MATH.SE

SVERIGES UNIVERSITETS MATEMATIKPORTAL

LÖSNINGAR TILL ÖVNINGAR I FÖRBEREDANDE KURS I MATEMATIK 1

Till detta kursmaterial finns prov och lärare på Internet.

Detta material är en utskrift av delar av det webbaserade innehållet i `wiki.math.se/wikis/forberedandematte1`

Studiematerialet hör till en kurs som ges i samarbete mellan flera av landets högskolor och centret MATH.SE.

Anmälan och tillgång till forum, examination och personlig mentor

Anmälan till kursen sker fortlöpande under året genom ett elektroniskt formulär på `www.math.se` och man får då direkt ett användarnamn och lösenord som ger tillgång till diskussionsforum, support, uppföljning och prov. Du får också en personlig mentor som hjälper dig att lyckas med dina studier. All examination sker via Internet efter hand som du arbetar med kursens avsnitt.

Rapportera tryckfel till `tek@kth.se`. Det utgår en belöning på en trisslott i hittelön för varje tryckfel som ingen rapporterat tidigare. Skicka därför gärna med din adress när du rapporterar tryckfel.

Lösningar till övningar i förberedande kurs i matematik 1

Innehåll

1.1 Olika typer av tal

1.1:1 a) Eftersom det inte finns några parenteser eller multiplikationer/divisioner så finns det inget deluttryck som vi måste räkna ut först, utan vi kan påbörja beräkningen av hela uttrycket med tumregeln att arbeta från vänster till höger. Vi börjar alltså med de två termerna längst till vänster,

$$\boxed{3-7}-4+6-5=\boxed{-4}-4+6-5.$$

Nästa steg är att vi lägger ihop de två termer som nu är längst till vänster,

$$\begin{aligned}&=\boxed{-4-4}+6-5\\&=\boxed{-8}+6-5,\end{aligned}$$

och vi fortsätter sedan beta av uttrycket från vänster till höger,

$$\begin{aligned}&=\boxed{-8+6}-5\\&=\boxed{-2}-5.\end{aligned}$$

Till slut har vi ett enkelt uttryck som vi kan beräkna på en gång,

$$\begin{aligned}&=-2-5\\&=-7.\end{aligned}$$

Det går också att skriva hela uttrycket som en summa av positiva och negativa tal,

$$3+(-7)+(-4)+6+(-5),$$

och addera ihop termerna i valfri ordning,

$$\begin{aligned}3+(-7)+(-4)+6+(-5)&=\boxed{3+(-7)}+(-4)+\boxed{6+(-5)}\\&=\boxed{(-4)}+(-4)+\boxed{1}\\&=(-4)+\boxed{(-4)+1}\\&=(-4)+\boxed{(-3)}\\&=-7.\end{aligned}$$

b) Närvaron av parenteser betyder att vi ska räkna ut deluttrycken inom parenteserna först,

$$3-\boxed{(7-4)}+\boxed{(6-5)}=3-\boxed{3}+\boxed{1}.$$

Sedan är det bara att lägga ihop termerna från vänster till höger,

$$\begin{aligned}&=\boxed{3-3}+1\\&=\boxed{0}+1\\&=1.\end{aligned}$$

c) Parenteserna talar om i vilken ordning uttrycket ska räknas ut och vi börjar med att räkna ut den innersta parentesen,

$$3-(7-\boxed{(4+6)}-5)=3-(7-\boxed{10}-5).$$

Sedan räknar vi ut nästa parentes,

$$\begin{aligned}&=3-\boxed{(7-10-5)}\\&=3-\boxed{(-8)},\end{aligned}$$

och när vi tar bort parentesen i " $-(-8)$" får vi " $+8$",

$$\begin{aligned}&=3+8\\&=11.\end{aligned}$$

d) Precis som tidigare börjar vi med att räkna ut det innersta parentesuttrycket först,

$$3-(7-\boxed{(4+6)})-5=3-(7-\boxed{10})-5,$$

och arbetar sedan successivt utåt,

$$\begin{aligned}&=3-\boxed{(7-10)}-5\\&=3-\boxed{(-3)}-5.\end{aligned}$$

Nu återstår bara att lägga ihop termerna från vänster till höger

$$\begin{aligned}&=\boxed{3-(-3)}-5\\&=\boxed{3+3}-5\\&=\boxed{6}-5\\&=1.\end{aligned}$$

1.1:2 a) Uttrycket består av två parenteser,

$$\boxed{(3-(7-4))}\cdot\boxed{(6-5)},$$

som vi kan räkna ut var för sig och sedan multiplicera ihop resultatet.
I det första parentesuttrycket räknar vi först ut den inre parentesen,

$$(3-\boxed{(7-4)})=(3-\boxed{3}),$$

och får därför att det första parentesuttrycket blir $3-3=0$.
Hela uttrycket är alltså lika med 0 gånger $(6-5)$, och eftersom 0 gånger någonting alltid ger 0 så blir svaret 0.

b) Först identifierar vi det innersta parentesuttrycket och beräknar detta,

$$3-((\,(7-4)\,+6)-5)=3-((\,3\,+6)-5).$$

I det uttryck som nu uppstår ringar vi in den innersta parentesen och beräknar den,

$$\begin{aligned}&=3-(\,(3+6)\,-5)\\&=3-(\quad 9\quad -5).\end{aligned}$$

Efter detta har vi bara en parentes kvar att räkna ut,

$$\begin{aligned}&=3-\,(9-5)\\&=3-\quad 4\quad,\end{aligned}$$

vilket till slut ger ett uttryck utan parenteser som vi direkt kan räkna ut

$$=-1.$$

c) Hela uttrycket kan vi dela upp i två delar

$$3\cdot(-7)\;-\;4\cdot(6-5)\,,$$

som vi kan räkna ut separat och sedan subtrahera från varandra.
Det första deluttrycket är lika med

$$3\cdot(-7)=-21,$$

medan det andra deluttrycket blir

$$4\cdot(6-5)=4\cdot 1=4.$$

Sammantaget får vi

$$3\cdot(-7)\;-\;4\cdot(6-5)\;=\;-21\;-\;4\;=-25.$$

d) Om vi försöker analysera hur uttrycket är uppbyggt så består det i sin mest övergripande form av en differens mellan två deluttryck,

$$3\cdot(-7)\;-\;(4+6)/(-5)\,,$$

som kan räknas ut oberoende av varandra och sedan subtraheras.
Går vi in på deluttrycken så består den första termen av en produkt och den andra av en division,

$$3\;\cdot\;(-7)\;-\;(4+6)\;/\;(-5)\,.$$

Vi kan därför exempelvis börja med att räkna ut täljaren $(4+6)$ i det andra deluttrycket,

$$3\cdot(-7)-\,(4+6)\,/(-5)=3\cdot(-7)-\,10\,/(-5).$$

Sedan kan vi hoppa över till det första deluttrycket och räkna ut multiplikationen,

$$\begin{aligned}&=\,3\cdot(-7)\,-10/(-5)\\&=\quad -21\quad -10/(-5),\end{aligned}$$

och därefter återgå till divisionen i den andra termen,

$$\begin{aligned}&=-21-\,10/(-5)\\&=-21-\quad(-2)\quad.\end{aligned}$$

Till slut har vi fått ett uttryck som kan beräknas direkt,

$$\begin{aligned}&=-21-(-2)\\&=-21+2\\&=-19.\end{aligned}$$

1.1:3 a) 8 är ett positivt heltal och därmed ett naturligt tal. Samtidigt är 8 också ett rationellt tal eftersom $8=8/1$ är en kvot mellan två heltal.

b) -4 är ett negativt heltal och därför inte ett naturligt tal, men det är ett rationellt tal eftersom $-4=(-4)/1$ är en kvot mellan två heltal.

c) $8-4=4$ är ett naturligt tal, heltal och rationellt tal. (Se motiveringen till deluppgift a).

d) $4-8=-4$ är ett heltal och rationellt tal. (Se motiveringen till deluppgift b.)

e) $8\cdot(-4)=-32$ är ett heltal och rationellt tal. (Se motiveringen till deluppgift b.)

f) $(-8)\cdot(-4)=32$ är ett naturligt tal, heltal och rationellt tal. (Se motiveringen till deluppgift a.)

1.1:4 a) $4/(-8)=-\frac{1}{2}$ är inte ett heltal men däremot ett rationellt tal eftersom det går att skriva talet med hjälp av heltal på bråkform.

b) $(-8)/(-4)=2$ är ett naturligt tal, heltal och rationellt tal. (Se motiveringen till deluppgift a i övning 1.1:3.)

c) $\sqrt{2}$ är inte ett rationellt tal, dvs. går inte att skriva som en kvot mellan två heltal, och då går det inte heller att skriva $\sqrt{2}/3$ som en kvot mellan två heltal. Talet $\sqrt{2}/3$ är alltså ett irrationellt tal.

d) $\left(\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{4^2}{(\sqrt{2}\,)^2} = \dfrac{16}{2} = 8$ är ett naturligt tal, heltal och rationellt tal.

e) π är som kanske bekant ett tal med oändligt många icke-periodiskt upprepande decimaler och går därför inte att skriva med hjälp av heltal på bråkform. Talet $-\pi$, som har samma decimalutveckling som π, är alltså ett irrationellt tal.

f) Addition mellan ett heltal och ett irrationellt tal ger alltid ett irrationellt tal eftersom summan har samma decimalutveckling som det irrationella talet. Talet $\pi + 1$ är alltså irrationellt.

1.1:5 a) Det är lättare att se den inbördes ordningen mellan talen om vi skriver dem som decimaltal.

Eftersom vi vet att $\frac{1}{5} = 0{,}2$ och $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ så får vi att

$$\frac{3}{5} = 3\cdot\frac{1}{5} = 3\cdot 0{,}2 = 0{,}6, \qquad \frac{5}{3} = \frac{3+2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1{,}666\ldots$$

och

$$\frac{7}{3} = \frac{6+1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2{,}333\ldots$$

Då ser vi att

$$\frac{3}{5} < \frac{5}{3} < 2 < \frac{7}{3}.$$

b) Vi skriver talen i decimalform och sedan kan vi jämföra dem. Genom att använda att $\frac{1}{10} = 0{,}1$, $\frac{1}{5} = 0{,}2$ och $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ så har vi att

$$-\tfrac{1}{2} = -0{,}5, \quad -\tfrac{1}{5} = -0{,}2, \quad -\tfrac{3}{10} = -0{,}3 \quad \text{och} \quad -\tfrac{1}{3} = -0{,}333\ldots$$

Håller vi bara i minnet att det är negativa tal så kan vi direkt se att

$$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < -\frac{3}{10} < -\frac{1}{5}.$$

c) Ganska enkelt ser vi att

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}5, \quad \tfrac{2}{3} = 2\cdot\tfrac{1}{3} = 0{,}666\ldots \quad \text{och} \quad \tfrac{3}{5} = 3\cdot\tfrac{1}{5} = 3\cdot 0{,}2 = 0{,}6.$$

Det betyder att

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}.$$

Eftersom det är svårare att direkt ta fram decimalutvecklingen av $\frac{5}{8}$ och $\frac{21}{34}$ så jämför vi istället $\frac{5}{8}$ och $\frac{21}{34}$ med $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ och $\frac{2}{3}$ genom att skriva om bråken till gemensam nämnare.

Vi börjar med att jämföra $\frac{5}{8}$ med $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ och $\frac{2}{3}$. Vi har att

- $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1\cdot 4}{2\cdot 4} = \dfrac{4}{8}$ och $\dfrac{5}{8}$
- $\dfrac{3}{5} = \dfrac{3\cdot 8}{5\cdot 8} = \dfrac{24}{40}$ och $\dfrac{5}{8} = \dfrac{5\cdot 5}{8\cdot 5} = \dfrac{25}{40}$
- $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2\cdot 8}{3\cdot 8} = \dfrac{16}{24}$ och $\dfrac{5}{8} = \dfrac{5\cdot 3}{8\cdot 3} = \dfrac{15}{24}$

Alltså är $\frac{1}{2} < \frac{5}{8}$, $\frac{3}{5} < \frac{5}{8}$ och $\frac{5}{8} < \frac{2}{3}$. Detta betyder att

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3}.$$

När vi jämför $\frac{21}{34}$ med $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$ och $\frac{2}{3}$ fås

- $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1\cdot 17}{2\cdot 17} = \dfrac{17}{34}$ och $\dfrac{21}{34}$
- $\dfrac{3}{5} = \dfrac{3\cdot 34}{5\cdot 34} = \dfrac{102}{170}$ och $\dfrac{21}{34} = \dfrac{21\cdot 5}{34\cdot 5} = \dfrac{105}{170}$
- $\dfrac{5}{8} = \dfrac{5\cdot 17}{8\cdot 17} = \dfrac{85}{136}$ och $\dfrac{21}{34} = \dfrac{21\cdot 4}{34\cdot 4} = \dfrac{84}{136}$

Slutsatsen från detta är att $\frac{1}{2} < \frac{21}{34}$, $\frac{3}{5} < \frac{21}{34}$ och $\frac{21}{34} < \frac{5}{8}$, dvs.

