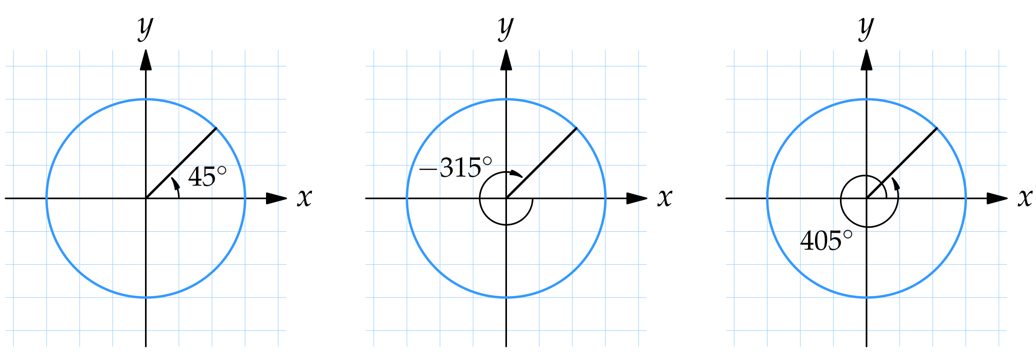
Dessa omvandlingsfaktorer kan användas för att konvertera mellan grader och radianer.

Exempel 1

a) $30° = 30 \cdot 1° = 30 \cdot \dfrac{\pi}{180} \text{ radianer} = \dfrac{\pi}{6} \text{ radianer}$

b) $\dfrac{\pi}{8} \text{ radianer} = \dfrac{\pi}{8} \cdot (1 \text{ radian}) = \dfrac{\pi}{8} \cdot \dfrac{180°}{\pi} = 22{,}5°$

I en del sammanhang kan det vara meningsfullt att tala om negativa vinklar eller vinklar som är större än 360°. Då kan man använda att man kan ange samma riktning med flera olika vinklar som skiljer sig från varandra med ett helt antal varv.



Exempel 2

a) Vinklarna -55° och 665° anger samma riktning eftersom

$$-55^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 665^\circ.$$

b) Vinklarna $\dfrac{3\pi}{7}$ och $-\dfrac{11\pi}{7}$ anger samma riktning eftersom

$$\frac{3\pi}{7} - 2\pi = -\frac{11\pi}{7}.$$

c) Vinklarna 36° och 216° anger inte samma riktning utan motsatta riktningar eftersom

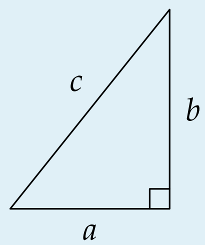
$$36^\circ + 180^\circ = 216^\circ.$$

Avståndsformeln

Pythagoras sats är en av de mest kända satserna i matematiken och säger att i en rätvinklig triangel med kateter a och b, och hypotenusa c gäller att

Pythagoras sats:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



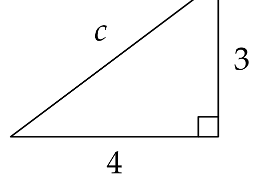
Exempel 3

I triangeln till höger är

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

och därför är hypotenusan c lika med

$$c = \sqrt{25} = 5.$$

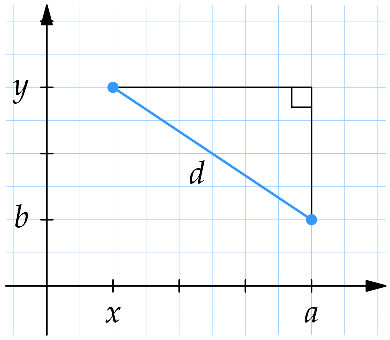


Pythagoras sats kan användas för att beräkna avståndet mellan två punkter i ett koordinatsystem.

Avståndsformeln:
Avståndet d mellan två punkter med koordinater (x, y) och (a, b) är

$$d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Linjestycket mellan punkterna är hypotenusan i en rätvinklig triangel vars kateter är parallella med koordinataxlarna.



Kateternas längd är lika med beloppet av skillnaden i x- och y-led mellan punkterna, dvs. $|x-a|$ respektive $|y-b|$. Pythagoras sats ger sedan avståndsformeln.

Exempel 4

a) Avståndet mellan $(1, 2)$ och $(3, 1)$ är

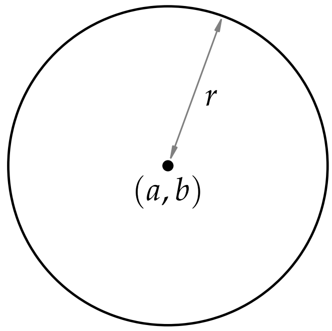
$$d = \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

b) Avståndet mellan $(-1, 0)$ och $(-2, -5)$ är

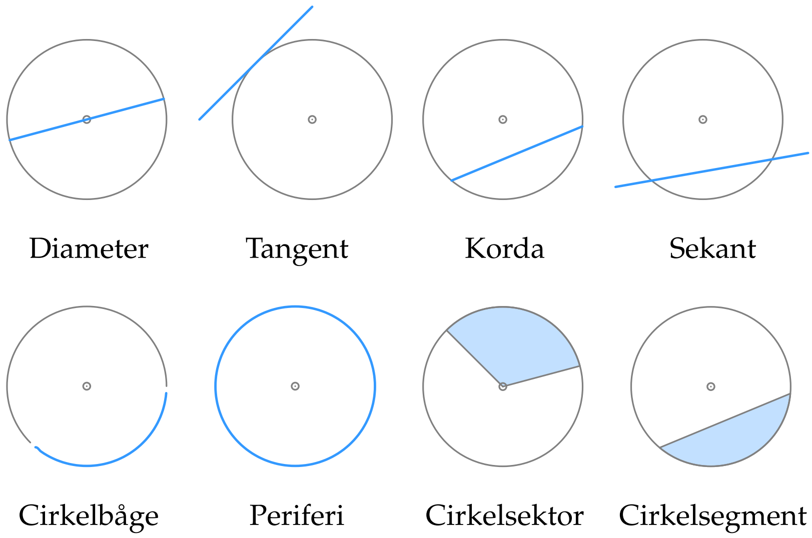
$$d = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (0-(-5))^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}.$$

Cirklar

En cirkel består av alla punkter som befinner sig på ett visst fixt avstånd r från en punkt (a,b).



Avståndet r kallas för cirkelns radie och punkten (a,b) för cirkelns medelpunkt. Figuren nedan visar andra viktiga cirkelbegrepp.



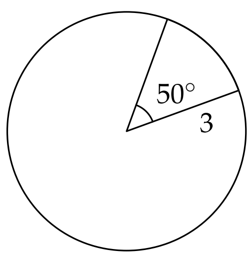
Exempel 5

En cirkelsektor är given i figuren till höger.

a) Bestäm cirkelbågens längd.

Medelpunktsvinkeln 50° blir i radianer

$$50^\circ = 50 \cdot 1^\circ = 50 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radianer} = \frac{5\pi}{18} \text{ radianer.}$$



På det sätt som radianer är definierat betyder detta att cirkelbågens längd är radien multiplicerat med vinkeln mätt i radianer,

$$3 \cdot \frac{5\pi}{18} \text{ l.e.} = \frac{5\pi}{6} \text{ l.e.}$$

b) Bestäm cirkelsektorns area.

Cirkelsektorns andel av hela cirkeln är

$$\frac{50^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{36}$$

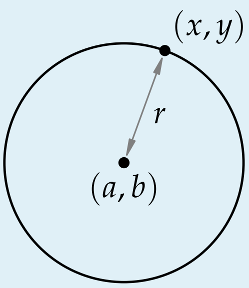
och det betyder att dess area är $\frac{5}{36}$ delar av cirkelns area som är $\pi r^2 = \pi 3^2 = 9\pi$, dvs.

$$\frac{5}{36} \cdot 9\pi \text{ a.e.} = \frac{5\pi}{4} \text{ a.e.}$$

En punkt (x, y) ligger på cirkeln som har medelpunkt i (a, b) och radie r om dess avstånd till medelpunkten är lika med r. Detta villkor kan formuleras med avståndsformeln som

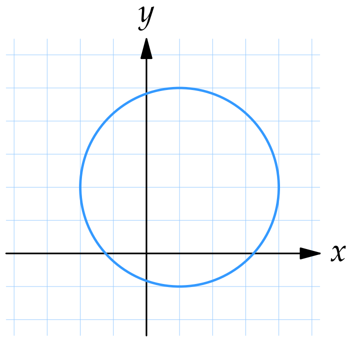
Cirkelns ekvation:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$



Exempel 6

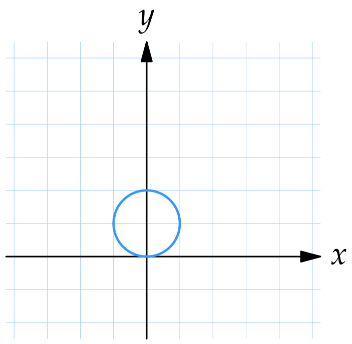
a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ är ekvationen för en cirkel med medelpunkt i $(1, 2)$ och radie $\sqrt{9} = 3$.



b) $x^2 + (y-1)^2 = 1$ kan skrivas som

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 1$$

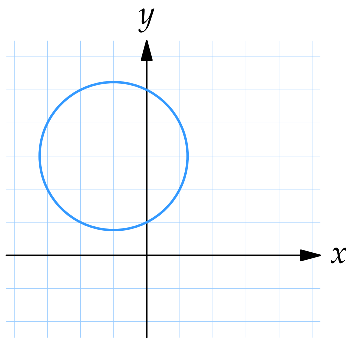
och är ekvationen för en cirkel med medelpunkt i $(0,1)$ och radie $\sqrt{1} = 1$.



c) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$ kan skrivas som

$$(x-(-1))^2 + (y-3)^2 = 5$$

och är ekvationen för en cirkel med medelpunkt i $(-1,3)$ och radie $\sqrt{5} \approx 2{,}236$.



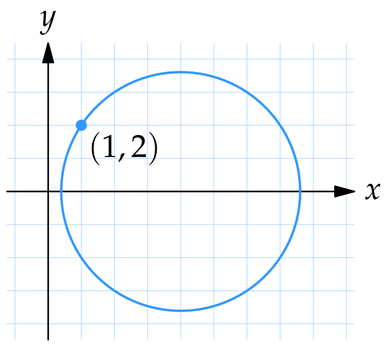
Exempel 7

a) Ligger punkten $(1,2)$ på cirkeln $(x-4)^2 + y^2 = 13$?

Stoppar vi in punktens koordinater $x = 1$ och $y = 2$ i cirkelns ekvation har vi att

$$\text{VL} = (1-4)^2 + 2^2 = (-3)^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13 = \text{HL}.$$

Eftersom punkten uppfyller cirkelns ekvation ligger punken på cirkeln.



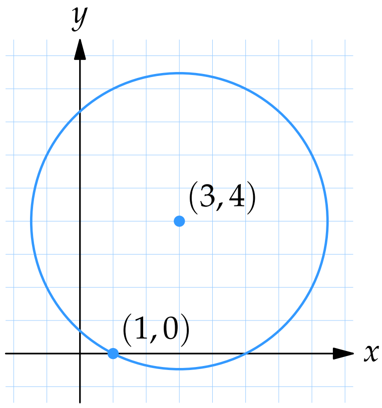
b) Bestäm ekvationen för cirkeln som har medelpunkt i $(3,4)$ och innehåller punkten $(1,0)$.

Eftersom punkten $(1,0)$ ska ligga på cirkeln måste cirkelns radie vara lika med avståndet från $(1,0)$ till medelpunkten $(3,4)$. Avståndsformeln ger att detta avstånd är

$$c = \sqrt{(3-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}.$$

Cirkelns ekvation är därför

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 20\ .$$



Exempel 8

Bestäm medelpunkt och radie för den cirkel vars ekvation är $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

Vi ska försöka skriva om cirkelns ekvation på formen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

för då kan vi direkt avläsa att medelpunken är (a,b) och radien är r.

Börja med att kvadratkomplettera termerna som innehåller x i vänsterledet

$$\underline{x^2 - 2x} + y^2 + 4y + 1 = \underline{(x-1)^2 - 1^2} + y^2 + 4y + 1$$

(de understrukna termerna visar kvadratkompletteringen).

Kvadratkomplettera sedan termerna som innehåller y

$$(x-1)^2 - 1^2 + \underline{y^2 + 4y} + 1 = (x-1)^2 - 1^2 + \underline{(y+2)^2 - 2^2} + 1.$$

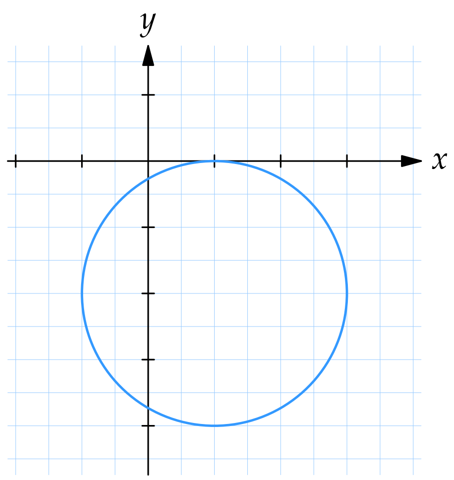
Vänsterledet är alltså lika med

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 4$$

och flyttar vi över 4 till högerledet är cirkelns ekvation

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4.$$

Vi avläser att medelpunkten är $(1, -2)$ och radien är $\sqrt{4} = 2$.



Råd för inläsning

Grund- och slutprov
Efter att du har läst texten och arbetat med övningarna ska du göra grund- och slutprovet för att bli godkänd på detta avsnitt. Du hittar länken till proven i din student lounge.

Lästips
För dig som vill fördjupa dig ytterligare eller behöver en längre förklaring vill vi tipsa om:

- Läs mer om Pythagoras sats på svenska Wikipedia
  (`http://sv.wikipedia.org/wiki/Pythagoras_sats`)
- Läs mer i Mathworld om cirkeln
  (`http://mathworld.wolfram.com/Circle.html`)

Länktips

- Interaktivt experiment: sinus och cosinus i enhetscirkeln] (Flash)
  (`http://www.math.kth.se/online/images/sinus_och_cosinus_i_enhetscirkeln.swf`)

4.1 Övningar

Övning 4.1:1

Skriv i grader och radianer

a) $\frac{1}{4}$ varv b) $\frac{3}{8}$ varv

c) $-\frac{2}{3}$ varv d) $\frac{97}{12}$ varv

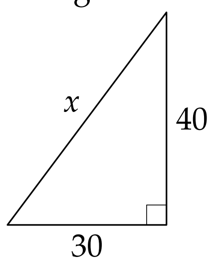
Övning 4.1:2

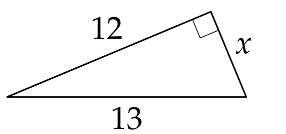
Omvandla till radianer

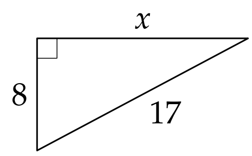
a) 45° b) 135° c) -63° d) 270°

Övning 4.1:3

Bestäm längden av sidan som är markerad med x.

a) 

b) 

c) 

Övning 4.1:4

a) Bestäm avståndet mellan punkterna $(1,1)$ och $(5,4)$.

b) Bestäm avståndet mellan punkterna $(-2,5)$ och $(3,-1)$.

c) Hitta den punkt på x-axeln som ligger lika långt från punkterna $(3,3)$ och $(5,1)$.

Övning 4.1:5

a) Bestäm ekvationen för en cirkel med medelpunkt i $(1,2)$ och radie 2.

b) Bestäm ekvationen för den cirkel som har medelpunkt i $(2,-1)$ och innehåller punkten $(-1,1)$.