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{21}{34} < \frac{5}{8}.$$

Svaret blir att

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{21}{34} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3}.$$

1.1:6 a) För att bestämma decimalutvecklingen av talet $\frac{7}{6}$ använder vi den liggande stolen.

$$
\begin{array}{rl}
\underline{1{,}1666} & \\
7 & \!\!\underline{|6} \\
\underline{-6} & \\
10 & \\
\underline{-\ \ 6} & \\
40 & \\
\underline{-36} & \\
40 & \\
\underline{-36} & \\
40 & \\
\underline{-36} & \\
4 &
\end{array}
$$

Det var nödvändigt att ta med en extra decimal så att avrundningen blir korrekt. Svaret är 1,167.

b) Decimalutvecklingen får vi med den liggande stolen.

$$
\begin{array}{rl}
\underline{2{,}25} & \\
9 & \!\!\underline{|4} \\
\underline{-8} & \\
10 & \\
\underline{-\ \ 8} & \\
20 & \\
\underline{-20} & \\
0 &
\end{array}
$$

Eftersom decimalutvecklingen slutar efter två decimaler är alla resterande decimaler noll och svaret är 2,250.

c) Återigen använder vi den liggande stolen när vi tar fram decimalutvecklingen.

$$
\begin{array}{rl}
\underline{0{,}2857} & \\
20 & \!\!\underline{|7} \\
\underline{-14} & \\
60 & \\
\underline{-56} & \\
40 & \\
\underline{-35} & \\
50 & \\
\underline{-49} & \\
1 &
\end{array}
$$

I detta fall blir svaret 0,286.

d) I textavsnittet ges $\sqrt{2}$ med 24 korrekta decimaler,

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,\ldots,$$

och från denna decimalutveckling ser vi att $\sqrt{2}$ med tre korrekta decimaler är

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414$$

eftersom den fjärde decimalsiffran är 2 och avrundas därför nedåt.

1.1:7 a) Multiplicerar vi talet 3,14 med 100 så flyttas decimalkommat två steg åt höger, dvs.

$$100 \cdot 3{,}14 = 314,$$

och delar vi båda led med 100 ser vi att

$$3{,}14 = \frac{314}{100}.$$

Detta visar att 3,14 kan skrivas som en kvot mellan två heltal och därmed att det är ett rationellt tal.

b) Ett rationellt tal har alltid en decimalutveckling som från och med en viss decimal upprepar sig periodiskt.
I vårt fall så upprepas sekvensen 1416 i all oändlighet,

$$3{,}\underline{1416}\ \underline{1416}\ \underline{1416}\ \ldots$$

Med andra ord är talet rationellt.
Nästa problem är att skriva om talet som ett bråktal och då utnyttjar vi att multiplikation med 10 flyttar decimalkommat ett steg åt höger. Om vi skriver

$$x = 3\,,\underline{1416}\ \underline{1416}\ \underline{1416}\ \ldots$$

så är därför

$$
\begin{aligned}
10x &= 31\,,4161\ 4161\ 4161\ \ldots\\
100x &= 314\,,1614\ 1614\ 161\ \ldots\\
1000x &= 3141\,,6141\ 6141\ 61\ \ldots\\
10000x &= 31416\,,\underline{1416}\ \underline{1416}\ 1\ \ldots
\end{aligned}
$$

Notera att i $10000x$ har vi flyttat decimalkommat tillräckligt många steg så att decimalutvecklingen av $10000x$ har kommit i fas med decimalutvecklingen av x, dvs. de har samma decimalutveckling. Därför är

$$
\begin{aligned}
10000x - x &= 31416{,}\underline{1416}\ \underline{1416}\ \ldots - 3{,}\underline{1416}\ \underline{1416}\ \ldots\\
&= 31413 \quad \text{(decimalerna tar ut varandra)}
\end{aligned}
$$

och eftersom $10000x - x = (10000-1)x = 9999x$ så har vi alltså sambandet

$$9999x = 31413.$$

Löser vi ut x ur detta samband får vi x som en kvot mellan två heltal,

$$x = \frac{31413}{9999} \quad \left(= \frac{10471}{3333} \right).$$

c) Tittar vi närmare på talet så ser vi att sifferkombinationen 001 upprepas från och med den andra decimalen

$$0{,}2\,\underline{001}\,\underline{001}\,\underline{001}\,\ldots$$

och det avslöjar att talet är rationellt.

Genom att multiplicera talet med 10 ett antal gånger kan vi skifta decimalkommat stegvis åt höger,

$$\begin{aligned} x &= 0{,}2\,001\,001\,001\,\ldots \\ 10x &= 2{,}001\,001\,001\,\ldots \\ 100x &= 20{,}01\,001\,001\,\ldots \\ 1000x &= 200{,}1\,001\,001\,\ldots \\ 10000x &= 2001{,}001\,001\,\ldots \end{aligned}$$

I denna lista ser vi att talen $10x$ och $10000x$ har samma decimalutveckling, och det betyder att

$$\begin{aligned} 10000x - 10x &= 2001{,}001\,001\,\ldots - 2{,}001\,001\,\ldots \\ &= 1999 \quad \text{(exakt)}. \end{aligned}$$

Alltså är

$$9990x = 1999 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1999}{9990}.$$

d) Visserligen finns ett repetitivt mönster i decimalutveckling,

$$0{,}\underline{10}\,\underline{100}\,\underline{1000}\,\underline{10000}\,\underline{100000}\,\ldots,$$

men för att det ska vara ett rationellt tal måste decimalutvecklingen efter en viss decimal bestå av en sifferkombination som oavbrutet upprepar sig. Någon sådan upprepning finns inte i decimalutvecklingen ovan (siffergruppen 10, 100, 1000, … växer hela tiden i storlek). Talet är alltså inte rationellt.

1.2 Bråkräkning

1.2:1 a) För att bråktalen ska kunna adderas ihop behöver de först skrivas om så att de får samma nämnare, och det gör vi genom att förlänga bråken. Multiplicera bråkens täljare och nämnare med det andra bråktalets nämnare,

$$\frac{7\cdot 7}{4\cdot 7} + \frac{11\cdot 4}{7\cdot 4} = \frac{49}{28} + \frac{44}{28}.$$

Nu kan täljarna adderas ihop,

$$\frac{49}{28} + \frac{44}{28} = \frac{49+44}{28} = \frac{93}{28}.$$

b) Subtraktion fungerar på samma sätt som addition. Först förlänger vi bråken så att de får en gemensam nämnare (förläng med det andra bråkets nämnare),

$$\frac{2}{7} - \frac{1}{5} = \frac{2\cdot 5}{7\cdot 5} - \frac{1\cdot 7}{5\cdot 7} = \frac{10}{35} - \frac{7}{35}.$$

Sedan kan täljarna subtraheras,

$$\frac{10}{35} - \frac{7}{35} = \frac{10-7}{35} = \frac{3}{35}.$$

c) Vi förlänger bråken så att de får en gemensam nämnare,

$$\frac{1}{6} - \frac{2}{5} = \frac{1\cdot 5}{6\cdot 5} - \frac{2\cdot 6}{5\cdot 6} = \frac{5}{30} - \frac{12}{30},$$

och sedan kan täljarna subtraheras,

$$\frac{5}{30} - \frac{12}{30} = \frac{5-12}{30} = \frac{-7}{30} = -\frac{7}{30}.$$

d) När vi har tre bråktal inblandade i en addition så behöver vi förlänga varje bråk så att alla tre termer får samma nämnare. Det enklaste är att förlänga varje bråk med produkten av de andra bråkens nämnare,

$$\frac{1\cdot 4\cdot 5}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 4}{5\cdot 3\cdot 4} = \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60}.$$

När sedan alla tre bråk har gemensam nämnare kan de enkelt adderas ihop,

$$\frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60} = \frac{20+15+12}{60} = \frac{47}{60}.$$

e) Det första steget är att förlänga bråken så att de får en gemensam nämnare,

$$\frac{8}{7}+\frac{3}{4}-\frac{4}{3}=\frac{8\cdot 4\cdot 3}{7\cdot 4\cdot 3}+\frac{3\cdot 7\cdot 3}{4\cdot 7\cdot 3}-\frac{4\cdot 7\cdot 4}{3\cdot 7\cdot 4}=\frac{96}{84}+\frac{63}{84}-\frac{112}{84}.$$

Därefter kan uttrycket räknas ut genom att addera och subtrahera täljarna,

$$\frac{96}{84}+\frac{63}{84}-\frac{112}{84}=\frac{96+63-112}{84}=\frac{47}{84}.$$

1.2:2 a) Ett vanligt sätt att räkna ut uttrycket i uppgiften är att förlänga respektive bråk med det andra bråkets nämnare för att få en gemensam nämnare,

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}\cdot\frac{10}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{6}=\frac{10}{60}+\frac{6}{60},$$

men detta ger en gemensam nämnare 60 som är större än vad den egentligen behöver vara.

Om vi istället delar upp bråkens nämnare i så små heltalsfaktorer som möjligt,

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 5},$$

så ser vi att båda nämnarna innehåller faktorn 2 och då är det onödigt att ta med den faktorn när vi förlänger

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 5}=\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{5}{5}+\frac{1}{2\cdot 5}\cdot\frac{3}{3}=\frac{5}{30}+\frac{3}{30}.$$

Detta ger den minsta möjliga nämnaren (MGN) 30.

b) Att bestämma minsta gemensamma nämnare till uttrycket går ut på att förlänga bråken med så lite som möjligt för att bråken ska få en gemensam nämnare.

I detta fall behöver vi bara förlänga det första bråket med 2,

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2}-\frac{1}{8}=\frac{2}{8}-\frac{1}{8}.$$

Minsta gemensamma nämnare är alltså 8.

c) Vi delar upp de båda nämnarna i så små heltalsfaktorer som möjligt,

$$\begin{aligned}12&=2\cdot 6=2\cdot 2\cdot 3,\\ 14&=2\cdot 7.\end{aligned}$$

Uttrycket kan alltså skrivas som

$$\frac{1}{2\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 7}.$$

Här ser vi att nämnarna har faktorn 2 gemensamt som vi därför kan utelämna vid förlängningen, och förlänga det första bråket med 7 och det andra med $2\cdot 3$ så att de får den nya minsta möjliga nämnaren $2\cdot 2\cdot 3\cdot 7$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}-\frac{1}{14}&=\frac{1}{2\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 7}\\ &=\frac{1}{2\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{7}{7}-\frac{1}{2\cdot 7}\cdot\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}\\ &=\frac{7}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 7}-\frac{2\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 7}\\ &=\frac{7}{84}-\frac{6}{84}.\end{aligned}$$

Minsta gemensamma nämnare är 84.

d) Delar vi upp nämnaren i så små heltalsfaktorer som möjligt,

$$\begin{aligned}45&=5\cdot 9=5\cdot 3\cdot 3,\\ 75&=3\cdot 25=3\cdot 5\cdot 5,\end{aligned}$$

så kan uttrycket skrivas som

$$\frac{2}{3\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 5},$$

och då ser vi att nämnarna har $3\cdot 5$ som gemensam faktor. Förlänger vi därför det första bråket med 5 och det andra bråket med 3 så får resultatet minsta tänkbara nämnare,

$$\frac{2}{3\cdot 3\cdot 5}\cdot\frac{5}{5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 5}\cdot\frac{3}{3}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}+\frac{3}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}=\frac{10}{225}+\frac{3}{225}.$$

Minsta gemensamma nämnare är 225.

1.2:3 a) Nämnarna i uttrycket har talet 10 som gemensam faktor,

$$\frac{3}{2\cdot 10}+\frac{7}{5\cdot 10}-\frac{1}{10},$$

och därför räcker det med att förlänga bråken med de övriga faktorerna i nämnarna för att få en gemensam nämnare,

$$\frac{3}{20}\cdot\frac{5}{5}+\frac{7}{50}\cdot\frac{2}{2}-\frac{1}{10}\cdot\frac{5\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{15}{100}+\frac{14}{100}-\frac{10}{100}.$$

Minsta gemensamma nämnare (MGN) är alltså 100, och uttrycket blir lika med

$$\frac{15}{100}+\frac{14}{100}-\frac{10}{100}=\frac{15+14-10}{100}=\frac{19}{100}.$$

b) Dividerar vi successivt nämnarna med 2 så ser vi att

$$\begin{aligned} 24 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3,\\ 40 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5,\\ 16 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2, \end{aligned}$$

dvs. att de har faktorn $2\cdot 2\cdot 2 = 8$ gemensamt,

$$\frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{5\cdot 8} - \frac{1}{2\cdot 8},$$

och då behöver vi inte ta med 8 som faktor när vi förlänger bråken utan vi får en minsta gemensam nämnare genom att förlänga med de övriga faktorerna 2, 3 och 5,

$$\frac{1}{3\cdot 8}\cdot\frac{2\cdot 5}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8}\cdot\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 8}\cdot\frac{3\cdot 5}{3\cdot 5} = \frac{10}{240} + \frac{6}{240} - \frac{15}{240}.$$

MGN är 240 och svaret blir

$$\frac{10}{240} + \frac{6}{240} - \frac{15}{240} = \frac{10+6-15}{240} = \frac{1}{240}.$$

1.2:4 a) Vi beräknar dubbelbråket genom att förlänga med nämnaren inverterad,

$$\frac{\dfrac{3}{5}}{\dfrac{7}{10}} = \frac{\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{10}{7}}{\dfrac{\cancel{7}}{\cancel{10}}\cdot\dfrac{\cancel{10}}{\cancel{7}}} = \frac{\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{10}{7}}{1} = \frac{3}{5}\cdot\frac{10}{7}.$$

Uttrycket kan nu förenklas ytterligare genom att den gemensamma faktorn 5 förkortas bort,

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{7} = \frac{3}{\cancel{5}}\cdot\frac{2\cdot\cancel{5}}{7} = \frac{3\cdot 2}{7} = \frac{6}{7}.$$

b) Förläng dubbelbråket med nämnaren inverterad,

$$\frac{\dfrac{2}{7}}{\dfrac{3}{8}} = \frac{\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{8}{3}}{\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{8}}\cdot\dfrac{\cancel{8}}{\cancel{3}}} = \frac{2}{7}\cdot\frac{8}{3}.$$

I högerledet har inte täljaren och nämnaren någon gemensam faktor så svaret blir

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{8}{3} = \frac{2\cdot 8}{7\cdot 3} = \frac{16}{21}.$$

Anm. Man kan också lära sig en snabbformel för dubbelbråk som säger att när uttrycket skrivs om med bara ett bråkstreck så byter nämnarna i delbråken plats,

$$\frac{\dfrac{2}{7}}{\dfrac{3}{8}} = \frac{2\cdot 8}{3\cdot 7}.$$

c) *Metod 1*

Om vi först räknar ut täljaren i huvudbråket så får vi

$$\frac{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{3}{10}} = \frac{\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{5}{5}-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{4}}{\dfrac{3}{10}} = \frac{\dfrac{5}{20}-\dfrac{4}{20}}{\dfrac{3}{10}} = \frac{\dfrac{1}{20}}{\dfrac{3}{10}}.$$

Dubbelbråket i högerledet blir, efter förlängning med $\frac{10}{3}$,

$$\frac{\dfrac{1}{20}}{\dfrac{3}{10}} = \frac{\dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{10}{3}}{\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{10}}\cdot\dfrac{\cancel{10}}{\cancel{3}}} = \frac{1}{20}\cdot\frac{10}{3},$$

och sedan förkortar vi bort den gemensamma faktorn 10,

$$\frac{1}{20}\cdot\frac{10}{3} = \frac{1}{2\cdot\cancel{10}}\cdot\frac{\cancel{10}}{3} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}.$$

Metod 2

Ett annat sätt att beräkna uttrycket är att dela upp det i två separata termer,

$$\frac{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{3}{10}} = \frac{\dfrac{1}{4}}{\dfrac{3}{10}} - \frac{\dfrac{1}{5}}{\dfrac{3}{10}}.$$

Båda dubbelbråken i högerledet förenklar vi genom att förlänga med $\frac{10}{3}$,

$$\frac{\dfrac{1}{4}}{\dfrac{3}{10}} - \frac{\dfrac{1}{5}}{\dfrac{3}{10}} = \frac{\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{10}{3}}{\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{10}}\cdot\dfrac{\cancel{10}}{\cancel{3}}} - \frac{\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{10}{3}}{\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{10}}\cdot\dfrac{\cancel{10}}{\cancel{3}}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{10}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{10}{3}.$$

Istället för att multiplicera ihop $4\cdot 3$ resp. $5\cdot 3$ så behåller vi nämnarna faktoriserade och ser att om vi förlänger det första bråket med 5 och det andra bråket med 4 så får de gemensam nämnare,

$$\frac{10}{4\cdot 3} - \frac{10}{5\cdot 3} = \frac{10}{4\cdot 3}\cdot\frac{5}{5} - \frac{10}{5\cdot 3}\cdot\frac{4}{4} = \frac{50-40}{3\cdot 4\cdot 5} = \frac{10}{3\cdot 4\cdot 5}.$$

Eftersom $10 = 2\cdot 5$ och $4 = 2\cdot 2$ så kan vi förkorta bort de gemensamma faktorerna 2 och 5, och få svaret

$$\frac{10}{3\cdot 4\cdot 5} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot\cancel{5}} = \frac{1}{3\cdot 2} = \frac{1}{6}.$$

1.2:5 a) Vi börjar med att räkna ut nämnaren i huvudbråket,

$$\frac{2}{\frac{1}{7}-\frac{1}{15}} = \frac{2}{\frac{1}{7}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{15}\cdot\frac{7}{7}} = \frac{2}{\frac{15-7}{7\cdot 15}} = \frac{2}{\frac{8}{7\cdot 15}}.$$

Notera att vi behåller $7\cdot 15$ som det är och multiplicerar inte ihop det till 105 eftersom detta underlättar förkortningsarbetet senare. Bråket i högerledet beräknar vi genom att förlänga med $(7\cdot 15)/8$,

$$\frac{2}{\frac{8}{7\cdot 15}} = \frac{2\cdot\frac{7\cdot 15}{8}}{\frac{\cancel{8}}{\cancel{7\cdot 15}}\cdot\frac{\cancel{7\cdot 15}}{\cancel{8}}} = \frac{2\cdot 7\cdot 15}{8}.$$

Delar vi nu upp 8 och 15 i så små heltalsfaktorer som möjligt, $8 = 2\cdot 2\cdot 2$ och $15 = 3\cdot 5$, så ser vi att svaret på förenklad form blir

$$\frac{2\cdot 7\cdot 15}{8} = \frac{\cancel{2}\cdot 7\cdot 3\cdot 5}{\cancel{2}\cdot 2\cdot 2} = \frac{7\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2} = \frac{105}{4}.$$

b) *Metod 1*

En lösning är att beräkna täljaren och nämnaren i huvudbråket var för sig,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{3}{6}+\frac{2}{6} = \frac{5}{6},$$
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3} = \frac{2}{6}-\frac{3}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Hela uttrycket reduceras då till ett dubbelbråk som vi räknar ut genom att förlänga,

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{-\frac{1}{6}} = \frac{\frac{5}{\cancel{6}}\cdot\cancel{6}}{-\frac{1}{\cancel{6}}\cdot\cancel{6}} = \frac{5}{-1} = -5.$$

Metod 2

Ett annat sätt att lösa uppgiften är att förlänga huvudbråket med $3\cdot 2 = 6$ så att nämnarna i delbråken $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{3}$ kan förkortas bort i ett steg,

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot 6}{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot 6} = \frac{\frac{6}{2}+\frac{6}{3}}{\frac{6}{3}-\frac{6}{2}} = \frac{3+2}{2-3} = \frac{5}{-1} = -5.$$

c) *Metod 1*

Vi beräknar täljaren och nämnaren först,

$$\frac{3}{10}-\frac{1}{5} = \frac{3}{10}-\frac{1\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{3-2}{10} = \frac{1}{10},$$
$$\frac{7}{8}-\frac{3}{16} = \frac{7\cdot 2}{8\cdot 2}-\frac{3}{16} = \frac{14-3}{16} = \frac{11}{16}.$$

Uttrycket blir därför

$$\frac{\frac{3}{10}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{8}-\frac{3}{16}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{11}{16}} = \frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{16}{11}}{\frac{\cancel{11}}{\cancel{16}}\cdot\frac{\cancel{16}}{\cancel{11}}} = \frac{16}{10\cdot 11},$$

och eftersom $16 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ och $10 = 2\cdot 5$ så är det förkortade svaret

$$\frac{16}{10\cdot 11} = \frac{\cancel{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{\cancel{2}\cdot 5\cdot 11} = \frac{8}{55}.$$

Metod 2

Om vi betraktar de enskilda bråktalen $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{8}$ och $\frac{3}{16}$ så ser vi att nämnarna kan faktoriseras som

$$10 = 2\cdot 5,\quad 8 = 2\cdot 2\cdot 2\quad \text{och}\quad 16 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2,$$

och därmed är $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5 = 80$ bråktalens minsta gemensamma nämnare.

Förlänger vi därför huvudbråket med 80 så kommer alla nämnare kunna förkortas bort i ett svep,

$$\frac{\frac{3}{10}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{8}-\frac{3}{16}} = \frac{\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{5}\right)\cdot 80}{\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{16}\right)\cdot 80} = \frac{\frac{3\cdot 80}{10}-\frac{1\cdot 80}{5}}{\frac{7\cdot 80}{8}-\frac{3\cdot 80}{16}}$$
$$= \frac{\frac{3\cdot 8\cdot\cancel{10}}{\cancel{10}}-\frac{8\cdot 2\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}}}{\frac{7\cdot\cancel{8}\cdot 10}{\cancel{8}}-\frac{3\cdot\cancel{16}\cdot 5}{\cancel{16}}} = \frac{3\cdot 8-8\cdot 2}{7\cdot 10-3\cdot 5} = \frac{8}{55}.$$

1.2:6 När man arbetar med stora uttryck är det ofta bra att gå fram stegvis. Ett första steg på vägen kan vara att förenkla deluttrycken

$$\frac{2}{3+\frac{1}{2}},\quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}\quad \text{och}\quad \frac{3}{2-\frac{2}{7}}.$$

Det kan vi göra genom att förlänga med 2, $3\cdot 4 = 12$ respektive 7 för att få bort delbråken,

$$\begin{aligned}\frac{2}{3+\dfrac{1}{2}} &= \frac{2\cdot 2}{\left(3+\dfrac{1}{2}\right)\cdot 2} = \frac{4}{3\cdot 2+\dfrac{1}{2}\cdot 2} = \frac{4}{6+1} = \frac{4}{7},\\ \frac{\dfrac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\dfrac{1}{3}} &= \frac{\dfrac{1}{2}\cdot 12}{\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\right)\cdot 12} = \frac{6}{\dfrac{12}{4}-\dfrac{12}{3}} = \frac{6}{3-4} = \frac{6}{-1} = -6,\\ \frac{3}{2-\dfrac{2}{7}} &= \frac{3\cdot 7}{\left(2-\dfrac{2}{7}\right)\cdot 7} = \frac{21}{2\cdot 7-\dfrac{2}{7}\cdot 7} = \frac{21}{14-2} = \frac{21}{12}.\end{aligned}$$

Hela uttrycket är därför lika med

$$\frac{\dfrac{4}{7}-6}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{21}{12}}.$$

Förlänger vi huvudbråket med den minsta gemensamma nämnaren $7\cdot 12$ till bråken $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{2}$ och $\frac{21}{12}$, så får vi heltal i täljaren och nämnaren,

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{4}{7}-6}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{21}{12}} &= \frac{\left(\dfrac{4}{7}-6\right)\cdot 7\cdot 12}{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{21}{12}\right)\cdot 7\cdot 12} = \frac{4\cdot 12-6\cdot 7\cdot 12}{7\cdot 6-21\cdot 7}\\ &= \frac{(4-6\cdot 7)\cdot 12}{(6-21)\cdot 7} = \frac{-38\cdot 12}{-15\cdot 7} = \frac{38\cdot 12}{15\cdot 7}.\end{aligned}$$

Genom att faktorisera 12, 15 och 38,

$$\begin{aligned}12 &= 2\cdot 6 = 2\cdot 2\cdot 3,\\ 15 &= 3\cdot 5,\\ 38 &= 2\cdot 19,\end{aligned}$$

så kan svaret förkortas till

$$\frac{38\cdot 12}{15\cdot 7} = \frac{2\cdot 19\cdot 2\cdot 2\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 5\cdot 7} = \frac{152}{35}.$$

1.3 Potenser

1.3:1 a) Vi beräknar först 2^3 och 3^2,

$$\begin{aligned}2^3 &= 2\cdot 2\cdot 2 = 4\cdot 2 = 8,\\ 3^2 &= 3\cdot 3 = 9.\end{aligned}$$

Alltså är $2^3\cdot 3^2 = 8\cdot 9 = 72$.

b) Innan vi sätter igång och räknar kan det vara bra att se över uttrycket och först undersöka om det kan förenklas med potenslagarna för att reducera räknearbetet något.
Eftersom $9 = 3\cdot 3 = 3^2$ så är $9^{-2} = (3^2)^{-2} = 3^{2\cdot(-2)} = 3^{-4}$, och därför är

$$3^5\cdot 9^{-2} = 3^5\cdot 3^{-4} = 3^{5-4} = 3^1 = 3.$$

c) Här kan vi direkt använda definitionen,

$$(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = 25\cdot(-5) = -125.$$

d) Genom att använda potenslagarna kan vi omforma uttrycket,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{2^{-3}}{3^{-3}} = \frac{\dfrac{1}{2^3}}{\dfrac{1}{3^3}} = \frac{\dfrac{1}{2^3}\cdot 3^3}{\dfrac{1}{3^3}\cdot 3^3} = \frac{\dfrac{3^3}{2^3}}{1} = \frac{3^3}{2^3},$$

och sedan utföra uträkningen,

$$\frac{3^3}{2^3} = \frac{3\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{27}{8}.$$

1.3:2 a) Varje faktor i uttrycket kan vi skriva som en potens av 2,

$$\begin{aligned}2 &= 2^1,\\ 4 &= 2\cdot 2 = 2^2,\\ 8 &= 2\cdot 4 = 2\cdot 2\cdot 2 = 2^3,\end{aligned}$$

vilket ger att

$$2\cdot 4\cdot 8 = 2^1\cdot 2^2\cdot 2^3 = 2^{1+2+3} = 2^6.$$

b) Eftersom $0{,}25 = \frac{1}{4}$ och $4 = 2\cdot 2 = 2^2$ så är

$$0{,}25 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}.$$

c) Svaret är att $2^0 = 1$ (se kursmaterialet).