Övning 4.1:6

Skissera följande cirklar

a) $x^2+y^2=9$ b) $(x-1)^2+(y-2)^2=3$

c) $(3x-1)^2+(3y+7)^2=10$

Övning 4.1:7

Skissera följande cirklar

a) $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 1$

b) $x^2 + y^2 + 4y = 0$

c) $x^2 - 2x + y^2 + 6y = -3$

d) $x^2 - 2x + y^2 + 2y = -2$

Övning 4.1:8

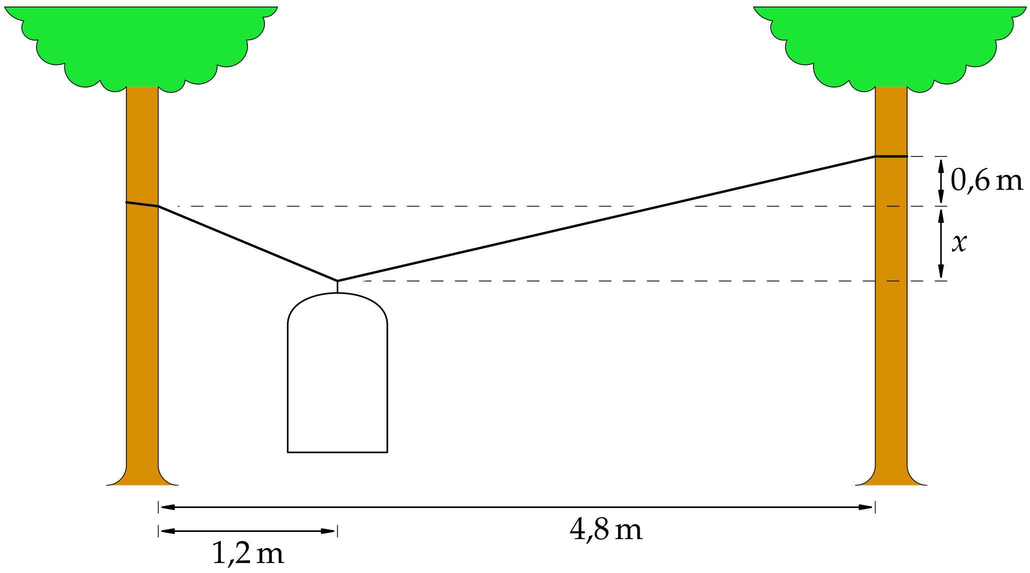
Hur många varv snurrar ett hjul med radie 50 cm när det rullar 10 m?

Övning 4.1:9

På en klocka är sekundvisaren 8 cm lång. Hur stor area sveper den över på 10 sekunder?

Övning 4.1:10

En 5,4 m lång tvättlina hänger mellan två vertikala träd på 4,8 m avstånd från varandra. Linans ena ände är fäst 0,6 m högre än den andra änden, och 1,2 m från trädet där linan har sin lägre infästning hänger en kavaj på en galge. Bestäm hur mycket under den nedre infästningspunkten som galgen hänger (dvs. avståndet x i figuren).



4.2 Trigonometriska funktioner

Innehåll:

- De trigonometriska funktionerna cosinus, sinus och tangens.

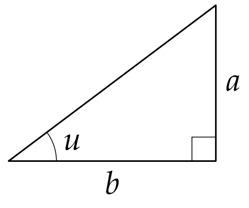
Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Känna till begreppen spetsig, trubbig och rät vinkel.
- Förstå definitionen av cosinus, sinus och tangens i enhetscirkeln.
- Utantill kunna värdena på cosinus, sinus och tangens för standardvinklarna 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ och $\pi/2$.
- Bestämma värdena på cosinus, sinus och tangens för argument som kan reduceras till standardvinklarna i någon kvadrant av enhetscirkeln.
- Skissera graferna till cosinus, sinus och tangens.
- Lösa trigonometriska problem som involverar rätvinkliga trianglar.

Trigonometri i rätvinkliga trianglar

I den rätvinkliga triangeln nedan kallas kvoten mellan den motstående kateten a och den närliggande kateten b för tangens av vinkeln u och betecknas $\tan u$.

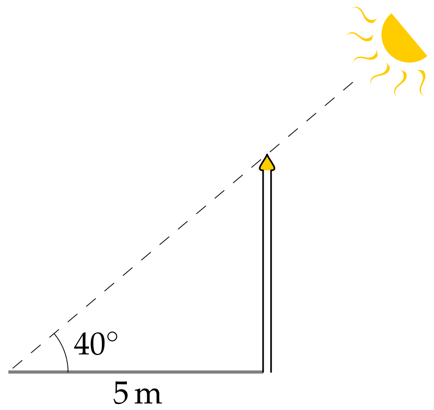


$$\tan u = \frac{a}{b}$$

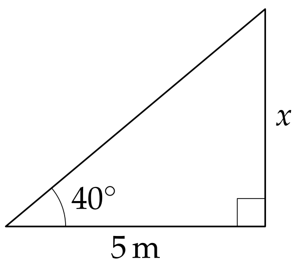
Värdet på kvoten a/b är inte beroende av storleken på triangeln utan bara på vinkeln u. För olika värden på vinkeln kan man få fram motsvarande tangensvärde antingen i en trigonometrisk tabell eller genom att använda en miniräknare (knappen heter ofta tan).

Exempel 1

Hur hög är flaggstången?



Flaggstången och dess skugga bildar tillsammans en rätvinklig triangel där den vertikala kateten är okänd (markerad med x nedan).



Från definitionen av tangens har vi att

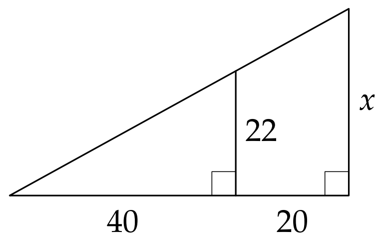
$$\tan 40^\circ = \frac{x}{5\ \mathrm{m}}$$

och eftersom $\tan 40^\circ \approx 0{,}84$ så är

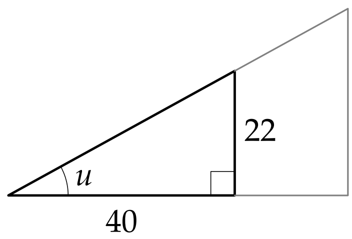
$$x = 5\,\mathrm{m} \cdot \tan 40^\circ \approx 5\,\mathrm{m} \cdot 0{,}84 = 4{,}2\,\mathrm{m}.$$

Exempel 2

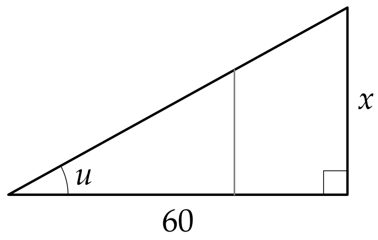
Bestäm längden av sidan markerad med x i figuren.



Om vi kallar vinkeln längst till vänster för u så finns det två sätt att ställa upp ett uttryck för $\tan u$.



$$\tan u = \frac{22}{40}$$



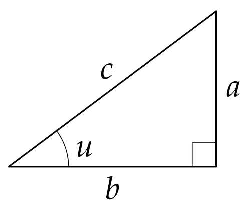
$$\tan u = \frac{x}{60}$$

Sätter vi de två uttrycken för $\tan u$ lika fås

$$\frac{22}{40} = \frac{x}{60}$$

vilket ger att $x = 60 \cdot \dfrac{22}{40} = 33.$

Det finns två andra kvoter i rätvinkliga trianglar som har speciella namn och det är $\cos u = b/c$ (”cosinus av u”) och $\sin u = a/c$ (”sinus av u”).



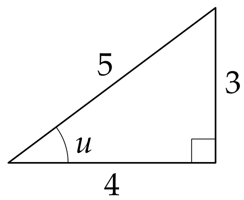
$$\cos u = \frac{b}{c}$$

$$\sin u = \frac{a}{c}$$

Precis som för tangens är kvoterna som definierar cosinus och sinus inte beroende av triangelns storlek utan bara på vinkeln u.

Exempel 3

a)

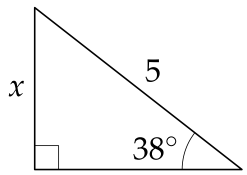


I triangeln till vänster är

$$\cos u = \frac{4}{5}$$

$$\sin u = \frac{3}{5}$$

b)



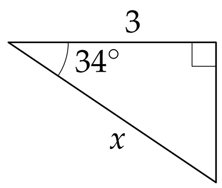
Definitionen av sinus ger att

$$\sin 38^\circ = \frac{x}{5}$$

och vet vi att $\sin 38^\circ \approx 0{,}616$ så får vi att

$$x = 5 \cdot \sin 38^\circ \approx 5 \cdot 0{,}616 \approx 3{,}1.$$

c)



Cosinus är kvoten mellan den närliggande kateten och hypotenusan

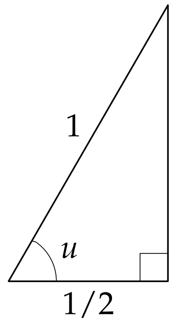
$$\cos 34^\circ = \frac{3}{x}.$$

Alltså är

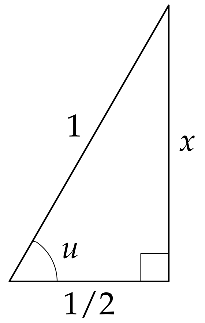
$$x = \frac{3}{\cos 34^\circ}.$$

Exempel 4

Bestäm $\sin u$ i triangeln



Med hjälp av Pythagoras sats kan kateten till höger bestämmas



$$1^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

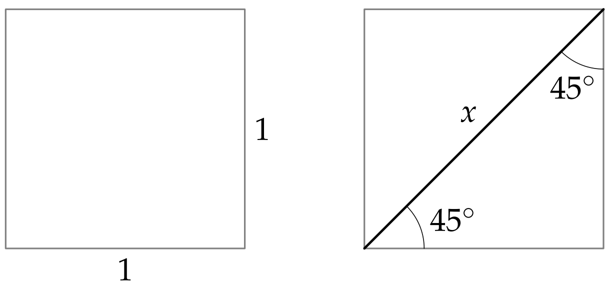
och därför är $\sin u = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Några standardvinklar

För vissa vinklar 30°, 45° och 60° går det relativt enkelt att räkna ut exakta värden på de trigonometriska funktionerna.

Exempel 5

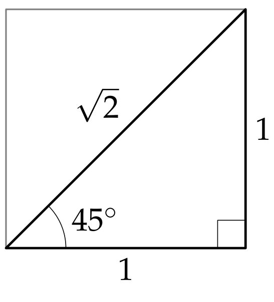
Vi utgår från en kvadrat med sidlängd 1. En diagonal i kvadraten delar de räta vinklarna i motsatta hörn i två lika delar 45°.



Med Pythagoras sats kan vi bestämma diagonalens längd x,

$$x^2 = 1^2 + 1^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

I triangeln som har diagonalen som hypotenusa får vi fram värdet på de trigonometriska funktionerna för vinkeln 45°.



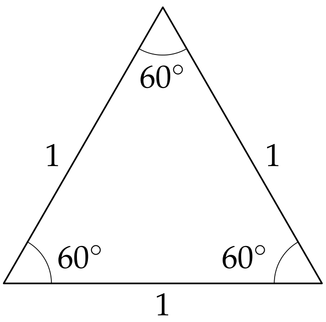
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

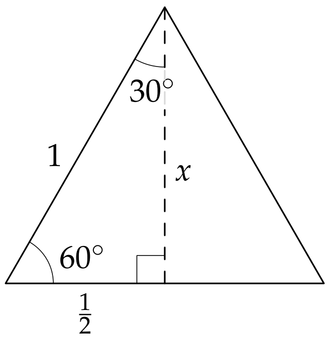
$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

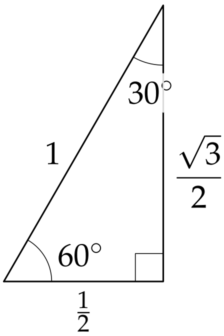
Exempel 6

Betrakta en liksidig triangel där alla sidor har längd 1. Vinklarna i triangeln är alla 60°. Triangeln kan delas upp i två halvor av linjen som delar toppvinkeln mitt itu.





Pythagoras sats ger att den vertikala sidan av en triangelhalva är $x = \sqrt{3}/2$. Från en triangelhalva får vi att



$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos 60^\circ = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

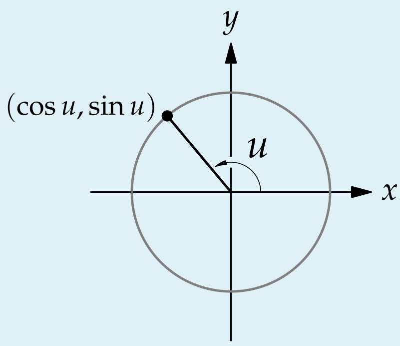
$$\sin 30^\circ = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}; \qquad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

Trigonometriska funktioner för allmänna vinklar

För vinklar som är mindre än 0° eller större än 90° definieras de trigonometriska funktionerna med hjälp av enhetscirkeln (cirkeln som har medelpunkt i origo och radie 1).

De trigonometriska funktionerna $\cos u$ och $\sin u$ är x- respektive y-koordinaterna för skärningspunkten mellan enhetscirkeln och det radiella linjesegmentet som bildar vinkeln u med den positiva x-axeln.



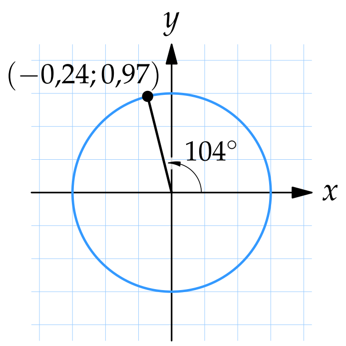
Tangensfunktionen definieras som

$$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$$

och tangensvärdet kan tolkas som riktningskoefficienten för det radiella linjesegmentet.

Exempel 7

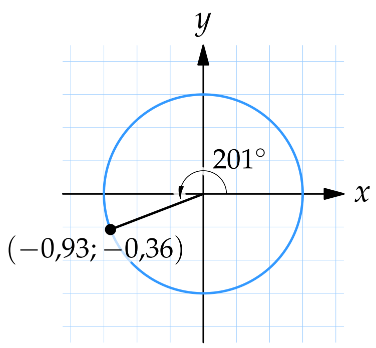
Från figurerna nedan avläser vi värdena på cosinus och sinus.

a) 

$$\cos 104^\circ \approx -0{,}24$$

$$\sin 104^\circ \approx 0{,}97$$

$$\tan 104^\circ \approx \frac{0{,}97}{-0{,}24} \approx -4{,}0$$

b) 

$$\cos 201^\circ \approx -0{,}93$$

$$\sin 201^\circ \approx -0{,}36$$

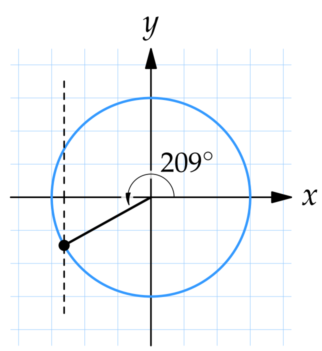
$$\tan 201^\circ \approx \frac{-0{,}36}{-0{,}93} \approx 0{,}4$$

Exempel 8

Vilket tecken har

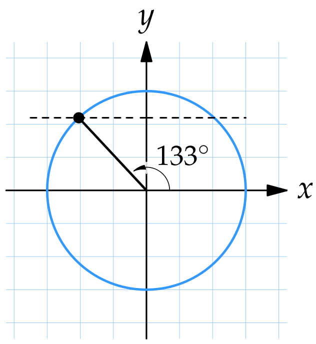
a) $\cos 209^\circ$

Eftersom vinkeln 209° kan skrivas som $209^\circ = 180^\circ + 29^\circ$ så svarar vinkeln mot en punkt på enhetscirkeln som ligger i den tredje kvadranten. Den punkten har en negativ x-koordinat, vilket betyder att $\cos 209^\circ$ är negativ.



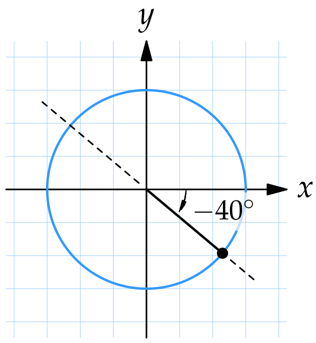
b) $\sin 133^\circ$

Vinkeln 133° är lika med $90^\circ + 43^\circ$ och ger en punkt på enhetscirkeln som ligger i den andra kvadranten. I den kvadranten har punkter positiv y-koordinat och därför är $\sin 133^\circ$ positiv.



c) $\tan(-40^\circ)$

Ritas vinkeln -40° in i enhetscirkeln fås en vinkellinje som har en negativ riktningskoefficient, dvs. $\tan(-40^\circ)$ är negativ.



Exempel 9

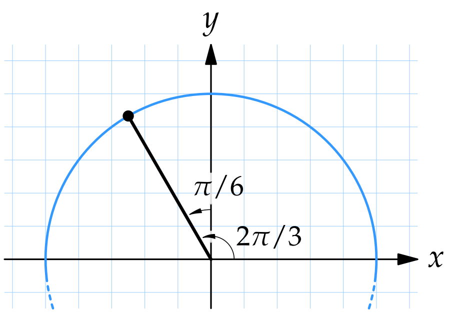
Bestäm $\sin \dfrac{2\pi}{3}$.