1.3:3 a) Direkt ser vi att $\frac{1}{3} = 3^{-1}$.

b) Om vi delar 243 successivt med 3:or så ser vi att

$$243 = 3 \cdot 81 = 3 \cdot 3 \cdot 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5.$$

c) Talet 9 kan skrivas som $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$ och därför är $9^2 = (3^2)^2 = 3^{2\cdot 2} = 3^4$.

d) Eftersom $27 = 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ så är $\dfrac{1}{27} = \dfrac{1}{3^3} = 3^{-3}$.

e) Talet 9 kan skrivas som $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$ och därför är nämnaren i uttrycket lika med

$$9^2 = (3^2)^2 = 3^{2\cdot 2} = 3^4.$$

Hela kvoten blir

$$\frac{3}{9^2} = \frac{3^1}{3^4} = 3^{1-4} = 3^{-3}.$$

1.3:4 a) Eftersom basen är densamma i båda faktorerna kan exponenterna kombineras enligt potenslagarna,

$$2^9 \cdot 2^{-7} = 2^{9-7} = 2^2 = 4.$$

Alternativt kan potensuttrycken utvecklas helt och sedan förkortas,

$$2^9 \cdot 2^{-7} = 2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2 \cdot 2 = 4.$$

b) Talen 9 och 27 kan båda skrivas som potenser av 3,

$$\begin{aligned} 9 &= 3 \cdot 3 = 3^2, \\ 27 &= 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3. \end{aligned}$$

Därmed kan alla faktorer i uttrycket skrivas med en gemensam bas och hela produkten kan förenklas med potenslagarna,

$$\begin{aligned} 3^{13} \cdot 9^{-3} \cdot 27^{-2} &= 3^{13} \cdot (3^2)^{-3} \cdot (3^3)^{-2} \\ &= 3^{13} \cdot 3^{2\cdot(-3)} \cdot 3^{3\cdot(-2)} \\ &= 3^{13} \cdot 3^{-6} \cdot 3^{-6} \\ &= 3^{13-6-6} \\ &= 3^1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

c) Hela uttrycket består av faktorer med bas 5 så potenslagarna kan användas för att först förenkla uttrycket,

$$\begin{aligned} \frac{5^{12}}{5^{-4}} \cdot (5^2)^{-6} &= \frac{5^{12}}{5^{-4}} \cdot 5^{2\cdot(-6)} = \frac{5^{12}}{5^{-4}} \cdot 5^{-12} = \frac{5^{12} \cdot 5^{-12}}{5^{-4}} \\ &= \frac{5^{12-12}}{5^{-4}} = \frac{5^0}{5^{-4}} = 5^{0-(-4)} = 5^4 \\ &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625. \end{aligned}$$

d) Deluttrycket 2^{2^3} ska tolkas som att 2 är upphöjt till 2^3, och eftersom $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ så är $2^{2^3} = 2^8$.
För att räkna ut nästa deluttryck, $(-2)^{-4}$, kan det vara bra att ta ett steg i taget,

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{((-1) \cdot 2)^4} = \frac{1}{(-1)^4 \cdot 2^4} = \frac{1}{1 \cdot 2^4} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}.$$

Alltså är

$$2^{2^3} \cdot (-2)^{-4} = 2^8 \cdot 2^{-4} = 2^{8-4} = 2^4 = 16.$$

e) Eftersom $5^9 = 5^{8+1} = 5^8 \cdot 5^1 = 5^8 \cdot 5$ så har de två termerna innanför parentesen 5^8 som gemensam faktor och som kan brytas ut utanför parentesen,

$$\begin{aligned} \bigl(5^8 + 5^9\bigr)^{-1} &= \bigl(5^8 + 5^8 \cdot 5\bigr)^{-1} = \bigl(5^8 \cdot (1+5)\bigr)^{-1} \\ &= (5^8 \cdot 6)^{-1} = 5^{8\cdot(-1)} \cdot 6^{-1} \\ &= 5^{-8} \cdot 6^{-1}. \end{aligned}$$

Vidare är $625 = 5 \cdot 125 = 5 \cdot 5 \cdot 25 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ och vi får att

$$\begin{aligned} 625 \cdot \bigl(5^8 + 5^9\bigr)^{-1} &= 5^4 \cdot 5^{-8} \cdot 6^{-1} = 5^{4-8} \cdot 6^{-1} \\ &= 5^{-4} \cdot 6^{-1} = \frac{1}{5^4} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{5^4 \cdot 6} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6} \\ &= \frac{1}{3750}. \end{aligned}$$

1.3:5 a) Talet 4 kan skrivas som $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$ och då får vi med potenslagarna att

$$4^{1/2} = (2^2)^{1/2} = 2^{2\cdot 1/2} = 2^1 = 2.$$

Anm. Ett annat beteckningssätt för $4^{1/2}$ är $\sqrt{4}$ (roten ur 4); mer om detta i avsnittet om rötter senare i kursen.

b) Om vi utnyttjar att $4 = 2\cdot 2 = 2^2$ så ger potenslagarna att

$$4^{-1/2} = (2^2)^{-1/2} = 2^{2\cdot(-1/2)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

c) Vi kan skriva $9 = 3\cdot 3 = 3^2$ och därefter ger potenslagarna att

$$9^{3/2} = (3^2)^{3/2} = 3^{2\cdot 3/2} = 3^3 = 3\cdot 3\cdot 3 = 27.$$

d) Med potenslagarna kan uttrycket först förenklas innan det räknas ut,

$$(47^{2/3})^3 = 47^{(2/3)\cdot 3} = 47^2 = 47\cdot 47 = 2209.$$

e) Var för sig är $3^{1{,}4}$ och $3^{0{,}6}$ svåra att räkna ut men ihopmultiplicerade ger potenslagarna att

$$3^{1{,}4}\cdot 3^{0{,}6} = 3^{1{,}4+0{,}6} = 3^2 = 3\cdot 3 = 9.$$

f) Hela uttrycket är ganska komplicerat så det kan vara bra att först förenkla deluttrycken $(125^{1/3})^2$ och $(27^{1/3})^{-2}$,

$$\begin{aligned}(125^{1/3})^2 &= 125^{(1/3)\cdot 2} = 125^{2/3},\\ (27^{1/3})^{-2} &= 27^{(1/3)\cdot(-2)} = 27^{-2/3}.\end{aligned}$$

Sedan kan baserna 125, 27 och 9 skrivas om som

$$\begin{aligned}125 &= 5\cdot 25 = 5\cdot 5\cdot 5 = 5^3,\\ 27 &= 3\cdot 9 = 3\cdot 3\cdot 3 = 3^3,\\ 9 &= 3\cdot 3 = 3^2.\end{aligned}$$

Med hjälp av potenslagarna blir

$$\begin{aligned}(125^{1/3})^2\cdot(27^{1/3})^{-2}\cdot 9^{1/2} &= 125^{2/3}\cdot 27^{-2/3}\cdot 9^{1/2}\\ &= (5^3)^{2/3}\cdot(3^3)^{-2/3}\cdot(3^2)^{1/2}\\ &= 5^{3\cdot 2/3}\cdot 3^{3\cdot(-2/3)}\cdot 3^{2\cdot 1/2}\\ &= 5^2\cdot 3^{-2}\cdot 3^1\\ &= 5^2\cdot 3^{-2+1}\\ &= 5^2\cdot 3^{-1}\\ &= 5\cdot 5\cdot \tfrac{1}{3}\\ &= \tfrac{25}{3}.\end{aligned}$$

1.3:6 a) Ett potensuttryck som har en positiv exponent blir större ju större basen är. Därför är $256^{1/3} > 200^{1/3}$ eftersom $256 > 200$ och exponenten $\frac{1}{3}$ är positiv.

b) När ett potensuttryck har en negativ exponent, då minskar uttryckets värde när basen växer. Alltså är

$$0{,}4^{-3} > 0{,}5^{-3}.$$

Ett annat sätt att se på saken är att skriva om de två potenserna som

$$0{,}5^{-3} = \frac{1}{0{,}5^3} \quad\text{och}\quad 0{,}4^{-3} = \frac{1}{0{,}4^3},$$

och eftersom $0{,}5^3 > 0{,}4^3$ (se a-uppgiften) så följer att

$$\frac{1}{0{,}4^3} > \frac{1}{0{,}5^3},$$

dvs. $0{,}4^{-3} > 0{,}5^{-3}$.

c) Om basen i ett potensuttryck är mellan 0 och 1 då blir uttrycket mindre när exponenten växer. Detta medför att $0{,}2^5 > 0{,}2^7$.

d) Ett sätt att jämföra de två talen är att skriva om potensen $(5^{1/3})^4$ så att den får samma exponent som $400^{1/3}$,

$$(5^{1/3})^4 = 5^{(1/3)\cdot 4} = 5^{4\cdot(1/3)} = (5^4)^{1/3} = (5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)^{1/3} = 625^{1/3}.$$

Nu ser vi att $(5^{1/3})^4 > 400^{1/3}$ eftersom $625 > 400$ och exponenten $\frac{1}{3}$ är positiv.

e) Både 125 och 625 kan skrivas som potenser av 5,

$$\begin{aligned}125 &= 5\cdot 25 = 5\cdot 5\cdot 5 = 5^3,\\ 625 &= 5\cdot 125 = 5\cdot 5^3 = 5^4,\end{aligned}$$

och det betyder att

$$\begin{aligned}125^{1/2} &= (5^3)^{1/2} = 5^{3\cdot 1/2} = 5^{3/2},\\ 625^{1/3} &= (5^4)^{1/3} = 5^{4\cdot 1/3} = 5^{4/3}.\end{aligned}$$

Från detta ser vi att $125^{1/2} > 625^{1/3}$ i och med att exponenten $\frac{3}{2}$ är större än $\frac{4}{3}$ och basen 5 är större än 1.

f) Exponenterna 40 och 56 kan vi faktorisera,

$$\begin{aligned}40 &= 4\cdot 10 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5 = 2^3\cdot 5,\\ 56 &= 7\cdot 8 = 7\cdot 2\cdot 4 = 7\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^3\cdot 7,\end{aligned}$$

och då ser vi att de har $2^3 = 8$ som gemensam faktor. Denna faktor kan vi bryta ut i en ”yttre exponent”,

$$\begin{aligned}3^{40} &= 3^{5\cdot 8} = (3^5)^8 = (3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)^8 = 243^8,\\ 2^{56} &= 2^{7\cdot 8} = (2^7)^8 = (2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)^8 = 128^8.\end{aligned}$$

Detta visar att $3^{40} = 243^8$ är större än $2^{56} = 128^8$.

2.1 Algebraiska uttryck

2.1:1 a) Med den distributiva lagen kan vi multiplicera in faktorn $3x$ in i parentesen $(x-1)$. Varje term i $(x-1)$ multipliceras då med $3x$,

$$3x(x-1) = 3x\cdot x - 3x\cdot 1 = 3x^2 - 3x.$$

b) När faktorn xy multipliceras in i parentesuttrycket $1+x-x^2$ ger den distributiva lagen att alla termer 1, x och $-x^2$ multipliceras med xy,

$$\begin{aligned}(1+x-x^2)xy &= 1\cdot xy + x\cdot xy - x^2\cdot xy\\ &= xy + x^2y - x^3y.\end{aligned}$$

c) Faktorn $-x^2$ kan skrivas som $(-1)x^2$ och båda faktorerna multipliceras in i parentesen,

$$\begin{aligned}-x^2(4-y^2) &= (-1)x^2(4-y^2)\\ &= (-1)x^2\cdot 4 - (-1)x^2\cdot y^2\\ &= -4x^2 + x^2y^2.\end{aligned}$$

d) Efter att x^3y^2 multipliceras in i parentesen kan vi förkorta bort faktorer som förekommer både i täljaren och nämnaren,

$$\begin{aligned}x^3y^2\Bigl(\frac{1}{y}-\frac{1}{xy}+1\Bigr) &= x^3y^2\cdot\frac{1}{y} - x^3y^2\cdot\frac{1}{xy} + x^3y^2\cdot 1\\ &= \frac{x^3y^2}{y} - \frac{x^3y^2}{xy} + x^3y^2\\ &= x^3y - x^2y + x^3y^2,\end{aligned}$$

där vi gjort förkortningarna

$$\begin{aligned}\frac{x^3y^2}{y} &= \frac{x^3\cdot y\cdot \cancel{y}}{\cancel{y}} = x^3y,\\ \frac{x^3y^2}{xy} &= \frac{\cancel{x}\cdot x\cdot x\cdot y\cdot \cancel{y}}{\cancel{x}\cdot\cancel{y}} = x^2y.\end{aligned}$$

e) Använder vi kvadreringsregeln $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ med $a=x$ och $b=7$ så ser vi direkt att

$$(x-7)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 7 + 7^2 = x^2 - 14x + 49.$$