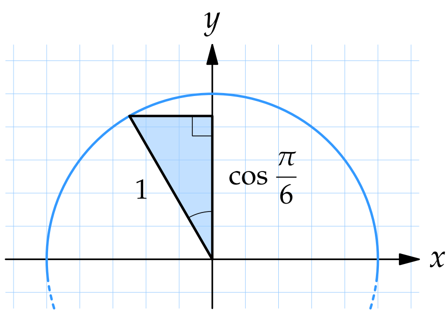
Omskrivningen

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} = \frac{3\pi + \pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

visar att vinkeln $2\pi/3$ hamnar i enhetscirkelns andra kvadrant och bildar vinkeln $\pi/6$ med den positiva y-axeln. Om vi ritar in en hjälptriangel som i figuren nedan till höger så ser vi att $2\pi/3$-punkten på enhetscirkeln har en y-koordinat som är lika med den närliggande kateten $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. Alltså är

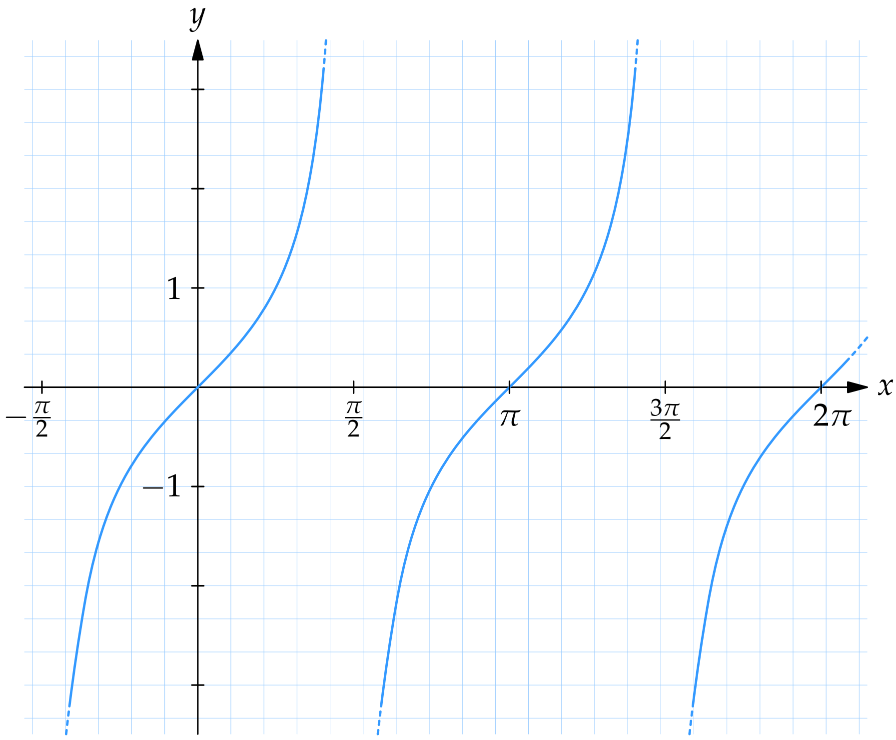
$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



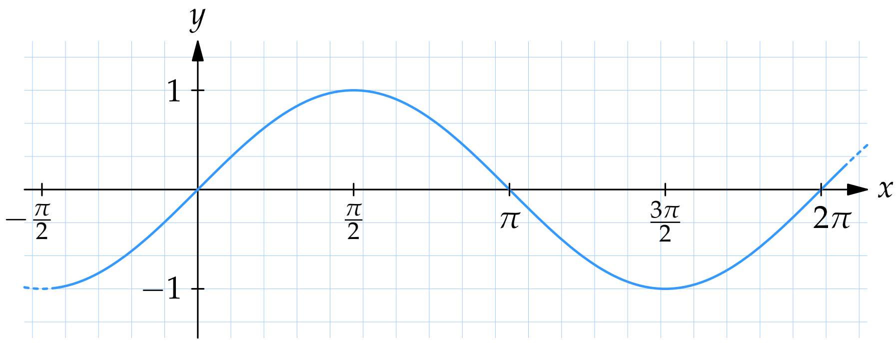


De trigonometriska funktionernas grafer

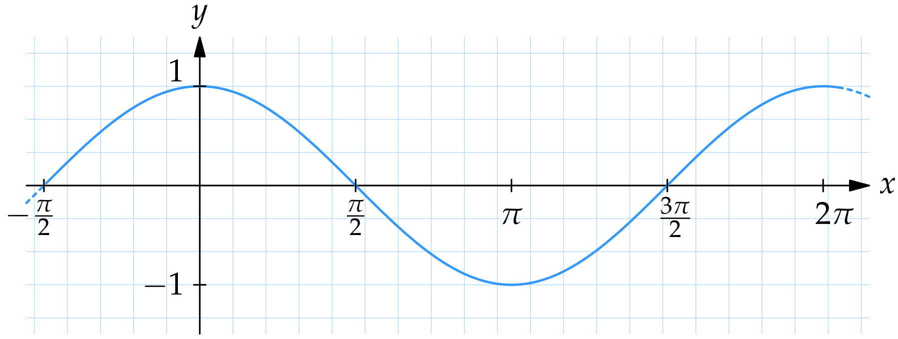
I förra avsnittet använde vi enhetscirkeln för att definiera cosinus och sinus för godtyckliga vinklar och vi kommer använda enhetscirkeln ofta framöver för att t.ex. härleda trigonometriska samband och lösa trigonometriska ekvationer. Det finns dock vissa egenskaper hos de trigonometriska funktionerna som bättre illustreras genom att rita upp deras funktionsgrafer.



Grafen till tangensfunktionen



Grafen till sinusfunktionen



Grafen till cosinusfunktionen

I graferna kan vi observera flera saker kanske tydligare än i enhetscirkeln. Några exempel är:

- Kurvorna för cosinus och sinus upprepar sig efter en vinkeländring på 2π, dvs. det gäller att $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ och $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. I enhetscirkeln motsvarar 2π ett varv och efter ett helt varv återkommer vinklar till samma läge på enhetscirkeln och har därför samma koordinater.

- Kurvan för tangens upprepar sig redan efter en vinkeländring på π, dvs. $\tan(x + \pi) = \tan x$. Två vinklar som skiljer sig åt med π ligger på samma linje genom origo i enhetscirkeln och deras vinkellinjer har därför samma riktningskoefficient.

- Förutom en fasförskjutning på $\pi/2$ är kurvorna för cosinus och sinus identiska, dvs. $\cos x = \sin(x + \pi/2)$; mer om detta i nästa avsnitt.

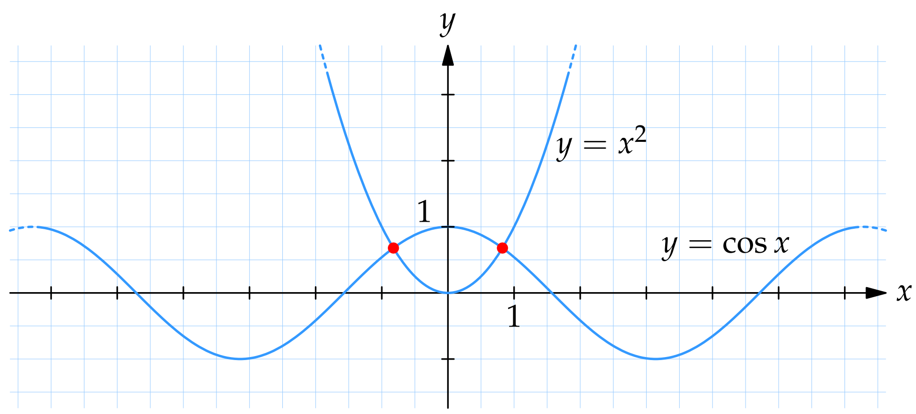
Graferna kan också vara viktiga när man undersöker trigonometriska ekvationer. Med en enkel skiss kan man ofta få en uppfattning om hur många lösningar en ekvation har, och var lösningarna finns.

Exempel 10

Hur många lösningar har ekvationen $\cos x = x^2$? (där x mäts i radianer)

Genom att rita upp graferna $y = \cos x$ och $y = x^2$ ser vi att kurvorna skär varandra i två punkter. Det finns alltså två x-värden för vilka motsvarande y-värden är lika.

Med andra ord har ekvationen två lösningar.



Råd för inläsning

Grund- och slutprov
Efter att du har läst texten och arbetat med övningarna ska du göra grund- och slutprovet för att bli godkänd på detta avsnitt. Du hittar länken till proven i din student lounge.

Tänk på att:
Har du läst trigonometri, så ska du inte vara rädd för att använda den i geometriska problem. Det ger ofta en enklare lösning.

Du kan behöva lägga ner mycket tid på att förstå hur man använder enhetscirkeln för att definiera de trigonometriska funktionerna.

Ta för vana att räkna med exakta trigonometriska värden. Det ger en bra träning på bråkräkning och så småningom i räkning med algebraiska rationella uttryck.

Lästips
För dig som vill fördjupa dig ytterligare eller behöver en längre förklaring vill vi tipsa om:

- Läs mer om trigonometri i Per Edströms ”Interaktiv Matematik” (`http://dooku.miun.se/per.edstrom/interaktiv_matematik/trigonometri/cos_even.html`)
- Läs mer om trigonometri på engelska Wikipedia (`http://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometric_function`)
- Läs mer om enhetscirkeln på engelska Wikipedia (`http://en.wikipedia.org/wiki/Unit_circle`)

Länktips

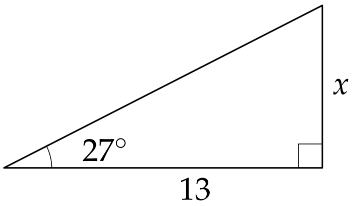
- Experimentera med sinus och cosinus i enhetscirkeln
  (`http://www.math.kth.se/online/images/sinus_och_cosinus_i_enhetscirkeln.swf`)
- Experimentera med Euklidisk geometri
  (`http://www.math.psu.edu/dlittle/java/geometry/euclidean/toolbox.html`)

4.2 Övningar

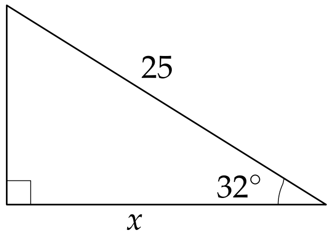
Övning 4.2:1

Bestäm längden av sidan som är markerad med x uttryckt med hjälp av de trigonometriska funktionerna.

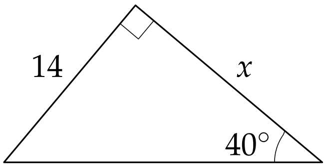
a)



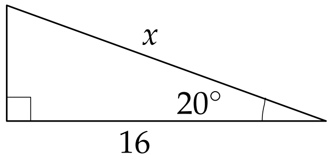
b)



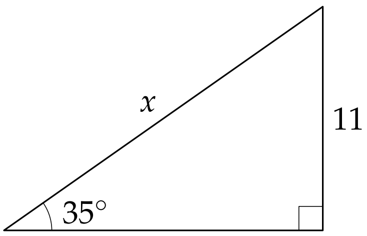
c)



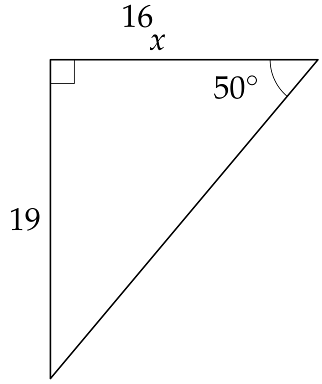
d)



e)



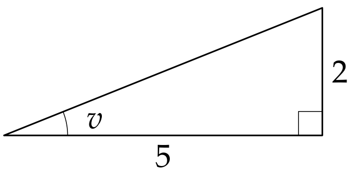
f)



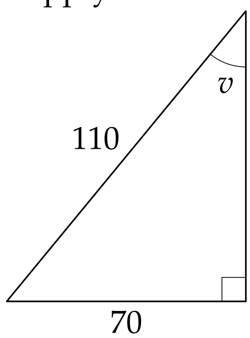
Övning 4.2:2

Bestäm en trigonometrisk ekvation som vinkeln v uppfyller.

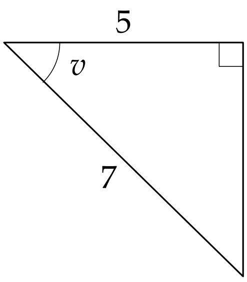
a)



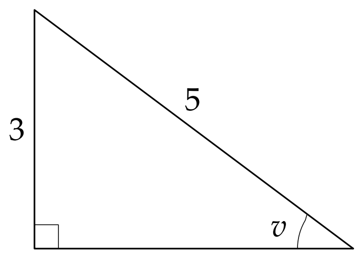
b)

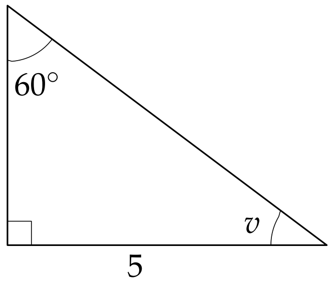


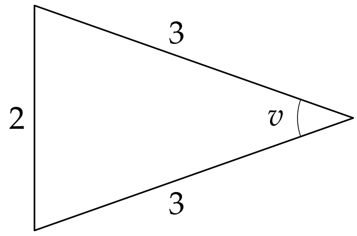
c)



d)



e) 

f) 

Övning 4.2:3

Bestäm

a)	$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	b)	$\cos 2\pi$	c)	$\sin 9\pi$
d)	$\cos\frac{7\pi}{2}$	e)	$\sin\frac{3\pi}{4}$	f)	$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Övning 4.2:4

Bestäm

a)	$\cos\frac{11\pi}{6}$	b)	$\cos\frac{11\pi}{3}$	c)	$\tan\frac{3\pi}{4}$
d)	$\tan\pi$	e)	$\tan\frac{7\pi}{6}$	f)	$\tan\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$

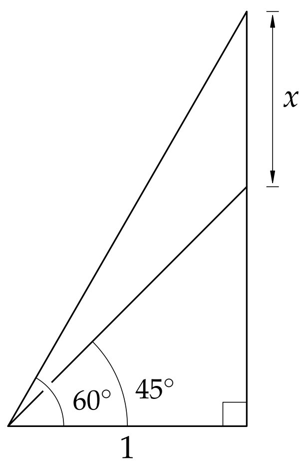
Övning 4.2:5

Bestäm

a)	$\cos 135^\circ$	b)	$\tan 225^\circ$	c)	$\cos 330^\circ$	d)	$\tan 495^\circ$

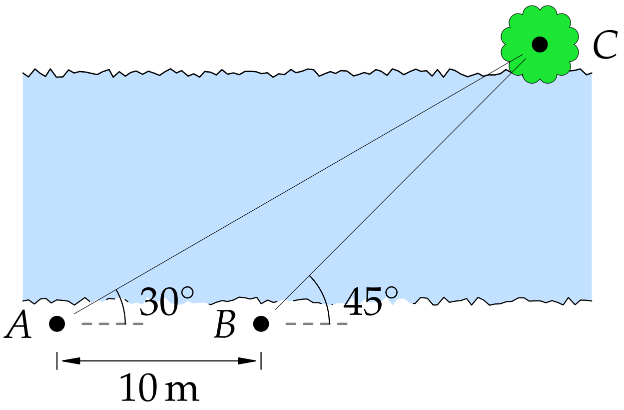
Övning 4.2:6

Bestäm längden av sträckan som är markerad med x.



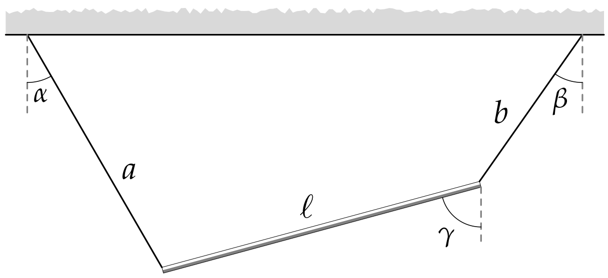
Övning 4.2:7

För att mäta upp bredden av en älv mäter vi från två punkter A och B längs den ena raka stranden vinkeln till ett träd C på motsatt sida älven. Hur bred är älven om måtten i figuren gäller?



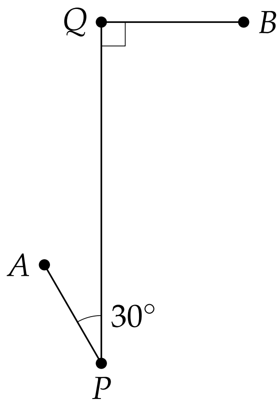
Övning 4.2:8

En stång med längd ℓ är upphängd i två linor med längd a resp. b enligt figuren. Linorna bildar vinklar α resp. β med vertikalen. Bestäm en trigonometrisk ekvation för vinkeln γ som stången bildar med vertikalen.