Ett alternativ är att skriva kvadraten som $(x-7)\cdot(x-7)$ och sedan multiplicera ihop parenteserna i två steg,

$$\begin{aligned}(x-7)(x-7) &= (x-7)\cdot x - (x-7)\cdot 7\\ &= x\cdot x - 7\cdot x - (x\cdot 7 - 7\cdot 7)\\ &= x^2 - 7x - (7x-49)\\ &\overset{*}{=} x^2 - 7x - 7x + 49\\ &= x^2 - (7+7)x + 49\\ &= x^2 - 14x + 49.\end{aligned}$$

I ledet som markerats med en $*$ har vi tagit bort parentesen och byter samtidigt tecken på alla termer inuti parentesen.

f) Kvadreringsregeln $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ med $a=5$ och $b=4y$ ger att

$$\begin{aligned}(5+4y)^2 &= 5^2 + 2\cdot 5\cdot 4y + (4y)^2\\ &= 25 + 10\cdot 4y + 4^2y^2\\ &= 25 + 40y + 16y^2\\ &= 16y^2 + 40y + 25.\end{aligned}$$

g) Uttrycket i uppgiften är i formen $(a-b)^2$ där $a=y^2$ och $b=3x^3$. Med hjälp av kvadreringsregeln $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ har vi att

$$\begin{aligned}(y^2-3x^3)^2 &= (y^2)^2 - 2\cdot y^2\cdot 3x^3 + (3x^3)^2\\ &= y^{2\cdot 2} - 6x^3y^2 + 3^2x^{3\cdot 2}\\ &= y^4 - 6x^3y^2 + 9x^6\\ &= 9x^6 - 6x^3y^2 + y^4.\end{aligned}$$

h) Vi utvecklar kvadraten med kvadreringsregeln $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ där $a=5x^3$ och $b=3x^5$,

$$\begin{aligned}(5x^3+3x^5)^2 &= (5x^3)^2 + 2\cdot 5x^3\cdot 3x^5 + (3x^5)^2\\ &= 5^2x^{3\cdot 2} + 2\cdot 5\cdot 3x^{3+5} + 3^2x^{5\cdot 2}\\ &= 25x^6 + 30x^8 + 9x^{10}\\ &= 9x^{10} + 30x^8 + 25x^6.\end{aligned}$$

Anm. På sista raden har vi flyttat om termerna så att den term med högst gradtal $9x^{10}$ kommer först och sedan kommer termerna i fallande grad.

2.1:2 a) Multiplicera först ihop parenteserna. I den första produkten multipliceras varje term ur den första parentesen med varje term ur den andra parentesen,

$$\begin{aligned}(x-4)(x-5)-3x(2x-3) &= x\cdot x - x\cdot 5 - 4\cdot x - 4\cdot(-5)\\ &\quad -(3x\cdot 2x - 3x\cdot 3)\\ &= x^2-5x-4x+20-(6x^2-9x)\\ &= x^2-5x-4x+20-6x^2+9x.\end{aligned}$$

Samla sedan ihop x^2-, x- och konstanttermerna och förenkla,

$$\begin{aligned}&= (x^2-6x^2)+(-5x-4x+9x)+20\\ &= -5x^2+0\cdot x+20\\ &= -5x^2+20.\end{aligned}$$

b) Den första parentesprodukten utvecklar vi genom att multiplicera varje term ur den första parentesen med varje term ur den andra parentesen,

$$\begin{aligned}(1-5x)(1+15x) &= 1\cdot 1+1\cdot 15x-5x\cdot 1-5x\cdot 15x\\ &= 1+15x-5x-75x^2\\ &= 1+10x-75x^2.\end{aligned}$$

När det gäller det andra parentesuttrycket så kan vi använda konjugatregeln $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, där $a=2$ och $b=5x$,

$$3(2-5x)(2+5x)=3\bigl(2^2-(5x)^2\bigr)=3(4-25x^2)=12-75x^2.$$

Sammantaget får vi att

$$\begin{aligned}&(1-5x)(1+15x)-3(2-5x)(2+5x)\\ &\quad= (1+10x-75x^2)-(12-75x^2)\\ &\quad= 1+10x-75x^2-12+75x^2\\ &\quad= 1-12+10x-75x^2+75x^2\\ &\quad= -11+10x\\ &\quad= 10x-11.\end{aligned}$$

c) Svaret får vi genom att använda kvadreringsregeln $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ på kvadraten och utveckla den andra parentesprodukten,

$$\begin{aligned}(3x+4)^2-(3x-2)(3x-8) &= \bigl((3x)^2+2\cdot 3x\cdot 4+4^2\bigr)\\ &\quad -\bigl(3x\cdot 3x-3x\cdot 8-2\cdot 3x+2\cdot 8\bigr)\\ &= (9x^2+24x+16)-(9x^2-24x-6x+16)\\ &= (9x^2+24x+16)-(9x^2-30x+16)\\ &= 9x^2+24x+16-9x^2+30x-16\\ &= 9x^2-9x^2+24x+30x+16-16\\ &= 0\cdot x^2+54x+0\\ &= 54x.\end{aligned}$$

d) De tre parenteserna kan multipliceras ihop i vilken ordning som helst, men just i detta fall verkar det lämpligt att börja multiplicera ihop de två första parenteserna eftersom vi kan utföra multiplikationen direkt med konjugatregeln,

$$\begin{aligned}(3x^2+2)(3x^2-2)(9x^4+4) &= \bigl((3x^2)^2-2^2\bigr)(9x^4+4)\\ &= (9x^4-4)(9x^4+4).\end{aligned}$$

Nu råkar vi få ett uttryck som också kan multipliceras ihop med konjugatregeln,

$$(9x^4-4)(9x^4+4)=(9x^4)^2-4^2=81x^8-16.$$

Anm. Hade vi istället multiplicerat ihop det andra och tredje parentesuttrycket först skulle detta också ha givit rätt svar men uträkningarna skulle ha blivit längre.

e) Vi utvecklar de två kvadraterna med kvadreringsreglerna och adderar sedan ihop resultatet,

$$\begin{aligned}(a+b)^2+(a-b)^2 &= (a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2\\ &= a^2+a^2+2ab-2ab+b^2+b^2\\ &= 2a^2+2b^2.\end{aligned}$$

2.1:3 a) Tittar vi på uttrycket så ser vi att det kan skrivas som x^2-6^2 och därför faktoriseras med konjugatregeln,

$$x^2-36=x^2-6^2=(x+6)(x-6).$$

Eftersom faktorerna $x+6$ och $x-6$ är linjära uttryck kan de inte faktoriseras ytterligare (i polynomfaktorer).

b) Om vi bryter ut faktorn 5 så ser vi sedan att uttrycket kan faktoriseras med konjugatregeln,

$$5x^2-20=5(x^2-4)=5(x^2-2^2)=5(x+2)(x-2).$$

c) Uttrycket kan skrivas om som $x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2$ och då ser vi att det kan faktoriseras med kvadreringsregeln $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$ till

$$x^2+6x+9=x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2=(x+3)^2.$$

d) Genom att uttrycket skrivs som $x^2 - 2\cdot 5\cdot x + 5^2$ så ger sedan kvadreringsregeln $x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$ att

$$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2\cdot 5\cdot x + 5^2 = (x-5)^2.$$

e) Båda termerna innehåller x som därför kan brytas ut (och samtidigt bryter vi ut faktorn 2),

$$18x - 2x^3 = 2x\cdot 9 - 2x\cdot x^2 = 2x(9-x^2).$$

Den resterande andragradsfaktorn, $9-x^2$, kan sedan faktoriseras med konjugatregeln,

$$2x(9-x^2) = 2x(3^2-x^2) = 2x(3+x)(3-x),$$

vilket också kan skrivas som

$$-2x(x+3)(x-3).$$

f) Ser vi $4x$ som ett samlat deluttryck så kan vi skriva

$$16x^2 + 8x + 1 = (4x)^2 + 2\cdot 4x + 1$$

och eftersom $y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2$ så är

$$(4x)^2 + 2\cdot 4x + 1 = (4x+1)^2.$$

2.1:4 a) Först multiplicerar vi in x från den första parentesen in i den andra parentesen,

$$(x+2)(3x^2 - x + 5) = x\cdot 3x^2 - x\cdot x + x\cdot 5 + \cdots,$$

och sedan multipliceras 2:an in,

$$(x+2)(3x^2 - x + 5) = 3x^3 - x^2 + 5x + 2\cdot 3x^2 - 2\cdot x + 2\cdot 5.$$

Samla nu ihop x^3-, x^2-, x- och konstanttermerna,

$$3x^3 + (-1+6)x^2 + (5-2)x + 10 = 3x^3 + 5x^2 + 3x + 10.$$

Koefficienten framför x^2 är 5 och koefficienten framför x är 3.

b) När uttrycket $(1+x+x^2+x^3)(2-x+x^2+x^4)$ utvecklas så multipliceras varje term ur den första parentesen ihop med varje term ur den andra parentesen, dvs.

$$\begin{aligned}
&(1+x+x^2+x^3)(2-x+x^2+x^4)\\
&\quad = 1\cdot 2 + 1\cdot(-x) + 1\cdot x^2 + 1\cdot x^4 + x\cdot 2 + x\cdot(-x)\\
&\qquad + x\cdot x^2 + x\cdot x^4 + x^2\cdot 2 + x^2\cdot(-x) + x^2\cdot x^2 + x^2\cdot x^4\\
&\qquad + x^3\cdot 2 + x^3\cdot(-x) + x^3\cdot x^2 + x^3\cdot x^4.
\end{aligned}$$

Om vi bara vill ha reda på koefficienten framför x så behöver vi inte utföra den fullständiga utvecklingen av uttrycket utan det räcker att hitta de kombinationer av en term från den första parentesen och en term från den andra parentesen som ihopmultiplicerade ger en x^1-term. I detta fall har vi två sådana par: 1 multiplicerat med $-x$ och x multiplicerat med 2,

$$(1+x+x^2+x^3)(2-x+x^2+x^4),$$

så x-termerna är $1\cdot(-x) + x\cdot 2$ och koefficienten framför x är $-1+2 = 1$.

Koefficienten framför x^2 får vi genom att hitta de kombinationer av en term från vardera parentes som ger en x^2-term, och dessa är

$$(1+x+x^2+x^3)(2-x+x^2+x^4).$$

Därmed är x^2-termerna lika med $1\cdot x^2 + x\cdot(-x) + x^2\cdot 2$ och koefficienten framför x^2 är $1-1+2=2$.

c) Istället för att multiplicera ihop hela uttrycket och därefter läsa av koefficienterna så undersöker vi vilka termer ur de tre parenteserna som tillsammans ger x^1- och x^2-termer.

Om vi börjar med x-termen så finns det bara en kombination av en term från varje parentesuttryck som ihopmultiplicerade ger ett x^1,

$$(x-x^3+x^5)(1+3x+5x^2)(2-7x^2-x^4) = \cdots + x\cdot 1\cdot 2 + \cdots,$$

så koefficienten framför x är $1\cdot 2 = 2$.

När det gäller x^2 har vi också bara en möjlig kombination,

$$(x-x^3+x^5)(1+3x+5x^2)(2-7x^2-x^4) = \cdots + x\cdot 3x\cdot 2 + \cdots.$$

Koefficienten framför x^2 är $3\cdot 2 = 6$.

2.1:5 a) Precis som när vi räknar med bråktal kan vi subtrahera termernas täljare om vi först förlänger bråken så att de har samma nämnare. Eftersom nämnarna är $x - x^2 = x(1-x)$ och x så är $x(1-x)$ minsta gemensamma nämnare,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-x^2}-\frac{1}{x} &= \frac{1}{x-x^2}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1-x}{1-x}\\ &= \frac{1}{x-x^2}-\frac{1-x}{x-x^2}\\ &= \frac{1-(1-x)}{x-x^2}\\ &= \frac{1-1+x}{x-x^2}\\ &= \frac{x}{x-x^2}.\end{aligned}$$

Detta bråk kan förenklas genom att förkorta bort den gemensamma faktorn x från täljaren och nämnaren,

$$\frac{x}{x-x^2}=\frac{x}{x(1-x)}=\frac{1}{1-x}.$$

b) Nämnarna kan vi faktorisera som

$$\begin{aligned} y^2-2y &= y(y-2),\\ y^2-4 &= (y-2)(y+2), \qquad \text{(enligt konjugatregeln)},\end{aligned}$$

och då ser vi att termernas minsta gemensamma nämnare är $y(y-2)(y+2)$ eftersom det är den produkt med minst antal faktorer som innehåller både $y(y-2)$ och $(y-2)(y+2)$.