Övning 4.2:9

Bilvägen från A till B består av tre rätlinjiga delar AP, PQ och QB, vilka är 4,0 km, 12,0 km respektive 5,0 km. De i figuren markerade vinklarna vid P och Q är 30° respektive 90°. Beräkna avståndet fågelvägen från A till B. (Uppgiften är hämtad ur Centrala provet i matematik, november 1976, men aningen modifierad.)



4.3 Trigonometriska samband

Innehåll:

- Trigonometriska ettan
- Formeln för dubbla och halva vinkeln
- Additions- och subtraktionsformlerna

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Härleda trigonometriska samband från symmetrier i enhetscirkeln.
- Förenkla trigonometriska uttryck med hjälp av de trigonometriska sambanden.

Inledning

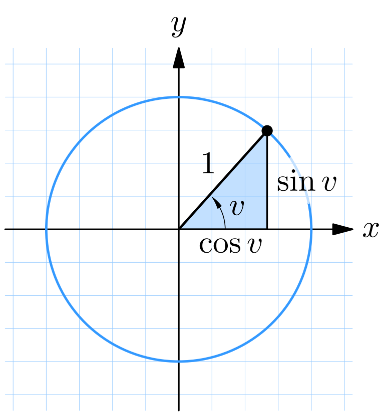
Det finns en mängd trigonometriska samband, med vilka man kan översätta mellan sinus-, cosinus- och tangensvärden för en vinkel eller multiplar av en vinkel. Dessa brukar också kallas trigonometriska identiteter, eftersom de endast är olika sätt att beskriva ett och samma uttryck med hjälp av olika trigonometriska funktioner. Här kommer vi att beskriva några av dessa trigonometriska samband. Det finns många fler än vi kan behandla här. De flesta kan härledas utifrån den s.k. **trigonometriska ettan** och additionsformlerna (se nedan), vilka är viktiga att kunna utantill.

Trigonometriska ettan

Detta samband är det mest grundläggande, men är i själva verket ingenting annat än Pythagoras sats, tillämpad i enhetscirkeln. Den rätvinkliga triangeln till höger visar att

$$(\sin v)^2 + (\cos v)^2 = 1,$$

vilket brukar skrivas $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$.



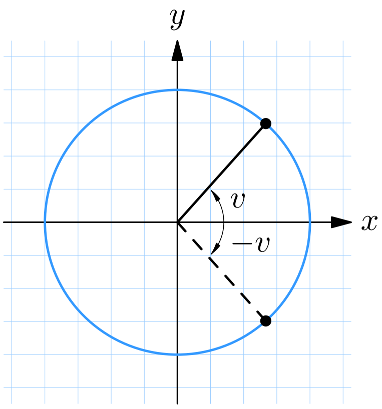
Symmetrier

Med hjälp av enhetscirkeln och spegling kan man tack vare de trigonometriska funktionernas symmetrier hitta en stor mängd samband mellan cosinus och sinus.

$$\begin{aligned} \cos(-v) &= \cos v & \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) &= \sin v \\ \sin(-v) &= -\sin v & \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) &= \cos v \\ \cos(\pi - v) &= -\cos v & \cos\left(v + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin v \\ \sin(\pi - v) &= \sin v & \sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos v \end{aligned}$$

Istället för att försöka lära sig alla dessa samband utantill kan det vara bättre att lära sig härleda dem i enhetscirkeln.

Spegling i x-axeln

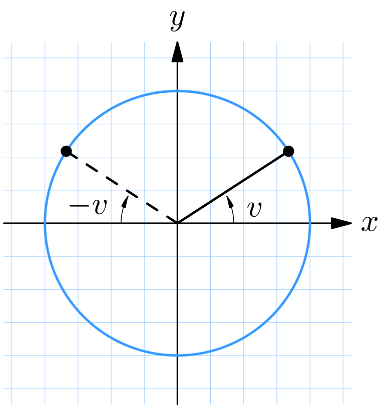


När en vinkel v speglas i x-axeln blir den $-v$.

Speglingen påverkar inte x-koordinaten medan y-koordinaten byter tecken

$$\begin{aligned} \cos(-v) &= \cos v, \\ \sin(-v) &= -\sin v. \end{aligned}$$

Spegling i y-axeln

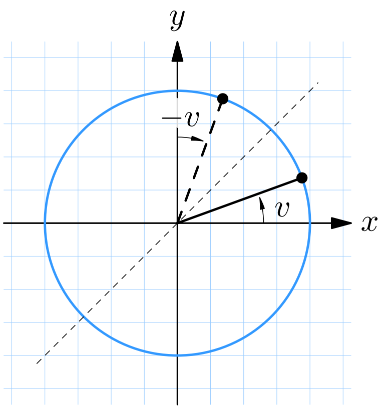


Vid spegling i y-axeln ändras vinkeln v till $\pi - v$ (spegelbilden bildar vinkeln v mot den negativa x-axeln).

Speglingen påverkar inte y-koordinaten medan x-koordinaten byter tecken

$$\begin{aligned} \cos(\pi - v) &= -\cos v, \\ \sin(\pi - v) &= \sin v. \end{aligned}$$

Spegling i linjen $y = x$

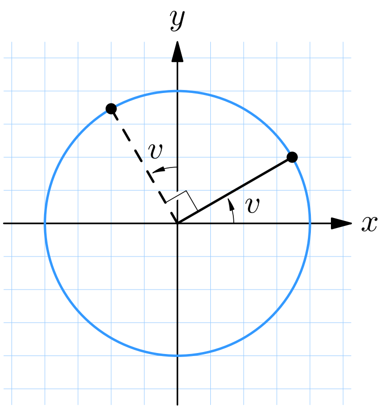


Vinkeln v ändras till vinkeln $\pi/2 - v$ (spegelbilden bildar vinkeln v mot den positiva y-axeln).

Speglingen gör att x- och y-koordinaterna byter plats

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin v.$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v.$$

Vridning med vinkeln $\pi/2$

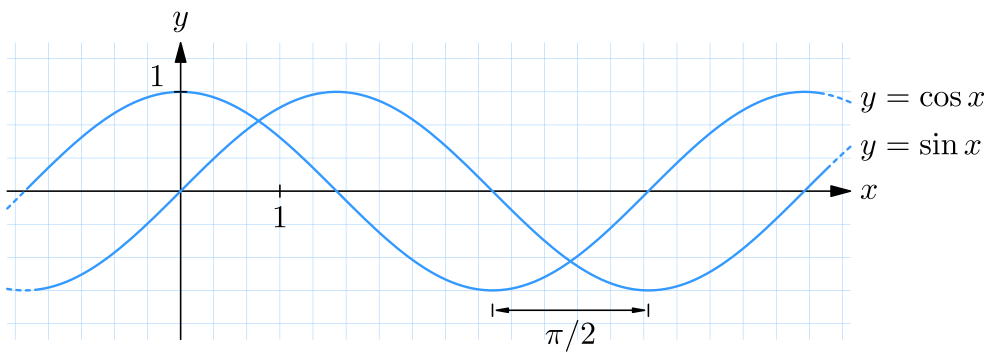


En vridning $\pi/2$ av vinkeln v betyder att vinkeln blir $v + \pi/2$.

Vridningen gör att x-koordinaten blir ny y-koordinat och y-koordinaten blir ny x-koordinat fast med omvänt tecken

$$\cos\left(v + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin v,$$
$$\sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right) = \cos v.$$

Alternativt kan man få fram dessa samband genom att spegla och/eller förskjuta graferna. Om man exempelvis vill ha ett samband där $\cos v$ uttrycks med hjälp av sinus så kan man förskjuta grafen för cosinus så att den passar med sinuskurvan. Detta kan göras på flera olika sätt, men mest naturligt faller det sig att skriva $\cos v = \sin(v + \pi/2)$. För att undvika misstag kan man kontrollera att det stämmer för några olika värden på v.



Kontroll: $\cos 0 = \sin(0 + \pi/2) = 1$.

Additions- och subtraktionsformlerna och formler för dubbla vinkeln

Ofta behöver man behandla uttryck där två eller flera vinklar är inblandade, t.ex. $\sin(u+v)$. Man behöver då de s.k. additionsformlerna. För sinus och cosinus har formlerna utseendet

$$
\begin{aligned}
\sin(u+v) &= \sin u \, \cos v + \cos u \, \sin v, \\
\sin(u-v) &= \sin u \, \cos v - \cos u \, \sin v, \\
\cos(u+v) &= \cos u \, \cos v - \sin u \, \sin v, \\
\cos(u-v) &= \cos u \, \cos v + \sin u \, \sin v.
\end{aligned}
$$

Om man vill veta sinus eller cosinus för dubbla vinkeln, dvs. $\sin 2v$ eller $\cos 2v$, så kan man skriva uttrycken som $\sin(v+v)$ eller $\cos(v+v)$ och använda additionsformlerna ovan och få

$$
\begin{aligned}
\sin 2v &= 2 \sin v \cos v, \\
\cos 2v &= \cos^2 v - \sin^2 v.
\end{aligned}
$$

Ur dessa samband kan vi sedan få fram formler för halva vinkeln. Genom att byta ut $2v$ mot v, och följdaktligen v mot $v/2$, i formeln för $\cos 2v$ får vi att

$$\cos v = \cos^2 \frac{v}{2} - \sin^2 \frac{v}{2}.$$

Vill vi ha en formel för $\sin(v/2)$ så använder vi därefter den trigonometriska ettan för att bli av med $\cos^2(v/2)$

$$\cos v = 1 - \sin^2 \frac{v}{2} - \sin^2 \frac{v}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{v}{2}$$

dvs.

$$\sin^2 \frac{v}{2} = \frac{1 - \cos v}{2}.$$

På motsvarande sätt kan vi med den trigonometriska ettan göra oss av med $\sin^2(v/2)$. Då får vi i stället

$$\cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1 + \cos v}{2}.$$

Råd för inläsning

Grund- och slutprov

Efter att du har läst texten och arbetat med övningarna ska du göra grund- och slutprovet för att bli godkänd på detta avsnitt. Du hittar länken till proven i din student lounge.

Tänk på att:
Enhetscirkeln är ett ovärderligt hjälpmedel för att hitta trigonometriska samband. Sådana finns det gott om och det är ingen idé att försöka lära sig alla utantill. Det är också tidsödande att behöva slå upp och leta fram dem hela tiden. Därför är det mycket bättre att du lär dig använda enhetscirkeln.

Den allra mest kända trigonometriska formeln är den s.k. trigonometriska ettan. Den gäller för alla vinklar, inte bara för spetsiga. Den hänger ihop med Pythagoras sats.

Lästips
För dig som vill fördjupa dig ytterligare eller behöver en längre förklaring vill vi tipsa om:

- Läs mer om trigonometriska formler i Theducations gymnasielexikon (`http://www.theducation.se/kurser/umaprep/4_trigonometri/43_trig_formler/432_addisionsformlerna/index.asp`)
- Läs mer om area-, sinus och cosinussatserna i Theducations gymnasielexikon (`http://www.theducation.se/kurser/umaprep/4_trigonometri/43_trig_formler/432_addisionsformlerna/index.asp`)
- Läs mer om trigonometri i Bruno Kevius matematiska ordlista (`http://matmin.kevius.com/trigonometri.html`)

Länktips

- Experimentera med cosinus ”lådan” (`http://www.ies.co.jp/math/java/trig/cosbox/cosbox.html`)

4.3 Övningar

Övning 4.3:1

Bestäm de vinklar v mellan $\dfrac{\pi}{2}$ och 2π som uppfyller

a) $\cos v = \cos \dfrac{\pi}{5}$ b) $\sin v = \sin \dfrac{\pi}{7}$ c) $\tan v = \tan \dfrac{2\pi}{7}$

Övning 4.3:2

Bestäm de vinklar v mellan 0 och π som uppfyller

a) $\cos v = \cos \dfrac{3\pi}{2}$ b) $\cos v = \cos \dfrac{7\pi}{5}$

Övning 4.3:3

Antag att $-\dfrac{\pi}{2} \leq v \leq \dfrac{\pi}{2}$ och att $\sin v = a$. Uttryck med hjälp av a

a) $\sin(-v)$ b) $\sin(\pi - v)$

c) $\cos v$ d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)$

e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + v\right)$ f) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + v\right)$

Övning 4.3:4

Antag att $0 \leq v \leq \pi$ och att $\cos v = b$. Uttryck med hjälp av b

a) $\sin^2 v$ b) $\sin v$

c) $\sin 2v$ d) $\cos 2v$

e) $\sin\left(v + \dfrac{\pi}{4}\right)$ f) $\cos\left(v - \dfrac{\pi}{3}\right)$

Övning 4.3:5

För en spetsig vinkel v i en triangel gäller att $\sin v = \dfrac{5}{7}$. Bestäm $\cos v$ och $\tan v$.

Övning 4.3:6

a) Bestäm $\sin v$ och $\tan v$ om $\cos v = \dfrac{3}{4}$ och $\dfrac{3\pi}{2} \leq v \leq 2\pi$.

b) Bestäm $\cos v$ och $\tan v$ om $\sin v = \dfrac{3}{10}$ och v ligger i den andra kvadranten.

c) Bestäm $\sin v$ och $\cos v$ om $\tan v = 3$ och $\pi \leq v \leq \dfrac{3\pi}{2}$.

Övning 4.3:7

Bestäm $\sin(x+y)$ om

a) $\sin x = \dfrac{2}{3}$, $\sin y = \dfrac{1}{3}$ och x, y är vinklar i första kvadranten.

b) $\cos x = \dfrac{2}{5}$, $\cos y = \dfrac{3}{5}$ och x, y är vinklar i första kvadranten.

Övning 4.3:8

Visa följande trigonometriska samband

a) $\tan^2 v = \dfrac{\sin^2 v}{1-\sin^2 v}$

b) $\dfrac{1}{\cos v} - \tan v = \dfrac{\cos v}{1+\sin v}$

c) $\tan\dfrac{u}{2} = \dfrac{\sin u}{1+\cos u}$

d) $\dfrac{\cos(u+v)}{\cos u\cos v} = 1 - \tan u \tan v$

Övning 4.3:9

Visa ”Morries formel”

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$$

(Ledtråd: Använd formeln för dubbla vinkeln på $\sin 160^\circ$.)

4.4 Trigonometriska ekvationer

Innehåll:

- Trigonometriska grundekvationer
- Enklare trigonometriska ekvationer

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Lösa trigonometriska grundekvationer.
- Lösa trigonometriska ekvationer som kan återföras till ovanstående ekvationstyp.

Grundekvationer

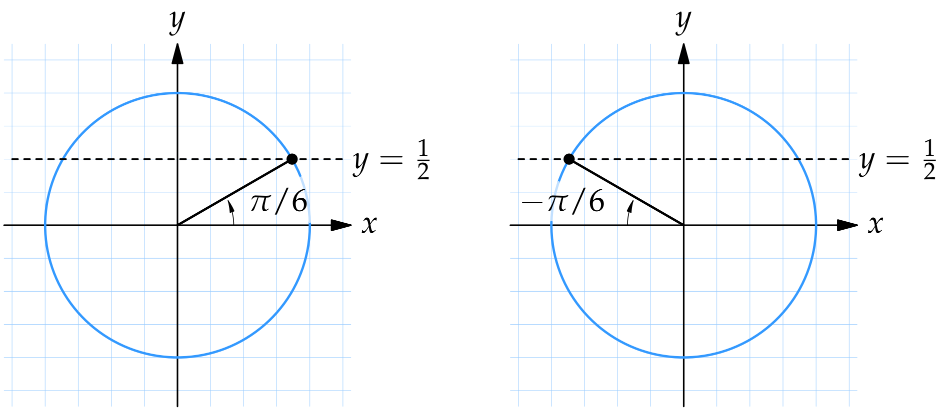
Trigonometriska ekvationer kan vara mycket komplicerade, men det finns också många typer av trigonometriska ekvationer som man kan lösa med ganska enkla metoder. Här skall vi börja med att titta på de mest grundläggande trigonometriska ekvationerna, av typerna $\sin x = a$, $\cos x = a$ och $\tan x = a$.

Dessa ekvationer har i regel oändligt många lösningar, såvida inte omständigheterna begränsar antalet möjliga lösningar (t.ex. att man söker en spetsig vinkel).

Exempel 1

Lös ekvationen $\sin x = \frac{1}{2}$.

Vår uppgift är att bestämma alla vinklar som gör att sinus av vinkeln blir $\frac{1}{2}$. Vi tar hjälp av enhetscirkeln. Notera att vinkeln här kallas x.



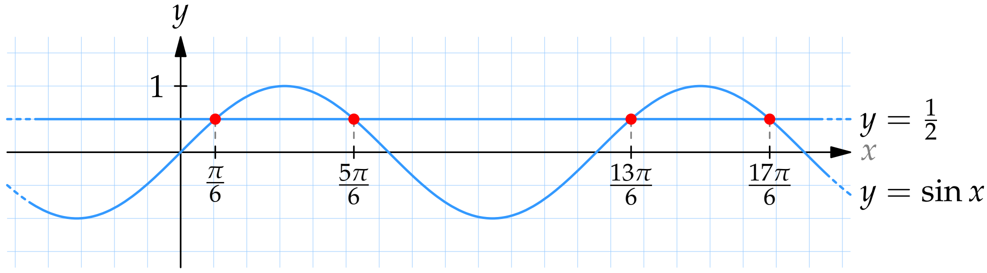
I figuren har vi angivit de två riktningar som ger punkter med y-koordinat $\frac{1}{2}$ i enhetscirkeln, dvs. vinklar med sinusvärdet $\frac{1}{2}$. Den första är standardvinkeln $30^\circ = \pi/6$ och av symmetriskäl bildar den andra vinkeln 30° mot den negativa x-axeln, vilket gör att den vinkeln är $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ eller i radianer $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Detta är de enda lösningar till ekvationen $\sin x = \frac{1}{2}$ mellan 0 och 2π.

Vi kan dock lägga till ett godtyckligt antal varv till dessa två vinklar och fortfarande få samma sinusvärde. Alla vinklar med sinusvärde $\frac{1}{2}$ är alltså

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi \\[2ex] x = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi \end{cases}$$

där n är ett godtyckligt heltal. Detta kallas för den fullständiga lösningen till ekvationen.

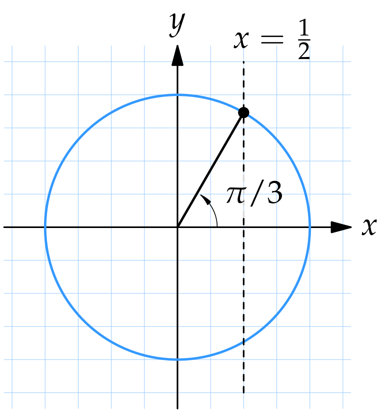
Lösningarna syns också i figuren nedan där grafen till $y = \sin x$ skär linjen $y = \frac{1}{2}$.

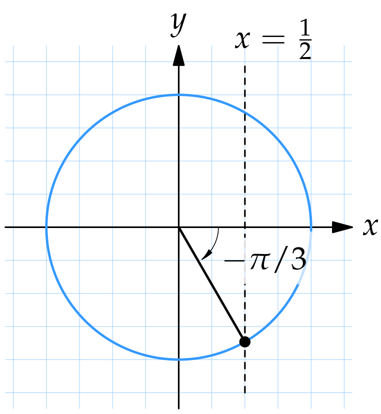


Exempel 2

Lös ekvationen $\cos x = \frac{1}{2}$.

Vi tar återigen hjälp av enhetscirkeln.





Vi vet att cosinus blir $\frac{1}{2}$ för vinkeln $\pi/3$. Den enda andra riktning i enhetscirkeln som ger samma värde på cosinus har vinkeln $-\pi/3$. Lägger vi till ett helt antal varv till dessa vinklar får vi den fullständiga lösningen

$$x = \pm\pi/3 + n \cdot 2\pi,$$

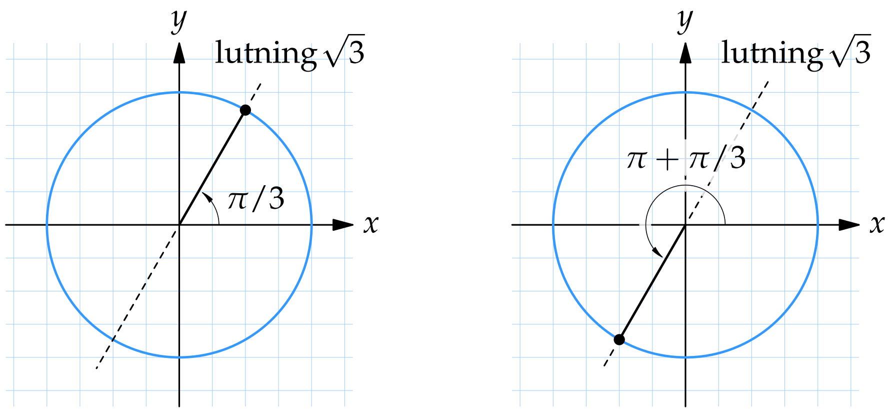
där n är ett godtyckligt heltal.

Exempel 3

Lös ekvationen $\tan x = \sqrt{3}$.

En lösning till ekvationen är standardvinkeln $x = \pi/3$.

Om vi betraktar enhetscirkeln så är tangens av en vinkel lika med riktningskoefficienten för den räta linje genom origo som bildar vinkeln x med den positiva x-axeln.



Därför ser vi att lösningarna till $\tan x = \sqrt{3}$ upprepar sig varje halvt varv $\pi/3$, $\pi/3 + \pi$, $\pi/3 + \pi + \pi$ osv. Den fullständiga lösningen kan vi därmed få fram genom att utgå från lösningen $\pi/3$ och lägga till eller dra ifrån multiplar av π,

$$x = \pi/3 + n \cdot \pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.

Några mer komplicerade ekvationer

Trigonometriska ekvationer kan se ut på många olika sätt, och det är omöjligt att här ge en fullständig genomgång av alla tänkbara ekvationer. Men låt oss studera några exempel, där vi kan ha nytta av att vi kan lösa grundekvationerna.

Vissa trigonometriska ekvationer kan förenklas genom att de skrivs om med hjälp av trigonometriska samband. Detta kan t.ex. leda till en andragradsekvation, som i nedanstående exempel där man använder att $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Exempel 4

Lös ekvationen $\cos 2x - 4\cos x + 3 = 0$.

Omskrivning med hjälp av formeln $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ger

$$(2\cos^2 x - 1) - 4\cos x + 3 = 0,$$

vilket kan förenklas till ekvationen (efter division med 2)

$$\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0.$$

Vänsterledet kan faktoriseras med kvadreringsregeln till

$$(\cos x - 1)^2 = 0.$$

Denna ekvation kan bara vara uppfylld om $\cos x = 1$. Grundekvationen $\cos x = 1$ kan vi lösa på det vanliga sättet och den fullständiga lösningen är

$$x = 2n\pi \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

Exempel 5

Lös ekvationen $\frac{1}{2}\sin x + 1 - \cos^2 x = 0$.

Enligt den trigonometriska ettan är $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, dvs. $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$. Ekvationen kan alltså skrivas

$$\tfrac{1}{2}\sin x + \sin^2 x = 0.$$

Genom att nu bryta ut en faktor $\sin x$ får vi

$$\sin x \cdot \left(\tfrac{1}{2} + \sin x\right) = 0.$$

Från denna faktoriserade form av ekvationen ser vi att lösningarna antingen måste uppfylla $\sin x = 0$ eller $\sin x = -\frac{1}{2}$, vilka är två vanliga grundekvationer på formen $\sin x = a$ och kan lösas som i exempel 1. Lösningarna blir till slut

$$\begin{cases} x &= n\pi \\ x &= -\pi/6 + 2n\pi \\ x &= 7\pi/6 + 2n\pi \end{cases} \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

Exempel 6

Lös ekvationen $\sin 2x = 4\cos x$.

Genom omskrivning med formeln för dubbla vinkeln blir ekvationen

$$2\sin x\,\cos x - 4\cos x = 0.$$

Vi delar båda led med 2 och bryter ut en faktor $\cos x$, vilket ger

$$\cos x\,\cdot\,(\sin x - 2) = 0.$$

Eftersom produkten i vänsterledet bara kan bli noll genom att en faktor är noll, så kan ekvationen delas upp i grundekvationerna

- $\cos x = 0$,
- $\sin x = 2$.

Men $\sin x$ kan aldrig bli större än 1, så ekvationen $\sin x = 2$ saknar lösningar. Då återstår bara $\cos x = 0$, vilken med hjälp av enhetscirkeln ger den fullständiga lösningen $x = \pi/2 + n\pi$.

Exempel 7

Lös ekvationen $4\sin^2 x - 4\cos x = 1$.

Med den trigonometriska ettan kan $\sin^2 x$ bytas ut mot $1 - \cos^2 x$. Då får vi

$$\begin{aligned} 4(1-\cos^2 x) - 4\cos x &= 1,\\ 4 - 4\cos^2 x - 4\cos x &= 1,\\ -4\cos^2 x - 4\cos x + 4 - 1 &= 0,\\ \cos^2 x + \cos x - \tfrac{3}{4} &= 0. \end{aligned}$$

Detta är en andragradsekvation i $\cos x$, som har lösningarna

$$\cos x = -\tfrac{3}{2} \quad \text{och} \quad \cos x = \tfrac{1}{2}.$$

Eftersom värdet av $\cos x$ ligger mellan -1 och 1 kan ekvationen $\cos x = -\frac{3}{2}$ inte ha några lösningar. Då återstår bara grundekvationen

$$\cos x = \tfrac{1}{2},$$

som löses enligt exempel 2.

Råd för inläsning

Grund- och slutprov
Efter att du har läst texten och arbetat med övningarna ska du göra grund- och slutprovet för att bli godkänd på detta avsnitt. Du hittar länken till proven i din student lounge.

Tänk på att:
Det är bra om man lär sig de vanliga trigonometriska formlerna (identiteterna) och övar upp en viss vana på att förenkla och manipulera trigonometriska uttryck.

Det är viktigt att man lär sig de grundläggande ekvationerna, av typen $\sin x = a$, $\cos x = a$ eller $\tan x = a$ (där a är ett reellt tal). Det är också viktigt att man vet att dessa ekvationer typiskt har oändligt många lösningar.

Lästips
För dig som vill fördjupa dig ytterligare eller behöver en längre förklaring vill vi tipsa om:

- Läs mer om trigonometriska ekvationer i Theducations gymnasielexikon (`http://www.theducation.se/kurser/umaprep/4_trigonometri/44_trig_ekvationer/index.asp`)
- Träna på trigonometriska räkneexempel i Theducations gymnasielexikon (`http://www.theducation.se/kurser/umaprep/4_trigonometri/44_trig_ekvationer/445_typ_asinx/index.asp`)

Länktips

- Experimentera med grafen $y = a\sin b(x - c)$ (`http://www.ies.co.jp/math/java/trig/ABCsinX/ABCsinX.html`)
- Experimentera med derivatan av $\sin x$ (`http://www.theducation.se/kurser/experiment/gyma/applets/ex45_derivatasinus/Ex45Applet.html`)

4.4 Övningar

Övning 4.4:1

För vilka vinklar v, där $0 \leq v \leq 2\pi$, gäller att

a) $\sin v = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos v = \dfrac{1}{2}$

c) $\sin v = 1$

d) $\tan v = 1$

e) $\cos v = 2$

f) $\sin v = -\dfrac{1}{2}$

g) $\tan v = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Övning 4.4:2

Lös ekvationen

a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = \dfrac{1}{2}$

c) $\sin x = 0$

d) $\sin 5x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

e) $\sin 5x = \dfrac{1}{2}$

f) $\cos 3x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Övning 4.4:3

Lös ekvationen

a) $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{6}$

b) $\sin x = \sin \dfrac{\pi}{5}$

c) $\sin (x + 40^\circ) = \sin 65^\circ$

d) $\sin 3x = \sin 15^\circ$

Övning 4.4:4

Bestäm de vinklar v i intervallet $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$ som uppfyller $\cos(2v + 10^\circ) = \cos 110^\circ$.

Övning 4.4:5

Lös ekvationen

a) $\sin 3x = \sin x$

b) $\tan x = \tan 4x$

c) $\cos 5x = \cos(x + \pi/5)$

Övning 4.4:6

Lös ekvationen

a) $\sin x \cdot \cos 3x = 2 \sin x$

b) $\sqrt{2} \sin x \cos x = \cos x$

c) $\sin 2x = -\sin x$

Övning 4.4:7

Lös ekvationen

a) $2\sin^2 x + \sin x = 1$

b) $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$

c) $\cos 3x = \sin 4x$

Övning 4.4:8

Lös ekvationen

a) $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$

b) $\sin x = \sqrt{3}\cos x$

c) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 - \tan x$

5.1 Skriva matematiska formler i LaTeX

Innehåll:

- Matematiska formler i LaTeX

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Skriva formler i LaTeX
- Undvika vanliga misstag när man kodar matematik i LaTeX

För att effektivt kunna skriva matematik via datorn i den individuella uppgiften och gruppuppgiften så behöver du koda matematiken med hjälp av LaTeX. I detta avsnitt kommer du få lära dig grunderna i att konstruera LaTeX-kod för att skriva matematiska formler.

Att skriva enkla uttryck i LaTeX

För att markera **starten** för den matematiska formateringen används taggen `<math>`. För att **avsluta** den matematiska formateringen används taggen `</math>`. Till exempel skrivs formeln $a + b$ som `<math>a+b</math>`.

Enkla matematiska uttryck skrivs på ett rättframt sätt.

Exempel 1

a) $1 + 2 - 3$ skrivs `<math>1+2-3</math>`

b) $5/2$ skrivs `<math>5/2</math>`

c) $4/(2 + x)$ skrivs `<math>4/(2+x)</math>`

d) $4 < 5$ skrivs `<math>4 < 5</math>`

När du behöver använda symboler som inte är tillgängliga på ett tangentbord eller konstruera avancerade formler behöver du använda dig av specialkommandon. Kommandona startar alltid med ett omvänt snedstreck, t.ex. `\le` som är kommandot för $\leq$.

I tabellen nedan har vi listat de vanligaste använda matematiska kommandona i LaTeX.

	Exempel	**LaTeX-kod**	**Kommentar**
Enkla räknesätt	$a+b$	`a+b`	
	$a-b$	`a-b`	
	$a \pm b$	`a\pm b`	
	$a \cdot b$	`a\cdot b`	
	a/b	`a/b`	
	$\frac{1}{2}$	`\frac{1}{2}`	Litet byggt bråk
	$\dfrac{a}{b}$	`\dfrac{a}{b}`	Stort byggt bråk
	(a)	`(a)`	Skalbara parenteser: `\left(...\right)`
Jämförelsetecken	$a=b$	`a=b`	
	$a \ne b$	`a\ne b`	Alternativt: `a\not=b`
	$a < b$	`a< b`	Obs. mellanslag efter "<"
	$a \le b$	`a\le b`	
	$a > b$	`a>b`	
	$a \ge b$	`a\ge b`	
Potenser och rötter	x^{n}	`x^{n}`	
	$\sqrt{x}$	`\sqrt{x}`	
	$\sqrt[n]{x}$	`\sqrt[n]{x}`	
Index	x_{n}	`x_{n}`	
Logaritmer	$\lg x$	`\lg x`	
	$\ln x$	`\ln x`	
	$\log x$	`\log x`	
	$\log_{a} x$	`\log_{a} x`	
Trigonometri	30°	`30^{\circ}`	
	$\cos x$	`\cos x`	
	$\sin x$	`\sin x`	

	$\tan x$	`\tan x`
	$\cot x$	`\cot x`
Pilar	$\Rightarrow$	`\Rightarrow`
	$\Leftarrow$	`\Leftarrow`
	$\Leftrightarrow$	`\Leftrightarrow`
Diverse symboler	π	`\pi`
	$\alpha, \beta, \theta, \varphi$	`\alpha, \beta, \theta, \varphi`

Exempel 2

a) $1 \pm 3 \cdot 5$ skrivs `<math>1\pm 3\cdot 5</math>`

b) $\frac{1}{2}y \ne x \le z$ skrivs `<math>\frac{1}{2}y\ne x\le z</math>`

c) $2^{13}\sqrt{3} + \ln y$ skrivs `<math>2^{13}\sqrt{3}+\ln y</math>`

d) $\tan 30^{\circ} + \cot \pi$ skrivs `<math>\tan 30^{\circ}+\cot\pi</math>`

Att skriva komplicerade uttryck

Genom att kombinera enkla uttryck kan vi skriva mer komplexa uttryck.