Vi förlänger nu bråken så att de får samma nämnare och sätter igång med att förenkla,

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^2-2y}-\frac{2}{y^2-4} &= \frac{1}{y(y-2)}\cdot\frac{y+2}{y+2}-\frac{2}{(y-2)(y+2)}\cdot\frac{y}{y}\\ &= \frac{y+2}{y(y-2)(y+2)}-\frac{2y}{(y-2)(y+2)y}\\ &= \frac{y+2-2y}{y(y-2)(y+2)}\\ &= \frac{2-y}{y(y-2)(y+2)}.\end{aligned}$$

Täljaren kan skrivas om till $2-y=-(y-2)$ och vi kan förkorta bort den gemensamma faktorn $y-2$,

$$\frac{2-y}{y(y-2)(y+2)}=\frac{-(y-2)}{y(y-2)(y+2)}=\frac{-1}{y(y+2)}=-\frac{1}{y(y+2)}.$$

c) Bråkuttrycket kan förenklas ytterligare om det går att faktorisera och förkorta bort gemensamma faktorer från täljaren och nämnaren. Nu är både täljaren och nämnaren till viss del redan faktoriserade men vi kan gå vidare med täljaren och bryta upp den i linjära faktorer med konjugatregeln,

$$\begin{aligned}3x^2-12 &= 3(x^2-4)=3(x+2)(x-1),\\ x^2-1 &= (x+1)(x-1).\end{aligned}$$

Hela bråket är därför lika med

$$\frac{3\cancel{(x+2)}(x-2)\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+2)}}=3(x-2)(x-1).$$

Anm. Det går givetvis också bra att utveckla uttrycket och svara med $3x^2-9x+6$.

d) I bråkuttrycket finns möjligheten att täljaren och nämnaren innehåller gemensamma faktorer som kan förkortas bort och därför försöker vi faktorisera alla uttryck så långt som möjligt.

Faktorn y^2+4y+4 kan skrivas som $y^2+2\cdot 2y+2^2$ och det öppnar för att använda kvadreringsregeln,

$$y^2+4y+4=y^2+2\cdot 2y+2^2=(y+2)^2.$$

Faktorn $2y-4$ är redan ett förstagradsuttryck och kan därför inte delas upp ytterligare, så när som på att en faktor 2 kan brytas ut, $2y-4=2(y-2)$.

Med konjugatregeln kan y^2-4 faktoriseras till

$$y^2-4=(y+2)(y-2).$$

Däremot kan inte y^2+4 skrivas som en produkt av förstagradsfaktorer. Om det nämligen gick att skriva $y^2+4=(y-a)(y-b)$, där a och b är några tal, så skulle $y=a$ och $y=b$ vara nollställen till y^2+4 men eftersom y^2+4 är en summa av en kvadrat y^2, som inte kan ha ett negativt värde, och talet 4 är y^2+4 alltid större än eller lika med 4 oavsett hur y väljs. Därför kan inte y^2+4 delas upp i förstagradsfaktorer.

Alltså är

$$\frac{(y^2+4y+4)(2y-4)}{(y^2+4)(y^2-4)}=\frac{(y+2)^{\cancel{2}}\cdot 2\cancel{(y-2)}}{(y^2+4)\cancel{(y+2)}\cancel{(y-2)}}=\frac{2(y+2)}{y^2+4}.$$

2.1:6 a) Innan vi försöker bearbeta hela uttrycket koncentrerar vi oss på att förenkla de två faktorerna var för sig genom att skriva om dem med gemensam nämnare,

$$\begin{aligned}x-y+\frac{x^2}{y-x} &= \frac{(x-y)(y-x)}{y-x}+\frac{x^2}{y-x} = \{y-x=-(x-y)\}\\ &= \frac{-(x-y)^2}{y-x}+\frac{x^2}{y-x} = \frac{-(x-y)^2+x^2}{y-x}\\ &= \frac{-(x^2-2xy+y^2)+x^2}{y-x} = \frac{-x^2+2xy-y^2+x^2}{y-x}\\ &= \frac{2xy-y^2}{y-x} = \frac{y(2x-y)}{y-x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{y}{2x-y}-1 &= \frac{y}{2x-y}-\frac{2x-y}{2x-y} = \frac{y-(2x-y)}{2x-y} = \frac{y-2x+y}{2x-y}\\ &= \frac{2y-2x}{2x-y} = \frac{2(y-x)}{2x-y}.\end{aligned}$$

Sedan multiplicerar vi ihop faktorerna och förenklar genom att förkorta,

$$\Bigl(x-y-\frac{x^2}{y-x}\Bigr)\Bigl(\frac{y}{2x-y}-1\Bigr) = \frac{y\cancel{(2x-y)}}{\cancel{y-x}}\cdot\frac{2\cancel{(y-x)}}{\cancel{2x-y}} = 2y.$$

b) Minsta gemensamma nämnare för de tre termerna är $(x-2)(x+3)$ och vi förlänger varje term så att alla termer får samma nämnare,

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-2}+\frac{x}{x+3}-2 &= \frac{x}{x-2}\cdot\frac{x+3}{x+3}+\frac{x}{x+3}\cdot\frac{x-2}{x-2}-2\cdot\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)}\\ &= \frac{x(x+3)+x(x-2)-2(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)}\\ &= \frac{x^2+3x+x^2-2x-2(x^2+3x-2x-6)}{(x-2)(x+3)}\\ &= \frac{x^2+3x+x^2-2x-2x^2-6x+4x+12}{(x-2)(x+3)}.\end{aligned}$$

Samla nu ihop termerna i täljaren,

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-2}+\frac{x}{x+3}-2 &= \frac{(x^2+x^2-2x^2)+(3x-2x-6x+4x)+12}{(x-2)(x+3)}\\ &= \frac{-x+12}{(x-2)(x+3)}.\end{aligned}$$

Anm. Genom att vi behåller nämnaren faktoriserad genom hela uträkningen kan vi på slutet direkt se att svaret inte kan förkortas.

c) Eftersom nämnarna är $a^2-ab=a(a-b)$ och $a-b$ så får båda termerna en gemensam nämnare $a(a-b)$ om den andra termen förlängs med a,

$$\frac{2a+b}{a^2-ab}-\frac{2}{a-b} = \frac{2a+b}{a(a-b)}-\frac{2}{a-b}\cdot\frac{a}{a} = \frac{2a+b-2a}{a(a-b)} = \frac{b}{a(a-b)}.$$

d) Vi förenklar först täljaren och nämnaren i huvudbråket genom att skriva på gemensamt bråkstreck,

$$\begin{aligned}a-b+\frac{b^2}{a+b} &= (a-b)\cdot\frac{a+b}{a+b}+\frac{b^2}{a+b}\\ &= \frac{(a-b)(a+b)+b^2}{a+b}\\ &= \frac{a^2-b^2+b^2}{a+b}\\ &= \frac{a^2}{a+b},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1-\Bigl(\frac{a-b}{a+b}\Bigr)^2 &= 1-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\\ &= \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2}-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\\ &= \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2}\\ &= \frac{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{(a+b)^2}\\ &= \frac{4ab}{(a+b)^2}.\end{aligned}$$

Hela bråket är därför

$$\frac{a-b+\dfrac{b^2}{a+b}}{1-\Bigl(\dfrac{a-b}{a+b}\Bigr)^2} = \frac{\dfrac{a^2}{a+b}}{\dfrac{4ab}{(a+b)^2}} = \frac{a^{\cancel{2}}}{\cancel{a+b}}\cdot\frac{(a+b)^{\cancel{2}}}{4\cancel{a}b} = \frac{a(a+b)}{4b}.$$

2.1:7 a) Förlänger vi bråken med $x+5$ respektive $x+3$ så får de samma nämnare och vi kan beräkna uttrycket genom att subtrahera täljarna,

$$\begin{aligned}\frac{2}{x+3}-\frac{2}{x+5} &= \frac{2}{x+3}\cdot\frac{x+5}{x+5}-\frac{2}{x+5}\cdot\frac{x+3}{x+3}\\ &= \frac{2(x+5)-2(x+3)}{(x+3)(x+5)}\\ &= \frac{2x+10-2x-6}{(x+3)(x+5)}\\ &= \frac{4}{(x+3)(x+5)}.\end{aligned}$$

b) Nämnarna $x-1$ och x^2 saknar gemensamma faktorer så minsta gemensamma nämnare är $x^2(x-1)$. Vi förlänger alla tre termer så att de får samma nämnare och påbörjar sedan förenklingsarbetet,

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2} &= x\cdot\frac{x^2(x-1)}{x^2(x-1)}+\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x-1}{x-1} \\ &= \frac{x^3(x-1)+x^2+(x-1)}{x^2(x-1)} \\ &= \frac{x^4-x^3+x^2+x-1}{x^2(x-1)}. \end{aligned}$$

c) Den första termen förlänger vi med $a+1$ för att få gemensam nämnare,

$$\frac{ax}{a+1}\cdot\frac{a+1}{a+1}-\frac{ax^2}{(a+1)^2}=\frac{ax(a+1)-ax^2}{(a+1)^2}.$$

Eftersom båda termerna i täljaren innehåller faktorn ax bryter vi ut den faktorn,

$$\frac{ax(a+1-x)}{(a+1)^2},$$

och ser då att svaret inte kan förkortas ytterligare.

Anm. Det är bara *faktorer* i täljaren och nämnaren som kan förkortas bort mot varandra och inte deluttryck. Därför är följande "förkortning" felaktig,

$$\frac{ax\cancel{(a+1)}-ax^2}{(a+1)^{\cancel{2}}}=\frac{ax-ax^2}{a+1}. \quad \text{(Fel!)}$$

2.1:8 a) Uttryck som består av flera bråkstreck får vi ner till ett bråkstreck genom att systematiskt förlänga bort alla delbråk. I vårt uttryck förlänger vi huvudbråket med $x+1$ (för att få bort $x+1$ från täljaren),

$$\frac{\dfrac{x}{x+1}}{3+x}=\frac{\dfrac{x}{x+1}}{x+3}\cdot\frac{x+1}{x+1}=\frac{\dfrac{x}{\cancel{x+1}}\cdot\cancel{(x+1)}}{(x+3)(x+1)}=\frac{x}{(x+3)(x+1)}.$$

b) Huvudbråket består av täljaren $\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x}$, som vi direkt kan förenkla något,

$$\frac{3}{x}-\frac{1}{x}=\frac{3-1}{x}=\frac{2}{x},$$

och nämnaren $1/(x-3)$. Om vi ska skriva om bråket som ett uttryck med ett bråkstreck så behöver vi förlänga hela bråket med $x(x-3)$ och sedan förkorta bort x och $x-3$,

$$\frac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x-3}}=\frac{\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{x-3}}=\frac{\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{x-3}}\cdot\frac{x(x-3)}{x(x-3)}=\frac{\dfrac{2}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}(x-3)}{\dfrac{1}{\cancel{x-3}}\cdot x\cancel{(x-3)}}=\frac{2(x-3)}{x}.$$

c) När vi stöter på stora och komplicerade uttryck behöver vi arbeta stegvis, och som ett första delmål kan vi ha att förlänga bråket

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$$

med $1+x$ för att reducera detta bråk till ett uttryck med ett gemensamt bråkstreck,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}} &= \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}\cdot\dfrac{1+x}{1+x}} \\ &= \frac{1}{1+\dfrac{1+x}{\Bigl(1+\dfrac{1}{1+x}\Bigr)(1+x)}} \\ &= \frac{1}{1+\dfrac{1+x}{1+x+\dfrac{\cancel{1+x}}{\cancel{1+x}}}} \\ &= \frac{1}{1+\dfrac{1+x}{1+x+1}} \\ &= \frac{1}{1+\dfrac{x+1}{x+2}}. \end{aligned}$$

Nästa steg är att vi förlänger vårt nya uttryck med $x+2$ för att få det slutliga svaret,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\dfrac{x+1}{x+2}}\cdot\frac{x+2}{x+2} &= \frac{x+2}{\Bigl(1+\dfrac{x+1}{x+2}\Bigr)(x+2)} \\ &= \frac{x+2}{x+2+\dfrac{x+1}{x+2}\cdot(x+2)} \\ &= \frac{x+2}{x+2+x+1} \\ &= \frac{x+2}{2x+3}. \end{aligned}$$

2.2 Linjära uttryck

2.2:1 a) Om vi adderar 2 till båda led i ekvationen,

$$(x-2)+2=-1+2,$$

så får vi x ensamt i vänsterledet eftersom $(x-2)+2=x+(-2+2)=x$ och kan direkt avläsa lösningen till

$$x=-1+2=1.$$

b) För att få x ensamt i vänsterledet subtraherar vi 1 från båda led,

$$(2x+1)-1=13-1,$$

vilket ger att vänsterledet blir $(2x+1)-1=2x+(1-1)=2x$ och ekvationen blir

$$2x=12.$$

Dividera sedan båda led med 2,

$$\frac{2x}{2}=\frac{12}{2},$$

för att få fram att $x=6$.

c) Eftersom x finns både i vänster- och högerledet är första steget att vi subtraherar $\frac{1}{3}x$ från båda led,

$$\left(\tfrac{1}{3}x-1\right)-\tfrac{1}{3}x=x-\tfrac{1}{3}x,$$

för då blir vänsterledet $\left(\frac{1}{3}x-1\right)-\frac{1}{3}x=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}x\right)-1=-1$ och vi samlar x i högerledet,

$$-1=\tfrac{2}{3}x.$$

Multiplicera sedan båda led med $\frac{3}{2}$,

$$\tfrac{3}{2}\cdot(-1)=\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{2}{3}x,$$

så kan $\frac{2}{3}$ förkortas bort i högerledet och vi får att $x=-\frac{3}{2}$.

d) Flytta x till vänsterledet genom att subtrahera båda led med $2x$,

$$(5x+7)-2x=(2x-6)-2x,$$

vilket ger att högerledet blir $(2x-6)-2x=(2x-2x)-6=-6$ och ekvationen blir

$$3x+7=-6.$$

Subtrahera nu 7 från båda led,

$$(3x+7)-7=-6-7,$$

så att termen $3x$ blir ensamt kvar i vänsterledet,

$$3x=-13.$$

Dividera sedan bort faktorn 3,

$$\frac{3x}{3}=\frac{13}{3},$$

för att få ut att $x=-\frac{13}{3}$.