Exempel 3

a) $\sqrt{x+2}$ skrivs `<math>\sqrt{x+2}</math>`

b) $(a^2)^3 = a^6$ skrivs `<math>(a^2)^3=a^6</math>`

c) 2^{2^2} skrivs `<math>2^{2^2}</math>`

d) $\sin \sqrt{x}$ skrivs `<math>\sin\sqrt{x}</math>`

Exempel 4

a) $\sqrt{x + \sqrt{x}}$ skrivs `<math>\sqrt{x+\sqrt{x}}</math>`

b) $\dfrac{x-x^2}{\sqrt{3}}$ skrivs $\dfrac{x-x^2}{\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{x}{x+\dfrac{1}{x}}$ skrivs $\dfrac{x}{x+\dfrac{1}{x}}$

d) $x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q}$ skrivs <math>x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}
\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q}</math>

Vanliga misstag

Ett av de vanligaste misstagen när man skriver matematik i denna speciella syntax är att glömma starttaggen $och sluttaggen$.

Glöm inte heller att starta kommandon med omvänt snedstreck (\) och att lägga till ett mellanslag efter kommandon (om de inte direkt följs av ytterligare ett kommando).

Ett annat vanligt fel är att använda en asterisk ($*$) istället för multiplikationstecknet $\cdot$ (\cdot i LaTeX).

Exempel 5

		LaTeX	Resultat
a)	Glöm inte omvänt snedstreck (\)	sin x	$sin x$
	Kom ihåg mellanslag efter ett kommando	\sinx	Error
	Skriv	\sin x	$\sin x$
b)	Skriv inte multiplikation med asterisk	4*3	$4*3$
	Skriv	4\cdot 3	$4\cdot 3$
c)	Multiplikationstecken skrivs normalt inte ut mellan variabler	a\cdot b	$a\cdot b$
	Skriv	ab	ab

Exponenter och index

För att skriva en exponent använder du ^ följt av exponenten och för att skriva index använder du _ följt av indexet. Om exponenten eller indexet består av fler än en symbol måste det inneslutas med klammerparenteser (även kallade måsvingar eller krullparenteser) `{}`.

En speciell typ av exponent är gradtecknet (°). Det skrivs `^{\circ}`.

Exempel 6

		LaTeX	Resultat
a)	Utelämna inte ^	`a2`	$a2$
	Skriv	`a^2`	a^2
b)	Utelämna inte _	`x1`	$x1$
	Skriv	`x_1`	x_1
c)	Glöm inte klammerparenteser	`a^22`	a^22
	Skriv	`a^{22}`	a^{22}
d)	Använd inte ”o” som gradtecken	`30^{o}`	30^o
	Använd inte ”0” som gradtecken	`30^{0}`	30^0
	Skriv	`30^{\circ}`	30°

Parenteser

I mer komplexa uttryck är det viktigt att se till att varje vänsterparentes ”`(`” balanseras av en motsvarande högerparentes ”`)`”.

En parentes som avgränsar ett stort uttryck ska vara lika stor som uttrycket. För att åstadkomma detta använder vi prefix framför parenteserna. Vid vänsterparentesen skriver du `\left` framför och vid högerparentesen `\right`. Då kommer du få ett par skalbara parenteser som anpassar sin höjd efter uttryckets storlek.

Notera att klammerparenteser `{}` och inte vanliga parenteser `()` används för att avgränsa argument till kommandon.

Exempel 7

		LaTeX	Resultat
a)	Var noga med antalet parenteser	`(1-(1-x)`	$(1-(1-x)$
	Skriv	`(1-(1-x))`	$(1-(1-x))$
b)	Låt parenteserna vara lika stora som uttrycket	`(\dfrac{a}{b}+c)`	$(\dfrac{a}{b}+c)$
	Skriv	`\left(\dfrac{a}{b}+c\right)`	$\left(\dfrac{a}{b}+c\right)$
c)	Vanliga parenteser avgränsar inte argument	`\frac(1)(2)`	$\frac{(}{1})(2)$
	Skriv	`\frac{1}{2}`	$\frac{1}{2}$
d)	Vanliga parenteser avgränsar inte argument	`\sqrt(a+b)`	$\sqrt{(}a+b)$
	Undvik onödiga parenteser	`\sqrt{(a+b)}`	$\sqrt{(a+b)}$
	Skriv	`\sqrt{a+b}`	$\sqrt{a+b}$

Bråk

En tumregel är att bråk där nämnare och täljare innehåller endast ett fåtal siffror ska skrivas som små bråk (`\frac`) , medan andra bråk ska vara stora (`\dfrac`).

Om en exponent eller index innehåller ett bråk bör bråket skrivas med snedstreck (t.ex. $5/2$ istället för $\frac{5}{2}$) för att öka läsbarheten.

Exempel 8

		LaTeX	Resultat
a)	Sifferbråk skrivs inte stora	`\dfrac{1}{2}`	$\dfrac{1}{2}$
	Skriv	`\frac{1}{2}`	$\frac{1}{2}$
	(Undantag: Om bråket står bredvid ett stort uttryck så bör du skriva bråket som ett stort bråk.)		
b)	Bokstavsbråk skrivs inte små	`\frac{a}{b}`	$\frac{a}{b}$
	Skriv	`\dfrac{a}{b}`	$\dfrac{a}{b}$
c)	Komplicerade bråk skrivs inte små	`\frac{\sqrt{3}}{2}`	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Skriv	`\dfrac{\sqrt{3}}{2}`	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
d)	Inga byggda bråk i exponenter	`a^{\frac{1}{2}}`	$a^{\frac{1}{2}}$
	Skriv	`a^{1/2}`	$a^{1/2}$

Råd för inläsningen

Ett råd är att testa att skriva matematiska formler i forumet och i wikin som tillhör din individuella uppgift.

Länktips

- En mer utförlig lista av matematikkommandon i LaTeX finns på Wikipedias hjälpsidor (`http://en.wikipedia.org/wiki/Help:Displaying_a_formula`)

- Mer ingående information om LaTeX matematik kan hittas i ett kapitel av boken *The LaTeX Companion* (`http://www.cism.it/cism/volconts/ch8.pdf`) och en text av Herbert Voss (`http://www.tex.ac.uk/tex-archive/info/math/voss/mathmode/Mathmode.pdf`).
- Vill du veta mer om LaTeX kan du besöka dessa webbsidor: Wikipedia (`http://en.wikipedia.org/wiki/LaTeX`), The not so Short Introduction to LaTeX (`http://www.ctan.org/tex-archive/info/lshort/english/lshort.pdf`) och LaTeX Wikibook (`http://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX`).
- Den implementation av LaTeX matematik som används i wikin på nätet är jsMath (`http://www.math.union.edu/~dpvc/jsMath`).

5.1 Övningar

Övning 5.1:1

Skriv följande formler i LaTeX

a) $2-3+4$

b) $-1+0,3$

c) $-5-(-3)=-5+3$

d) $5/2+1>5/(2+1)$

Övning 5.1:2

Skriv följande formler i LaTeX

a) $3\cdot 4\pm 4$

b) $4x^2-\sqrt{x}$

c) $4\cdot 3^n\geq n^3$

d) $3-(5-2)=-(-3+5-2)$

Övning 5.1:3

Skriv följande formler i LaTeX

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}$

b) $\left(\dfrac{5}{x}-1\right)(1-x)$

c) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$

d) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

Övning 5.1:4

Skriv följande formler i LaTeX

a) $\sin^2 x+\cos x$

b) $\cos v=\cos\dfrac{3\pi}{2}$

c) $\cot 2x=\dfrac{1}{\tan 2x}$

d) $\tan\dfrac{u}{2}=\dfrac{\sin u}{1+\cos u}$

Övning 5.1:5

Skriv följande formler i LaTeX

a) $\sqrt{4+x^2}$

b) $\sqrt[n]{x+y}\neq\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}$

c) $\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}$

d) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^3\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$

Övning 5.1:6

Skriv följande formler i LaTeX

a) $\ln(4\cdot 3)=\ln 4+\ln 3$

b) $\ln(4-3)\neq\ln 4-\ln 3$

c) $\log_2 4=\dfrac{\ln 4}{\ln 2}$

d) $2^{\log_2 4}=4$

Övning 5.1:7

Korrigera följande matematiska kod skriven i LaTeX

a) `4^{\frac{3}{4}}(1-(3-4)`

b) `2*sqrt(a+b)`

c) `cotx = \dfrac{1}{2}Sin 20^{o}`

5.2 Matematisk text

Innehåll:

- Regler kring formatering av matematiska text
- Goda råd inför skrivandet av en lösning
- Vanliga fel

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Presentera en matematisk text
- Förklara tankegången bakom en lösning

Goda råd

Förklara din lösning

Det viktigaste rådet är:

Förklara din lösning.

Lösningen ska inte bara vara en redovisning av vilka formler som du använt, utan också en beskrivning av hur du har tänkt. Använd ord till detta! För att få rätt nivå på lösningen: tänk dig att du förklarar lösningen för en klasskompis som har lite svårt att hänga med i alla steg. Du ska alltså inte förklara minsta lilla räkneoperation men inte heller hoppa över viktiga steg.

Lyder du bara rådet ovan så har du gjort 80% av vad som krävs för att skriva en fullgod lösning.

Skriv god svenska

Även om detta inte är en inlämningsuppgift i svenska och att det självklart är det matematiska innehållet som är viktigast så ska du tänka på saker som stavfel, grammatiska fel osv. Om din lösning har alltför många språkliga fel försämrar det kommunikationen med läsaren och påverka även lösningens trovärdighet.

Renskriv lösningen

Efter att du löst uppgiften bör du skriva om lösningen på nytt. Då kan du bättre koncentrera dig på hur du presenterar din tankegång och kanske även förbättra din ursprungliga lösning. Ett tips är att be någon annan läsa din lösning för att upptäcka oklarheter. Det är bra att skjuta upp presentationsfasen till senare så att när du löser uppgiften första gången kan arbeta friare och behöver inte binda upp dig vid ett bestämt sätt att lösa uppgiften på.

När du skriver in lösningen, gör det som text och inte som skärmdumpar från din ordbehandlare. Visserligen kan det vara enklare att skriva lösningen på din egen dator i favoritprogrammet, men tänk på att lösningen i nästa fas ska ingå i ett grupparbete och då är det viktigt att lösningen går att redigera av alla.

Ett tydligt svar

Skriv ett tydligt svar på slutet. Detta är speciellt viktigt om lösningen är lång och svaret finns utspritt i texten. Det finns dock uppgifter där själva lösningen är svaret (t.ex. ”Visa att...”) och då behövs förstås inget separat svar på slutet. Förenkla också svaret så långt som möjligt.

Exempel 1

a) $\sqrt{8}$ förenklas till $2\sqrt{2}$.

b) $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin 2x$ förenklas till $1 + 2\sin 2x$.

c) $x = \begin{cases} \pi/4 + n\pi \\ 3\pi/4 + n\pi \end{cases}$ (n heltal) förenklas till $x = \pi/4 + n\pi/2$ (n heltal).

Pröva och kontrollera delsteg och svar

Ibland när man löser vissa ekvationer dyker det upp s.k. falska rötter som en konsekvens av det lösningssätt som man använt. I dessa fall, förklara varför eventuella falska rötter kan finnas och pröva lösningarna för att se vilka som är riktiga lösningar och vilka som är falska rötter.

En annan sak att se upp med är uteblivna lösningar. T.ex. om en faktor i båda led i en ekvation förkortas bort så riskerar lösningarna som ges av när faktorn är noll att försvinna.

Exempel 2

Om du löser ekvationen $2x^2 - 5x = 0$ genom att först flytta $5x$ till högerledet,

$$2x^2 = 5x,$$

och förkorta bort x i båda led,

$$2x = 5,$$

så förlorar du lösningen $x = 0$.

Om du istället faktoriserar vänsterledet,

$$x(2x - 5) = 0,$$

så kan du avläsa båda lösningarna: $x = 0$ och $2x - 5 = 0$ (dvs. $x = \frac{5}{2}$).

Läs mer om faktorisering i lösningsförslaget till övning 2.1:3.

En viktig del av uppgiften är att fundera ut metoder för att i rimlig utsträckning kontrollera svaret. Till exempel, stoppa in lösningen i ekvationen och förvissa sig om att det verkligen är en lösning eftersom man kan ju ha räknat fel (förväxla dock inte detta med prövningen av falska rötter). Detta kan man också göra för delsvar i en lösning.

En annan sak är att bedöma om svaret är rimligt. Stoppa in värden på vissa parametrar och se att man får rätt svar (vad händer om $a = 0$, $a = 1$ eller a går mot oändligheten?).

Rita tydliga figurer

En figur kan ofta förklara införda beteckningar bättre än text, så använd gärna figurer. Tänk dock på att rita dem tydliga och överlasta inte en figur med alltför många detaljer. Det kan vara bättre att ha flera nästan likadana figurer som var och en illustrerar en sak än en stor kombinationsfigur som ska förklara allt.

Behandla formler som en del av texten

Det är viktigt att du skriver din lösning på ett sätt som gör det enkelt för andra att följa med i resonemangen. Nedan presenterar vi några exempel på hur man ska och inte ska framställa texten när man använder formler i sin lösning.

Goda råd kring formler och text

- Skriv förklarande text på raden innan en fristående formel

- Tänk på hur du skriver ut punkt och komma
- Skriv fristående formler något indragna (eller centrerade)

Formler bör inte ses som något som hängs på texten (eller tvärt om) utan både text och formler ska integreras samman i ett linjärt flöde. Skriv därför inte förklarande text inom parenteser efter formler utan istället på raden innan.

Skriv inte

formel (text text text text text text . . .)
formel (text text text text text text . . .)

Skriv istället

Text text text text . . .

formel.

Text text text text . . .

formel.

Formler kan antingen skrivas inne i den löpande texten eller fristående. När formler skrivs fristående hamnar de på en egen rad och antingen centrerade eller något indragna.

Skriv

. . . text text text *formel* text.

Text text text

formel

text text text text text text . . .

(Notera hur indragningen framhäver både den förklarande texten och formeln.)

Ett vanligt fel är att använda kolon framför alla fristående formler.

Skriv inte

. . . vilket ger att:

formel

Nästa steg är. . .

(Observera att det också behövs en punkt efter formeln ovan.)

Eftersom en formel ska vara en del av texten så ingår den som en del av meningen. Tänk därför på hur du använder skiljetecken. Exempelvis, glöm inte att sätta ut en punkt efter en formel om den avslutar en mening.

Skriv

. . . och därför är

formel.

Nästa steg är. . .

(Notera punkten efter formeln.)

Ett ofog är att i en lösning använda överdriven numrering, t.ex. sätta ut en siffra framför varje enskilt steg (numrering bör användas vid en ren uppräkning). De extra siffrorna tillför ofta inget utan blir mest distraherande. Man behöver sällan referera tillbaka till enskilda steg, och behöver man det kan man ofta skriva exempelvis ”när vi kvadrerade ekvationen” osv.

Skriv inte

3. text text text text text text text text . . .

formel

4. text text text text text text text text . . .

Ibland vill man referera tillbaka till en viss fristående formel och då kan man numrera den med en siffra (eller stjärna) inom parenteser i höger eller vänster marginal.

Skriv

. . . text text text text text text text text

$$\textit{formel}. \tag{1}$$

Text text (1) text text text text text text

$$\textit{formel}.$$

Text text text text text text text text...

Vanliga fel

Var noggrann med pilar och likheter

Det är skillnad mellan $\Rightarrow$ (implikation), $\Leftrightarrow$ (ekvivalens) och $=$ (lika med). Mellan två ekvationer som man på förhand vet har samma lösningar används ekvivalenspilen $\Leftrightarrow$ för att signalera detta.

Om vi däremot skriver ”ekvation 1 $\Rightarrow$ ekvation 2” så betyder det att alla lösningar som ekvation 1 har har också ekvation 2, men ekvation 2 kan dessutom ha fler lösningar.

Exempel 3

a) $x + 5 = 3 \quad\Leftrightarrow\quad x = -2$

b) $x^2 - 4x - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)^2 - 5 = 0$

c) $\sqrt{x} = x - 2 \quad\Rightarrow\quad x = (x-2)^2$

Ofta skriver man inte ut $\Leftrightarrow$ mellan två rader som direkt följer efter varandra eftersom ekvivalensen då är underförstådd. Många gånger är det också bättre att använda förklarande text istället för pilar mellan olika steg i lösningen. Använd inte implikationspilen $\Rightarrow$ som en allmän fortsättningssymbol (i betydelsen ”sedan har vi”).

Likhetstecknet $(=)$ används i två betydelser, dels mellan saker som är identiskt lika, t.ex. $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ som gäller för alla x, dels i ekvationer där båda led är lika för vissa x, exempelvis $(x-2)^2 = 4$ som bara gäller för $x = 0$ eller $x = 4$. Du ska inte blanda dessa två olika användningar av samma tecken.

Exempel 4

Skriv inte

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 4$$

när du löser ekvationen $x^2 - 2x + 1 = 4$, eftersom det då lämnar öppet för misstolkningar.

Skriv hellre

$$x^2 - 2x + 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 4.$$

(Det finns också en tredje användning av likhetstecknet som förekommer när man definierar ett uttryck eller t.ex. en operation.)

Enkelpilen ($\rightarrow$) används i matematiken oftast vid olika typer av gränsvärden; $a \rightarrow \infty$ betyder att a växer obegränsat (går mot oändligheten). Du kommer troligtvis inte behöva använda enkelpilen i denna kurs.

Slarva inte med parenteser

Eftersom multiplikation och division har högre prioritet än addition och subtraktion är det nödvändigt att stoppa in parenteser om man vill att additionen/subtraktionen ska utföras först. Eftersom vi har denna regel så ska du inte heller ha med onödiga parenteser.

Exempel 5

a) Skriv inte $1 + x/\cos x$ när du egentligen menar $(1+x)/\cos x$.

b) Skriv inte $1 + (1/\sin x)$ när detta bättre skrivs som $1 + 1/\sin x$ (även om det förra skrivsättet, formellt sett, inte är felaktigt).

I bokstavsuttryck utelämnar man ofta multiplikationstecknet. Exempelvis skriver man nästan aldrig $4 \cdot x \cdot y \cdot z$ utan $4xyz$. Detta utelämnade multiplikationstecken binder ihop uttryck hårdare än multiplikation och division (men inte upphöjt till). När du därför skriver $1/2R$ så betyder det $1/(2R)$ och inte $(1/2)R$. Eftersom detta kan vara en källa till missförstånd så är det inte helt ovanligt att man skriver ut parenteserna i båda situationerna (även om de strikt sett bara är nödvändiga i det ena uttrycket).

Argument till de vanliga elementära funktionerna skriver man utan parenteser. Därför ska du inte skriva

$$\cos(x), \quad \sin(x), \quad \tan(x), \quad \cot(x), \quad \lg(x) \quad \text{och} \quad \ln(x)$$

utan

$$\cos x, \quad \sin x, \quad \tan x, \quad \cot x, \quad \lg x \quad \text{och} \quad \ln x.$$

Det är t.o.m. så att man skriver $\cos 2x$ och inte $\cos(2x)$ (eftersom $2x$ är ett tätt ihopsatt uttryck), men däremot är parenteserna nödvändiga när man skriver $\sin(x+y)$, $\sin(x/2)$, $\sin(-x)$ eller $(\sin x)^2$ (som du, alternativt, kan skriva som $\sin^2 x$).

Råd för inläsningen

Läs gärna avsnittet både innan och efter att du skriver lösningen till din inlämningsuppgift.

Länktips

- En videokurs i hur man skriver matematik av Donald Knuth (`http://scpd.stanford.edu/knuth/index.jsp`). Kompendiet som hör till kursen finns tillgängligt i källform (`http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/papers/mathwriting.tex.gz`) eller i utdrag från Google books (`http://books.google.com/books?id=dDOehHMbUMcC&printsec=frontcover&dq=inauthor:Donald+inauthor:Ervin+inauthor:Knuth&lr=&ei=JbN1SZfvFZysMqPPhM8M&hl=sv#PPP9,M1`).

5.2 Övningar

Övning 5.2:1

Vilken av pilarna $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ eller $\Leftrightarrow$ ska sättas in mellan följande ekvationer? (Istället för frågetecknen)

a) $\tan x(\sin x + 1) = \tan x \quad ? \quad \sin x + 1 = 1$

b) $\sqrt{x-1} = x + 1 \quad ? \quad x - 1 = (x+1)^2$

c) $x^2 - 6x + 1 = 0 \quad ? \quad (x-3)^2 - 9 + 1 = 0$

Övning 5.2:2

Kritisera följande utdrag ur en students lösning

Till att börja med visas att Monikas (den fiktiva personens) räkning är korrekt ner till sista steget där hon gjort fel.

$$cosxtan\frac{3x}{2} = \frac{1}{tanx + cot2x}$$

VLs nämnare multiplicerat till båda led.

$$cosxtan\frac{3x}{2}(tanx + cot2x) = 1$$

Övning 5.2:3

Kritisera följande utdrag ur en students lösning

$$\frac{1}{2}\cdot(\sin 4x + \sin 2x)\cdot\cos x^2 + \frac{1}{2}\cdot(\sin 4x + \sin 2x)\sin x^2 - \sin 2x\cdot\sin x^2 = \frac{3}{4}$$

---Nu kan vi faktorisera parenteserna då dom är likadana till $(\frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x)\cdot(\cos x^2 + \sin x^2)$ och i och med trigonometriska ettan får vi $(\cos x^2 + \sin x^2) = 1$ så då ser ekvationen ut så här:

$$\frac{1}{2}\cdot(\sin 4x + \sin 2x) - \sin 2x\cdot\sin x^2 = \frac{3}{4}$$

Övning 5.2:4

Kritisera följande utdrag ur en students lösning

> hade lite bråttom när jag gjorde uppgiften första gången... här är den uppdaterade versionen:
>
> $3\cdot 2^x = 4\cdot \sqrt[x]{9}$
>
> $3\cdot 2^x = 2^2\cdot \sqrt[x]{2^2}$
>
> $3\cdot 2^x = 2^2\cdot 3^{\frac{2}{x}}, x \neq 0$ ($x = 0$ är ändå ingen rot till ekvationen)
>
> utbrytning av x ur potensen ur VL och 2 ur HL
>
> $(3^{\frac{1}{x}}\cdot 2)^x = (2\cdot 3^{\frac{1}{x}})^2$

Övning 5.2:5

Kritisera följande utdrag ur en students lösning

> Multiplicera båda led med 1-3tan²x:
>
> $tan(x)(3tan(x) - tan^3(x) + 2sin^2(x) - 2sin^2(x)3tan^2(x) = 0 <=> \frac{sin(x)}{cos(x)}(\frac{3sin(x)}{cos(x)}$
>
> Förkorta med $sin^2(x)$
>
> $\frac{3}{cos^2(x)} - \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} + 2 - 6\frac{sin^2(x)}{cos^2(x)}$

Övning 5.2:6

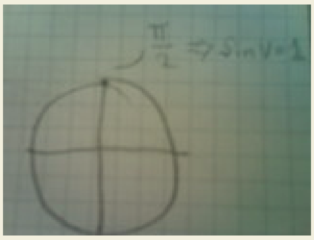
Kritisera följande utdrag ur en students lösning

> Komplettera var det. Jag antar att jag ska uppdatera i fönstret med gruppens lösning.
>
> Min ursprungliga lösning var:
>
> Problemet är alltså
>
> $Sinx + Cosx = \sqrt{2} * Sin2x$
>
> Trigonometri har nästan lika många formler som det är stjärnor på himlen så man kan plotta ett par linjer för att få ett grep på vad man letar efter.

Övning 5.2:7

Kritisera följande utdrag ur en students lösning

Ska vi nu lösa ut x ur $\sin 2x$ byter vi ut $2x$ mot V. På en enhetscirkel kan man se att när $V = \frac{\pi}{2}$ blir $\sin V = 1$



Här måste vi komma ihåg att vi kan lägga till hur många hela varv som helst till $\frac{\pi}{2}$ och endast få samma svar!

Alltså: $V = \frac{\pi}{2} + 2\pi * n$

Övning 5.2:8

Kritisera följande utdrag ur en students lösning

1. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$

Med formeln för dubbla vinkeln $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ **får man att**

$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$ och $\cos^2 3x = \frac{\cos 6x + 1}{2}$

Insättning i 1 ger:

2. $\frac{\cos 2x + 1}{2} + \cos^2 2x + \frac{\cos 6x + 1}{2} = \frac{3}{2}$

Övning 5.2:9

Kritisera följande utdrag ur en students lösning

$\cos x \tan(3x/2) = 1/(\tan x + \cot 2x)$

Jag byter ut tan och cot mot deras motsvarigheter i cossinus och sinus.

$\cos x * (\sin(3x/2)/\cos(3x/2)) = 1/((\sin x/\cos x) + (\cos 2x/\sin 2x) - - >$

$\cos x * (\sin(3x/2)/\cos(3x/2)) * ((\sin x/\cos x) + (\cos 2x/\sin 2x)) = 1$

Facit till övningsuppgifter

Numerisk räkning

1.1:1 a) -7 b) 1 c) 11 d) 1

1.1:2 a) 0 b) -1 c) -25 d) -19

1.1:3 a) naturlig, heltal, rationell
b) heltal, rationell
c) naturlig, heltal, rationell
d) heltal, rationell
e) heltal, rationell
f) naturlig, heltal, rationell

1.1:4 a) rationell
b) naturlig, heltal, rationell
c) irrationell
d) naturlig, heltal, rationell
e) irrationell
f) irrationell

1.1:5 a) $\frac{3}{5} < \frac{5}{3} < 2 < \frac{7}{3}$
b) $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < -\frac{3}{10} < -\frac{1}{5}$
c) $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{21}{34} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$

1.1:6 a) 1,167 b) 2,250 c) 0,286
d) 1,414

1.1:7 a) rationellt, $\frac{314}{100} = \frac{157}{50}$
b) rationellt, $\frac{31413}{9999} = \frac{10471}{3333}$
c) rationellt, $\frac{1999}{9990}$
d) irrationellt

1.2:1 a) $\frac{93}{28}$ b) $\frac{3}{35}$ c) $-\frac{7}{30}$ d) $\frac{47}{60}$
e) $\frac{47}{84}$

1.2:2 a) 30 b) 8 c) 84 d) 225

1.2:3 a) $\frac{19}{100}$ b) $\frac{1}{240}$

1.2:4 a) $\frac{6}{7}$ b) $\frac{16}{21}$ c) $\frac{1}{6}$

1.2:5 a) $\frac{105}{4}$ b) -5 c) $\frac{8}{55}$

1.2:6 $\frac{152}{35}$

1.3:1 a) 72 b) 3 c) -125 d) $\frac{27}{8}$

1.3:2 a) 2^6 b) 2^{-2} c) 2^0

1.3:3 a) 3^{-1} b) 3^5 c) 3^4 d) 3^{-3}
e) 3^{-3}

1.3:4 a) 4 b) 3 c) 625 d) 16 e) $\frac{1}{3750}$

1.3:5 a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 27 d) 2209 e) 9
f) $\frac{25}{3}$

1.3:6 a) $256^{1/3} > 200^{1/3}$
b) $0{,}4^{-3} > 0{,}5^{-3}$
c) $0{,}2^5 > 0{,}2^7$
d) $\left(5^{1/3}\right)^4 > 400^{1/3}$
e) $125^{1/2} > 625^{1/3}$
f) $3^{40} > 2^{56}$

Algebra

2.1:1 a) $3x^2 - 3x$
b) $xy + x^2y - x^3y$
c) $-4x^2 + x^2y^2$
d) $x^3y - x^2y + x^3y^2$
e) $x^2 - 14x + 49$
f) $16y^2 + 40y + 25$
g) $9x^6 - 6x^3y^2 + y^4$
h) $9x^{10} + 30x^8 + 25x^6$

2.1:2 a) $-5x^2+20$ b) $10x - 11$ c) $54x$
d) $81x^8 - 16$ e) $2a^2 + 2b^2$

2.1:3 a) $(x+6)(x-6)$
b) $5(x+2)(x-2)$
c) $(x+3)^2$
d) $(x-5)^2$
e) $-2x(x+3)(x-3)$
f) $(4x+1)^2$

2.1:4 a) 5 framför x^2, 3 framför x
b) 2 framför x^2, 1 framför x

c) 6 framför x^2, 2 framför x

2.1:5 a) $\dfrac{1}{1-x}$ b) $-\dfrac{1}{y(y+2)}$

c) $3(x-2)(x-1)$ d) $\dfrac{2(y+2)}{y^2+4}$

2.1:6 a) $2y$ b) $\dfrac{-x+12}{(x-2)(x+3)}$

c) $\dfrac{b}{a(a-b)}$ d) $\dfrac{a(a+b)}{4b}$

2.1:7 a) $\dfrac{4}{(x+3)(x+5)}$

b) $\dfrac{x^4-x^3+x^2+x-1}{x^2(x-1)}$

c) $\dfrac{ax(a+1-x)}{(a+1)^2}$

2.1:8 a) $\dfrac{x}{(x+3)(x+1)}$ b) $\dfrac{2(x-3)}{x}$

c) $\dfrac{x+2}{2x+3}$

2.2:1 a) $x=1$ b) $x=6$ c) $x=-\frac{3}{2}$
d) $x=-\frac{13}{3}$

2.2:2 a) $x=1$ b) $x=\frac{5}{3}$ c) $x=2$
d) $x=-2$

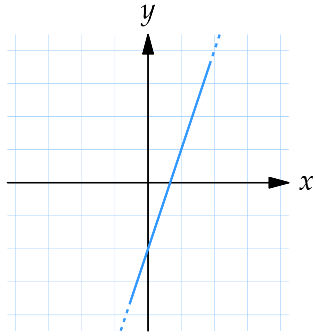
2.2:3 a) $x=9$ b) $x=\frac{7}{5}$ c) $x=\frac{4}{5}$
d) $x=\frac{1}{2}$

2.2:4 a) $-2x+y=3$ b) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

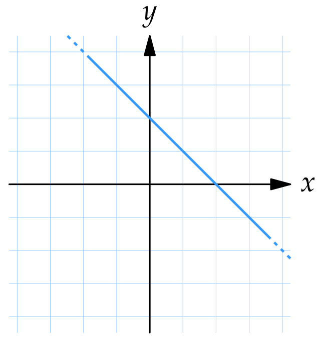
2.2:5 a) $y=-3x+9$ b) $y=-3x+1$
c) $y=3x+5$ d) $y=-\frac{1}{2}x+5$
e) $k=\frac{8}{5}$

2.2:6 a) $(-\frac{5}{3},0)$ b) $(0,5)$ c) $(0,-\frac{6}{5})$
d) $(12,-13)$ e) $(-\frac{1}{4},\frac{3}{2})$

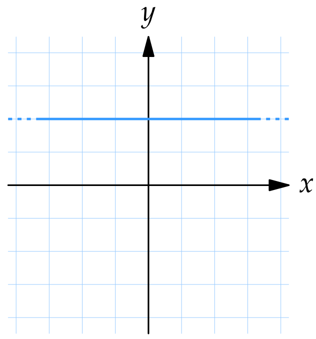
2.2:7 a)



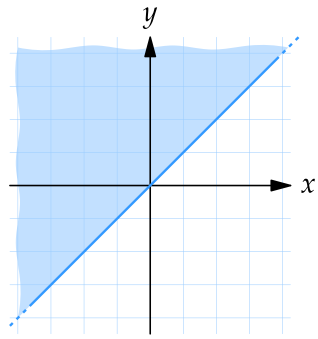
b)



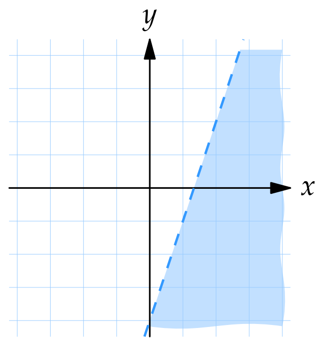
c)

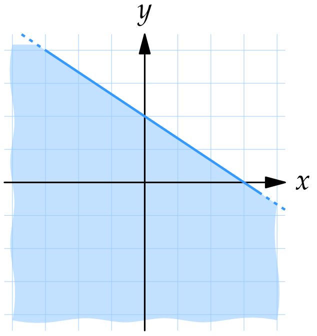


2.2:8 a)



b)



c) 

2.2:9 a) 4 a.e. b) 5 a.e. c) 6 a.e.

2.3:1 a) $(x-1)^2-1$ b) $(x+1)^2-2$
c) $-(x-1)^2+6$ d) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$

2.3:2 a) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y_1 = -5 \\ y_2 = 3 \end{cases}$
c) saknar (reella) lösning
d) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{13}{2} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{3}{5} \end{cases}$
f) $\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} \\ x_2 = 2 \end{cases}$

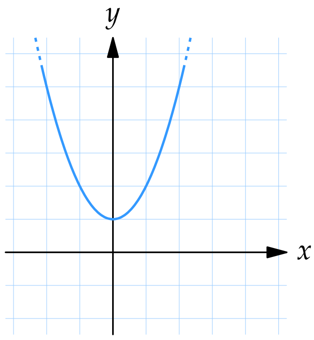
2.3:3 a) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = -8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 12 \end{cases}$
e) $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 8 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$

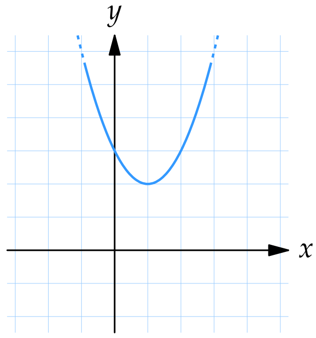
2.3:4 a) $ax^2-ax-2a=0\,,$
b) $ax^2-2ax-2a=0\,,$
c) $ax^2-(3+\sqrt{3}\,)ax+3\sqrt{3}\,a=0\,,$
där $a \neq 0$ är en konstant.