2.2:2 a) Om vi delar upp nämnarna som förekommer i ekvationen i små heltalsfaktorer, $6=2\cdot 3$, $9=3\cdot 3$ och 2, så ser vi att minsta gemensamma nämnare är $2\cdot 3\cdot 3=18$. Vi multiplicerar därför båda led i ekvationen med $2\cdot 3\cdot 3$ för att slippa ha nämnare i ekvationen,

$$\begin{aligned}\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot\frac{5x}{\cancel{6}}-2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\frac{x+2}{\cancel{9}}&=\cancel{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\\ \Leftrightarrow\quad 3\cdot 5x-2\cdot(x+2)&=3\cdot 3.\end{aligned}$$

Vänsterledet kan vi skriva om till $3\cdot 5x-2(x+2)=15x-2x-4=13x-4$, så vi har ekvationen

$$13x-4=9$$

och kan lösa denna förstagradsekvation genom att utföra enkla räkneoperationer för att få x ensamt i ena ledet.
Addera 4 till båda led,

$$\begin{aligned}(13x-4)+4&=9+4,\\ 13x&=13.\end{aligned}$$

Dela båda led med 13,

$$\frac{13x}{13} = \frac{13}{13}.$$

Ekvationen har alltså lösningen $x = 1$.

När vi nu fått fram ett svar så är det viktigt att vi går tillbaka till den ursprungliga ekvationen och kontrollerar att $x = 1$ verkligen är rätt svar (att vi inte av misstag råkat räkna fel),

$$\begin{aligned} \text{VL} &= \frac{5\cdot 1}{6} - \frac{1+2}{9} = \frac{5}{6} - \frac{3}{9} = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{6} - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \text{HL}. \end{aligned}$$

b) Först multiplicerar vi båda led i ekvationen med $4\cdot 7 = 28$ så att vi får bort nämnarna från ekvationen,

$$\begin{aligned} 4\cdot \cancel{7}\cdot \frac{8x+3}{\cancel{7}} - \cancel{4}\cdot 7\cdot \frac{5x-7}{\cancel{4}} &= 4\cdot 7\cdot 2 \\ \Leftrightarrow \quad 4\cdot(8x+3) - 7\cdot(5x-7) &= 56. \end{aligned}$$

Vänsterledet kan vi förenkla till $4\cdot(8x+3) - 7\cdot(5x-7) = 32x + 12 - 35x + 49 = -3x + 61$. Alltså är ekvationen

$$-3x + 61 = 56.$$

Vi löser denna ekvation genom att subtrahera 61 från båda led,

$$\begin{aligned} (-3x+61) - 61 &= 56 - 61, \\ -3x &= -5, \end{aligned}$$

och sedan dela med -3,

$$\begin{aligned} \frac{-3x}{-3} &= \frac{-5}{-3}, \\ x &= \tfrac{5}{3}. \end{aligned}$$

Svaret är $x = \frac{5}{3}$.

Som sista del i lösningen kontrollerar vi svaret genom att sätta in $x = \frac{5}{3}$ i ursprungsekvationen,

$$\begin{aligned} \text{VL} &= \frac{8\cdot\frac{5}{3}+3}{7} - \frac{5\cdot\frac{5}{3}-7}{4} = \frac{\left(8\cdot\frac{5}{3}+3\right)\cdot 3}{7\cdot 3} - \frac{\left(5\cdot\frac{5}{3}-7\right)\cdot 3}{4\cdot 3} \\ &= \frac{8\cdot 5+3\cdot 3}{7\cdot 3} - \frac{5\cdot 5 - 7\cdot 3}{4\cdot 3} = \frac{40+9}{21} - \frac{25-21}{12} \\ &= \frac{49}{21} - \frac{4}{12} = \frac{7\cdot\cancel{7}}{3\cdot\cancel{7}} - \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 3} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7-1}{3} = \frac{6}{3} = 2 = \text{HL}. \end{aligned}$$

c) Vänsterledet i ekvationen kan vi förenkla genom att utveckla kvadraterna med kvadreringsreglerna,

$$\begin{aligned} (x+3)^2 - (x-5)^2 &= (x^2 + 2\cdot 3x + 3^2) - (x^2 - 2\cdot 5x + 5^2) \\ &= x^2 + 6x + 9 - x^2 + 10x - 25 \\ &= 16x - 16. \end{aligned}$$

Ekvationen är alltså

$$16x - 16 = 6x + 4.$$

Flytta nu över alla x i vänsterledet (subtrahera $6x$ från båda led) och konstanterna till högerledet (addera 16 till båda led)

$$\begin{aligned} 16x - 6x &= 4 + 16, \\ 10x &= 20. \end{aligned}$$

Dividera båda led med 10 för att få svaret,

$$x = \frac{20}{10} = 2.$$

Vi kontrollerar slutligen att $x = 2$ uppfyller ekvationen i uppgiftstexten,

$$\begin{aligned} \text{VL} &= (2+3)^2 - (2-5)^2 = 5^2 - (-3)^2 = 25 - 9 = 16, \\ \text{HL} &= 6\cdot 2 + 4 = 12 + 4 = 16. \end{aligned}$$

d) Vi flyttar först över alla termer i vänsterledet,

$$(x^2+4x+1)^2 + 3x^4 - 2x^2 - (2x^2+2x+3)^2 = 0.$$

Som ekvationen nu står verkar det bästa angreppssättet att lösa ekvationen vara att utveckla kvadraterna, förenkla och se vad det leder till.
När kvadraterna utvecklas så multipliceras varje term inuti kvadraten med sig själv och alla andra termer,

$$\begin{aligned} (x^2+4x+1)^2 &= (x^2+4x+1)(x^2+4x+1) \\ &= x^2\cdot x^2 + x^2\cdot 4x + x^2\cdot 1 + 4x\cdot x^2 + 4x\cdot 4x + 4x\cdot 1 \\ &\quad + 1\cdot x^2 + 1\cdot 4x + 1\cdot 1 \\ &= x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x^3 + 16x^2 + 4x + x^2 + 4x + 1 \\ &= x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2x^2+2x+3)^2 &= (2x^2+2x+3)(2x^2+2x+3) \\ &= 2x^2\cdot 2x^2 + 2x^2\cdot 2x + 2x^2\cdot 3 + 2x\cdot 2x^2 + 2x\cdot 2x \\ &\quad + 2x\cdot 3 + 3\cdot 2x^2 + 3\cdot 2x + 3\cdot 3 \\ &= 4x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x^3 + 4x^2 + 6x + 6x^2 + 6x + 9 \\ &= 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x + 9. \end{aligned}$$

Vänsterledet blir, efter att vi samlar ihop termer av samma grad,

$$\begin{aligned}(x^2+4x+1)^2 &+ 3x^4-2x^2-(2x^2+2x+3)^2\\ &= (x^4+8x^3+18x^2+8x+1)+3x^4-2x^2\\ &\quad -(4x^4+8x^3+16x^2+12x+9)\\ &= (x^4+3x^4-4x^4)+(8x^3-8x^3)+(18x^2-2x^2-16x^2)\\ &\quad +(8x-12x)+(1-9)\\ &= -4x-8.\end{aligned}$$

Efter alla förenklingar blir alltså ekvationen:

$$-4x-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2.$$

Vi kontrollerar till sist att $x=-2$ är rätt lösning genom att stoppa in $x=-2$ i ekvationen,

$$\begin{aligned}\text{VL} &= \big((-2)^2+4\cdot(-2)+1\big)^2+3\cdot(-2)^4-2\cdot(-2)^2\\ &= (4-8+1)^2+3\cdot 16-2\cdot 4=(-3)^2+48-8\\ &= 9+48-8=49,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{HL} &= \big(2\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)+3\big)^2=(2\cdot 4-4+3)^2\\ &= 7^2=49.\end{aligned}$$

2.2:3 a) Vi förlänger termerna i vänsterledet så att de får gemensam nämnare,

$$\frac{x+3}{x-3}\cdot\frac{x-2}{x-2}-\frac{x+5}{x-2}\cdot\frac{x-3}{x-3}=0.$$

Nu kan täljarna subtraheras,

$$\frac{(x+3)(x-2)-(x+5)(x-3)}{(x-2)(x-3)}=0.$$

Utveckla parenteserna i täljaren,

$$\frac{x^2-2x+3x-6-(x^2-3x+5x-15)}{(x-2)(x-3)}=0,$$

och förenkla,

$$\frac{-x+9}{(x-2)(x-3)}=0.$$

Vänsterledet blir noll bara när dess täljare blir noll (samtidigt som nämnaren inte är noll) vilket ger oss att ekvationens lösningar ges av lösningarna till

$$-x+9=0,$$

dvs. $x=9$.

En kontroll där vi sätter in $x=9$ i den ursprungliga ekvationen visar att vi har räknat rätt,

$$\text{VL}=\frac{9+3}{9-3}-\frac{9+5}{9-2}=\frac{12}{6}-\frac{14}{7}=2-2=0=\text{HL}.$$

b) Först flyttar vi över alla termer till vänsterledet,

$$\frac{4x}{4x-7}-\frac{1}{2x-3}-1=0.$$

Sedan förlänger vi de tre termerna så att de får gemensam nämnare,

$$\frac{4x}{4x-7}\cdot\frac{2x-3}{2x-3}-\frac{1}{2x-3}\cdot\frac{4x-7}{4x-7}-\frac{(2x-3)(4x-7)}{(2x-3)(4x-7)}=0,$$

och kan skriva om vänsterledet som

$$\frac{4x(2x-3)-(4x-7)-(2x-3)(4x-7)}{(2x-3)(4x-7)}=0.$$

Täljaren utvecklas,

$$\frac{8x^2-12x-(4x-7)-(8x^2-14x-12x+21)}{(2x-3)(4x-7)}=0,$$

och förenklas,

$$\frac{10x-14}{(2x-3)(4x-7)}=0.$$

Denna ekvation är uppfylld när täljaren är noll (samtidigt som nämnaren inte är noll) och detta inträffar när

$$10x-14=0,$$

vilket ger att $x=\frac{7}{5}$.

Det är lätt hänt att man råkar räkna fel och därför kontrollerar vi att svaret $x=\frac{7}{5}$ uppfyller ekvationen,

$$\begin{aligned}\text{VL} &= \frac{4\cdot\frac{7}{5}}{4\cdot\frac{7}{5}-7}-\frac{1}{2\cdot\frac{7}{5}-3}=\{\text{förläng med } 5\}\\ &= \frac{4\cdot\frac{7}{5}}{4\cdot\frac{7}{5}-7}\cdot\frac{5}{5}-\frac{1}{2\cdot\frac{7}{5}-3}\cdot\frac{5}{5}=\frac{4\cdot 7}{4\cdot 7-7\cdot 5}-\frac{5}{2\cdot 7-3\cdot 5}\\ &= \frac{4}{4-5}-\frac{5}{14-15}=-4-(-5)=1=\text{HL}.\end{aligned}$$

c) Låt oss börja med att skriva den första faktorn i vänsterledet med gemensam nämnare,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1} &= \frac{1}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x-1}\\ &= \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}-\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}\\ &= \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}\\ &= \frac{2}{(x-1)(x+1)}.\end{aligned}$$

Om vi också skriver $3x-3=3(x-1)$ så kan ekvationen omformas till

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)}\bigl(x^2+\tfrac{1}{2}\bigr)=\frac{6x-1}{3(x-1)}.$$