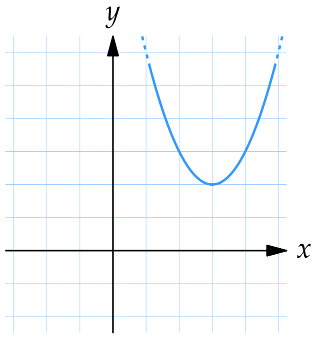
2.3:5 a) Exempelvis $x^2+14x+49=0$
b) x som uppfyller $3<x<4$
c) $b=-5$

2.3:6 a) 0 b) -2 c) $\frac{3}{4}$

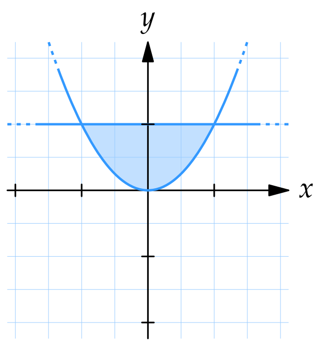
2.3:7 a) 1 b) $-\frac{7}{4}$ c) saknar max

2.3:8 a) 

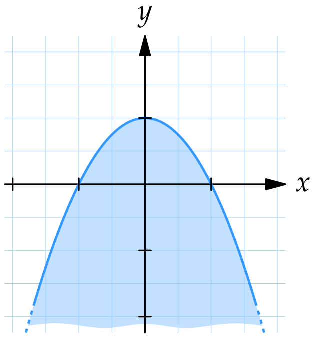
b) 

c) 

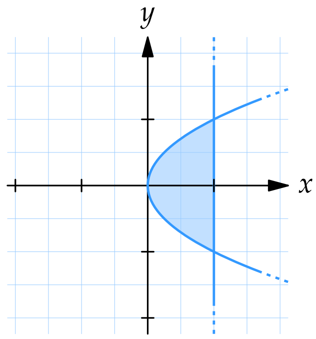
2.3:9 a) $(-1,0)$ och $(1,0)$
b) $(2,0)$ och $(3,0)$
c) $(1,0)$ och $(3,0)$

2.3:10 a) 

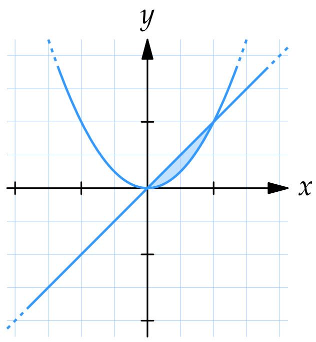
b)



c)



d)



Rötter och logaritmer

3.1:1 a) $2^{1/2}$ b) $7^{5/2}$ c) $3^{4/3}$ d) $3^{1/4}$

3.1:2 a) 3 b) 3 c) ej definierad
d) $5^{11/6}$ e) 12 f) 2 g) -5

3.1:3 a) 3 b) $4\sqrt{3}/3$ c) $2\sqrt{5}$
d) $2-\sqrt{2}$

3.1:4 a) 0,4 b) 0,3 c) $-4\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{3}$

3.1:5 a) $\sqrt{3}/3$ b) $7^{2/3}/7$ c) $3-\sqrt{7}$
d) $(\sqrt{17}+\sqrt{13}\,)/4$

3.1:6 a) $6+2\sqrt{2}+3\sqrt{5}+\sqrt{10}$
b) $-(5+4\sqrt{3}\,)/23$
c) $\frac{2}{3}\sqrt{6}+\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{2}{5}\sqrt{10}-\frac{2}{5}\sqrt{5}$
d) $(5\sqrt{3}+7\sqrt{2}-\sqrt{6}-12)/23$

3.1:7 a) $\sqrt{5}-\sqrt{7}$ b) $-\sqrt{35}$ c) $\sqrt{17}$

3.1:8 a) $\sqrt[3]{6}>\sqrt[3]{5}$
b) $7>\sqrt{7}$
c) $\sqrt{7}>2{,}5$
d) $\sqrt[3]{2}\cdot 3>\sqrt{2}\big(\sqrt[4]{3}\,\big)^3$

3.2:1 $x=5$

3.2:2 $x=1$

3.2:3 $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

3.2:4 saknar lösning.

3.2:5 $x=1$

3.2:6 $x=\frac{5}{4}$

3.3:1 a) $x=3$ b) $x=-1$ c) $x=-2$
d) $x=4$

3.3:2 a) -1 b) 4 c) -3 d) 0 e) 2
f) 3 g) 10 h) -2

3.3:3 a) 3 b) $-\frac{1}{2}$ c) -3 d) $\frac{7}{3}$ e) 4
f) -2 g) 1 h) $\frac{5}{2}$

3.3:4 a) 1 b) 0 c) $-\frac{1}{2}\lg 3$

3.3:5 a) 5 b) 0 c) 0 d) 0 e) -2
f) e^2

3.3:6 a) 1,262 b) 1,663 c) 4,762

3.4:1 a) $x=\ln 13$ b) $x=\dfrac{\ln 2-\ln 13}{1+\ln 3}$
c) $x=\dfrac{\ln 7-\ln 3}{1-\ln 2}$

3.4:2 a) $\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$
b) $x=\ln\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$
c) saknar lösning

3.4:3 a) $x = -\dfrac{1}{\ln 2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)^2 - 1}$

b) $x = \frac{5}{2}$

c) $x = 1$

Trigonometri

4.1:1 a) 90° och $\pi/2$ rad

b) 135° och $3\pi/4$ rad

c) -240° och $-4\pi/3$ rad

d) 2910° och $97\pi/6$ rad

4.1:2 a) $\pi/4$ rad

b) $3\pi/4$ rad

c) $-7\pi/20$ rad

d) $3\pi/2$ rad

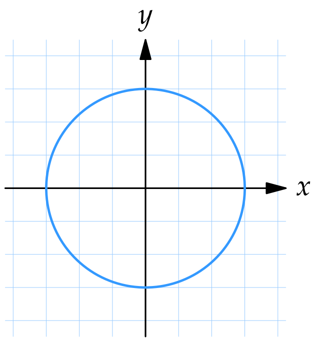
4.1:3 a) $x = 50$ b) $x = 5$ c) $x = 15$

4.1:4 a) 5 l.e. b) $\sqrt{61}$ l.e. c) $(2, 0)$

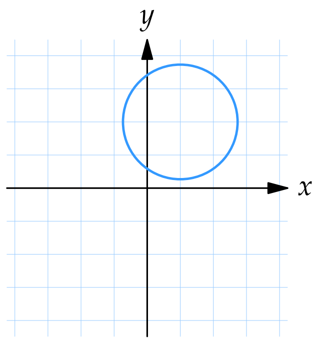
4.1:5 a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

b) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 13$

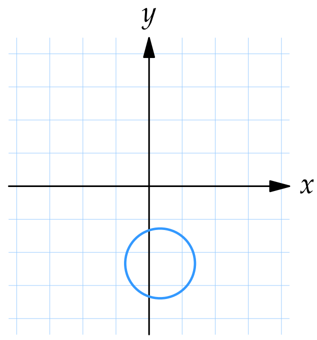
4.1:6 a)



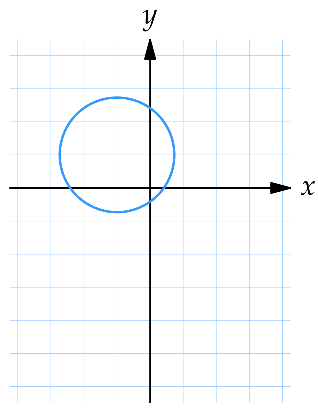
b)



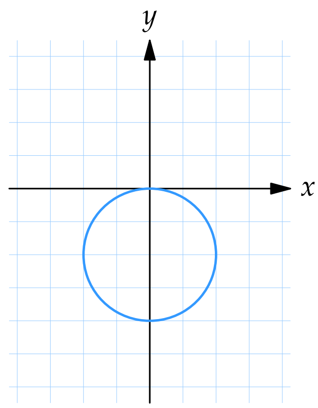
c)



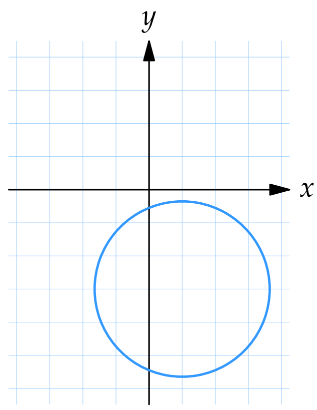
4.1:7 a)

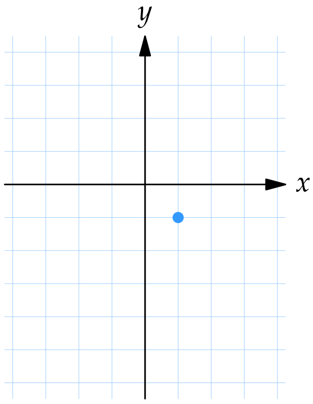


b)



c)



d) 

4.1:8 $10/\pi$ varv $\approx 3{,}2$ varv

4.1:9 $32\pi/3\ \text{cm}^2 \approx 33{,}5\ \text{cm}^2$

4.1:10 $x = 9$ dm

4.2:1 a) $x = 13 \cdot \tan 27^\circ \approx 6{,}62$
b) $x = 25 \cdot \cos 32^\circ \approx 21{,}2$
c) $x = 14/\tan 40^\circ \approx 16{,}7$
d) $x = 16/\cos 20^\circ \approx 17{,}0$
e) $x = 11/\sin 35^\circ \approx 19{,}2$
f) $x = 19/\tan 50^\circ \approx 15{,}9$

4.2:2 a) $\tan v = \frac{2}{5}$ b) $\sin v = \frac{7}{11}$
c) $\cos v = \frac{5}{7}$ d) $\sin v = \frac{3}{5}$
e) $v = 30^\circ$ f) $\sin(v/2) = \frac{1}{3}$

4.2:3 a) -1 b) 1 c) 0 d) 0
e) $1/\sqrt{2}$ f) $\sqrt{3}/2$

4.2:4 a) $\sqrt{3}/2$ b) $\frac{1}{2}$ c) -1 d) 0
e) $1/\sqrt{3}$ f) $\sqrt{3}$

4.2:5 a) $-1/\sqrt{2}$ b) 1 c) $\sqrt{3}/2$
d) -1

4.2:6 $x = \sqrt{3} - 1$

4.2:7 Bredd $= \dfrac{10}{\sqrt{3}-1}\,\text{m} \approx 13{,}7\,\text{m}.$

4.2:8 $\ell \cos\gamma = a\cos\alpha - b\cos\beta$

4.2:9 Avstånd $= \sqrt{205 - 48\sqrt{3}} \approx 11{,}0\,\text{km}$

4.3:1 a) $v = 9\pi/5$ b) $v = 6\pi/7$
c) $v = 9\pi/7$

4.3:2 a) $v = \pi/2$ b) $v = 3\pi/5$

4.3:3 a) $-a$ b) a c) $\sqrt{1-a^2}$
d) $\sqrt{1-a^2}$ e) $-a$
f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-a^2} + \dfrac{1}{2}\cdot a$

4.3:4 a) $1 - b^2$ b) $\sqrt{1-b^2}$
c) $2b\sqrt{1-b^2}$ d) $2b^2 - 1$
e) $\sqrt{1-b^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} + b\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
f) $b\cdot\dfrac{1}{2} + \sqrt{1-b^2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4.3:5 $\cos v = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$, $\tan v = \dfrac{5}{2\sqrt{6}}$

4.3:6 a) $\sin v = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan v = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}$
b) $\cos v = -\dfrac{\sqrt{91}}{10}$, $\tan v = -\dfrac{3}{\sqrt{91}}$
c) $\sin v = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos v = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

4.3:7 a) $\sin(x+y) = \dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$
b) $\sin(x+y) = \dfrac{3\sqrt{21}+8}{25}$

4.4:1 a) $v = \pi/6$, $v = 5\pi/6$
b) $v = \pi/3$, $v = 5\pi/3$
c) $v = \pi/2$
d) $v = \pi/4$, $v = 5\pi/4$
e) lösning saknas
f) $v = 11\pi/6$, $v = 7\pi/6$
g) $v = 5\pi/6$, $v = 11\pi/6$

4.4:2 a) $\begin{cases} x = \pi/3 + 2n\pi \\ x = 2\pi/3 + 2n\pi \end{cases}$
b) $\begin{cases} x = \pi/3 + 2n\pi \\ x = 5\pi/3 + 2n\pi \end{cases}$
c) $x = n\pi$
d) $\begin{cases} x = \pi/20 + 2n\pi/5 \\ x = 3\pi/20 + 2n\pi/5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = \pi/30 + 2n\pi/5 \\ x = \pi/6 + 2n\pi/5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = \pi/4 + 2n\pi/3 \\ x = 5\pi/12 + 2n\pi/3 \end{cases}$

4.4:3 a) $\begin{cases} x = \pi/6 + 2n\pi \\ x = 11\pi/6 + 2n\pi \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \pi/5 + 2n\pi \\ x = 4\pi/5 + 2n\pi \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 25^\circ + n \cdot 360^\circ \\ x = 75^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 5^\circ + n \cdot 120^\circ \\ x = 55^\circ + n \cdot 120^\circ \end{cases}$

4.4:4 $v_1 = 50^\circ$, $v_2 = 120^\circ$, $v_3 = 230^\circ$, $v_4 = 300^\circ$

4.4:5 a) $\begin{cases} x = n\pi \\ x = \pi/4 + n\pi/2 \end{cases}$

b) $x = n\pi/3$

c) $\begin{cases} x = \pi/20 + n\pi/2 \\ x = -\pi/30 + n\pi/3 \end{cases}$

4.4:6 a) $x = n\pi$

b) $\begin{cases} x = \pi/4 + 2n\pi \\ x = \pi/2 + n\pi \\ x = 3\pi/4 + 2n\pi \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2n\pi/3 \\ x = \pi + 2n\pi \end{cases}$

4.4:7 a) $\begin{cases} x = \pi/6 + 2n\pi \\ x = 5\pi/6 + 2n\pi \\ x = 3\pi/2 + 2n\pi \end{cases}$

b) $x = \pm\pi/3 + 2n\pi$

c) $\begin{cases} x = \pi/2 + 2n\pi \\ x = \pi/14 + 2n\pi/7 \end{cases}$

4.4:8 a) $\begin{cases} x = \pi/4 + 2n\pi \\ x = \pi/2 + n\pi \\ x = 3\pi/4 + 2n\pi \end{cases}$

b) $x = \pi/3 + n\pi$

c) $\begin{cases} x = n\pi \\ x = 3\pi/4 + n\pi \end{cases}$

Skriva matematik

5.1:1 a) `2-3+4`
b) `-1+0,3`
c) `-5-(-3)=-5+3`
d) `5/2+1 > 5/(2+1)`

5.1:2 a) `3\cdot 4\pm 4`
b) `4x^2-\sqrt{x}`
c) `4\cdot 3^n\ge n^3`
d) `3-(5-2)=-(-3+5-2)`

5.1:3 a) `\dfrac{x+1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}`
b) `\left(\dfrac{5}{x}-1\right)(1-x)`
c) `\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}`
d) `\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}`

5.1:4 a) `\sin^2 x+\cos x`
b) `\cos v=\cos\dfrac{3\pi}{2}`
c) `\cot 2x=\dfrac{1}{\tan 2x}`
d) `\tan\dfrac{u}{2}=\dfrac{\sin u}{1+\cos u}`

5.1:5 a) `\sqrt{4+x^2}`
b) `\sqrt[n]{x+y}\ne\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}`
c) `\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}`
d) `\left(\sqrt[4]{3}\right)^3 \sqrt[3]{2+\sqrt{2}}`

5.1:6 a) `\ln(4\cdot 3)=\ln 4+\ln 3`
b) `\ln(4-3)\ne \ln 4-\ln 3`
c) `\log_{2}4=\dfrac{\ln 4}{\ln 2}`
d) `2^{\log_{2}4}=4`

5.1:7 a) `4^{3/4}(1-(3-4))`
b) `2\sqrt{a+b}`
c) `\cot x=\frac{1}{2}\sin 20^{\circ}`

5.2:1 a) $\Leftarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Leftrightarrow$