Eftersom $x=1$ inte kan vara en lösning till ekvationen så kan faktorn $x-1$ strykas i båda leds nämnare (dvs. egentligen multipliceras båda led med $x-1$ som sedan förkortas bort),

$$\frac{2}{x+1}\bigl(x^2+\tfrac{1}{2}\bigr)=\frac{6x-1}{3}.$$

Därefter multipliceras båda led med 3 och $x+1$ så att vi får en ekvation utan nämnare,

$$6\bigl(x^2+\tfrac{1}{2}\bigr)=(6x-1)(x+1).$$

Utveckla båda led

$$6x^2+3=6x^2+5x-1.$$

De två x^2-termerna tar ut varandra och vi får förstagradsekvationen

$$3=5x-1,$$

som har lösningen

$$x=\tfrac{4}{5}.$$

Vi kontrollerar att vi har räknat rätt genom att stoppa in $x=\frac{4}{5}$ i den ursprungliga ekvationen

$$\begin{aligned}\mathrm{VL} &= \Bigl(\frac{1}{\frac{4}{5}-1}-\frac{1}{\frac{4}{5}+1}\Bigr)\bigl((\tfrac{4}{5})^2+\tfrac{1}{2}\bigr)=\Bigl(\frac{1}{-\frac{1}{5}}-\frac{1}{\frac{9}{5}}\Bigr)\bigl(\tfrac{16}{25}+\tfrac{1}{2}\bigr)\\ &= \Bigl(-5-\frac{5}{9}\Bigr)\frac{16\cdot 2+25}{2\cdot 25}=-\frac{\cancel{50}}{9}\cdot\frac{57}{\cancel{50}}=-\frac{57}{9}=-\frac{19}{3},\end{aligned}$$

$$\mathrm{HL}=\frac{6\cdot\frac{4}{5}-1}{3\cdot\frac{4}{5}-3}=\frac{\frac{24}{5}-\frac{5}{5}}{\frac{12}{5}-\frac{15}{5}}=\frac{\frac{1}{5}\cdot(24-5)}{\frac{1}{5}\cdot(12-15)}=\frac{19}{-3}=-\frac{19}{3}.$$

d) Det finns inte någon gemensam faktor i vänsterledet som vi direkt kan bryta ut så därför väljer vi att utveckla de tre deluttrycken i vänsterledet,

$$\begin{aligned}\Bigl(\frac{2}{x}-3\Bigr)\Bigl(\frac{1}{4x}+\frac{1}{2}\Bigr) &= \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{4x}+\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}-3\cdot\frac{1}{4x}-3\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}-\frac{3}{4x}-\frac{3}{2}\\ &= \frac{1}{2x^2}+\Bigl(1-\frac{3}{4}\Bigr)\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\\ &= \frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x}-\frac{3}{2},\\ \Bigl(\frac{1}{2x}-\frac{2}{3}\Bigr)^2 &= \frac{1}{(2x)^2}-2\cdot\frac{1}{2x}\cdot\frac{2}{3}+\Bigl(\frac{2}{3}\Bigr)^2\\ &= \frac{1}{4x^2}-\frac{2}{3x}+\frac{4}{9},\\ \Bigl(\frac{1}{2x}+\frac{1}{3}\Bigr)\Bigl(\frac{1}{2x}-\frac{1}{3}\Bigr) &= \{\text{konjugatregeln}\}\\ &= \frac{1}{(2x)^2}-\frac{1}{3^2}\\ &= \frac{1}{4x^2}-\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Sammanställer vi uträkningarna får vi att vänsterledet blir

$$\begin{aligned}&\Bigl(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x}-\frac{3}{2}\Bigr)-\Bigl(\frac{1}{4x^2}-\frac{2}{3x}+\frac{4}{9}\Bigr)-\Bigl(\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{9}\Bigr)\\ &\quad=\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x}-\frac{3}{2}-\frac{1}{4x^2}+\frac{2}{3x}-\frac{4}{9}-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{9}\\ &\quad=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4x}+\frac{2}{3x}-\frac{3}{2}-\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\\ &\quad=\Bigl(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\Bigr)\frac{1}{x^2}+\Bigl(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\Bigr)\frac{1}{x}+\Bigl(-\frac{3}{2}-\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\Bigr)\\ &\quad=\frac{2-1-1}{4}\,\frac{1}{x^2}+\frac{3+2\cdot 4}{3\cdot 4}\,\frac{1}{x}+\frac{-3\cdot 9-4\cdot 2+1\cdot 2}{2\cdot 9}\\ &\quad=\frac{11}{3\cdot 4}\,\frac{1}{x}-\frac{33}{2\cdot 9},\end{aligned}$$

och eftersom $33=3\cdot 11$, $9=3\cdot 3$ och $4=2\cdot 2$ så kan hela ekvationen skrivas som

$$\frac{11}{3\cdot 2\cdot 2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{3\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 3}=0.$$

Bryter vi ut gemensamma faktorer fås

$$\frac{11}{3\cdot 2}\Bigl(\frac{1}{2x}-1\Bigr)=0$$

och då ser vi att ekvationen har lösningen $x = \frac{1}{2}$.

Till sist stoppar vi in $x = \frac{1}{2}$ i ursprungsekvationen för att kontrollera att vi har räknat rätt

$$\begin{aligned}\mathrm{VL} &= \Bigl(\frac{2}{\frac{1}{2}} - 3\Bigr)\Bigl(\frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Bigr) - \Bigl(\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\Bigr)^2 - \Bigl(\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\Bigr)\Bigl(\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\Bigr)\\ &= (4-3)\bigl(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\bigr) - \bigl(1-\tfrac{2}{3}\bigr)^2 - \bigl(1+\tfrac{1}{3}\bigr)\bigl(1-\tfrac{1}{3}\bigr)\\ &= 1 - \bigl(\tfrac{1}{3}\bigr)^2 - \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{2}{3} = 1 - \tfrac{1}{9} - \tfrac{8}{9} = 0 = \mathrm{HL}.\end{aligned}$$

2.2:4 a) Vi flyttar helt enkelt över x-termen i vänsterledet,

$$-2x + y = 3.$$

b) Genom att lösa ut $4y$ från sambandet $3x + 4y - 5 = 0$ får vi

$$4y = -3x + 5$$

och därefter ger division med 4 svaret på den önskade formen,

$$y = -\tfrac{3}{4}x + \tfrac{5}{4}.$$

2.2:5 a) Låt oss skriva den räta linjens ekvation som

$$y = kx + m,$$

där k och m är konstanter som vi ska bestämma.

Eftersom punkterna $(2,3)$ och $(3,0)$ ska ligga på linjen måste de också uppfylla linjens ekvation,

$$3 = k\cdot 2 + m \quad \text{och} \quad 0 = k\cdot 3 + m.$$

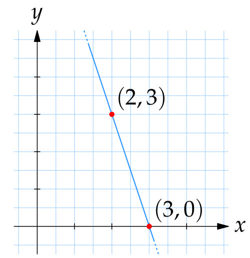
Tar vi differensen mellan ekvationerna försvinner m och vi kan räkna ut riktningskoefficienten k,

$$\begin{aligned}3 - 0 &= k\cdot 2 + m - (k\cdot 3 + m),\\ 3 &= -k.\end{aligned}$$

Detta insatt i ekvationen $0 = k\cdot 3 + m$ ger oss sedan ett värde på m,

$$m = -3k = -3\cdot(-3) = 9.$$

Linjens ekvation är alltså $y = -3x + 9$.



Den räta linjen $y = -3x + 9$ går genom punkterna $(2,3)$ och $(3,0)$.

Anm. För att vara helt säker på att vi räknat rätt kontrollerar vi att punkterna $(2,3)$ och $(3,0)$ uppfyller linjens ekvation.

$(x,y) = (2,3)$: VL $= 3$ och HL $= -3\cdot 2 + 9 = 3$.

$(x,y) = (3,0)$: VL $= 0$ och HL $= -3\cdot 3 + 9 = 0$.

b) Eftersom den räta linjen ska ha riktningskoefficient -3 så kan dess ekvation skrivas som

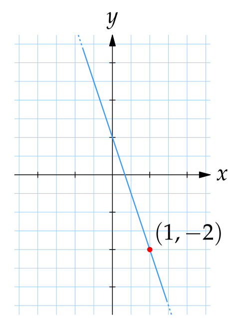
$$y = -3x + m,$$

där m är en konstant. Om linjen dessutom ska passera genom punkten $(x,y) = (1,-2)$ så måste den punkten uppfylla linjens ekvation,

$$-2 = -3\cdot 1 + m,$$

och detta ger att $m = 1$.

Svaret är alltså att linjens ekvation är $y = -3x + 1$.



Den räta linjen $y = -3x + 1$ har riktningskoefficient -3 och går genom punkten $(1,-2)$.

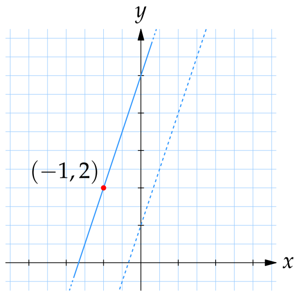
c) Två räta linjer är parallella om de har samma riktningskoefficient. Från linjen $y = 3x + 1$ kan vi avläsa att den har riktningskoefficienten 3 (koefficienten framför x) och därför har vår sökta linje en ekvation på formen

$$y = 3x + m,$$

där m är någon konstant. Villkoret att linjen också ska innehålla punkten $(-1,2)$ betyder att punkten ska uppfylla linjens ekvation,

$$2 = 3\cdot(-1) + m,$$

vilket ger att $m = 5$. Alltså är linjens ekvation $y = 3x+5$.



Den räta linjen $y = 3x+5$ (heldragen) är parallell med den räta linjen $y = 3x+1$ (streckad) och går genom punkten $(-1,2)$.

d) Om två (icke-lodräta) linjer är vinkelräta mot varandra så är det samma sak som att deras riktningskoefficienter k_1 respektive k_2 uppfyller sambandet $k_1k_2 = -1$, och från detta samband får vi att den sökta linjen måste ha riktningskoefficient som är

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\tfrac{1}{2},$$

i och med att linjen $y = 2x+5$ har riktningskoefficient $k_1 = 2$ (koefficienten framför x).

Vår sökta linjes ekvation kan alltså skrivas i formen

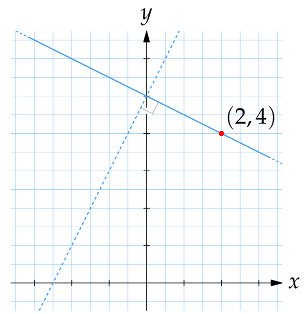
$$y = -\tfrac{1}{2}x + m,$$

med m som en obekant konstant.

Eftersom punkten $(2,4)$ ska ligga på linjen så måste $(2,4)$ uppfylla linjens ekvation,

$$4 = -\tfrac{1}{2}\cdot 2 + m,$$

dvs. $m = 5$. Linjens ekvation är $y = -\tfrac{1}{2}x+5$.



Linjen $y = -\tfrac{1}{2}x+5$ (heldragen) är vinkelrät mot linjen $y = 2x+5$ (streckad) och går genom punkten $(2,4)$.

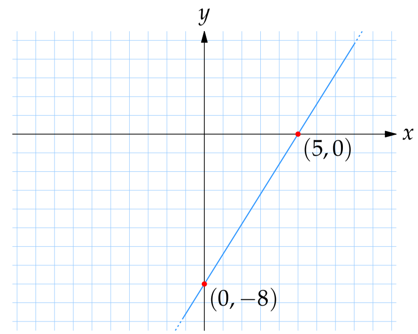
e) Linjen ska gå genom punkterna $(5,0)$ och $(0,-8)$ som därför måste uppfylla linjens ekvation $y = kx+m$, dvs.

$$0 = k\cdot 5 + m \quad\text{och}\quad -8 = k\cdot 0 + m.$$

Från den andra ekvationen får vi att $m = -8$ och detta insatt i den första ekvationen ger att

$$0 = 5k - 8 \quad\Leftrightarrow\quad k = \tfrac{8}{5}.$$

Linjens riktningskoefficient är $\tfrac{8}{5}$.



Den linje som går genom punkterna $(0,-8)$ och $(5,0)$ har ekvationen $y = \tfrac{8}{5}x - 8$ och riktningskoefficient $\tfrac{8}{5}$.

2.2:6 a) Skärningspunkten mellan två linjer är definitionsmässigt den punkt som ligger på båda linjerna, och måste därför uppfylla båda linjernas ekvationer.

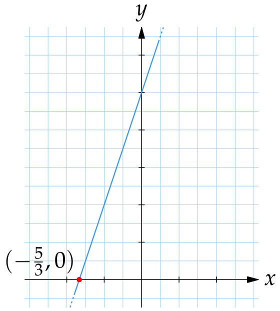
Om skärningspunkten har koordinaterna (x,y) då gäller att

$$\begin{cases} y = 3x+5, \\ y = 0, \end{cases}$$

där $y = 0$ är x-axelns ekvation. Sätter vi in $y = 0$ i den första ekvationen så får vi

$$0 = 3x + 5, \quad \text{dvs. } x = -\tfrac{5}{3}.$$

Skärningspunkten är $\left(-\tfrac{5}{3}, 0\right)$.

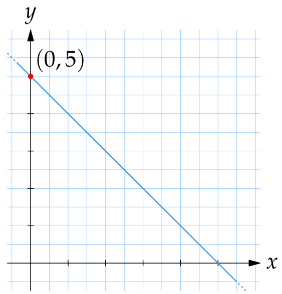


Skärningspunkten mellan linjen $y = 3x + 5$ och x-axeln är $\left(-\tfrac{5}{3}, 0\right)$.

b) Eftersom skärningspunkten ligger på båda linjerna så uppfyller den också båda linjers ekvationer,

$$y = -x + 5 \quad \text{och} \quad x = 0,$$

där $x = 0$ är y-axelns ekvation. Den andra ekvationen $x = 0$ insatt i den första ekvationen ger att $y = -0 + 5 = 5$. Det betyder att skärningspunkten är $(0, 5)$.



Skärningspunkten mellan linjen $y = -x + 5$ och y-axeln är $(0, 5)$.

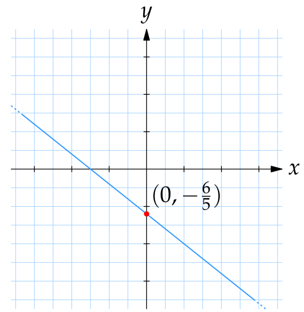
c) Vi får fram skärningspunkten som den punkt som uppfyller båda linjers ekvationer,

$$4x + 5y + 6 = 0 \quad \text{och} \quad x = 0.$$

Med $x = 0$ insatt i $4x + 5y + 6 = 0$ fås att

$$4 \cdot 0 + 5y + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\tfrac{6}{5}.$$

Detta ger att skärningspunkten är $\left(0, -\tfrac{6}{5}\right)$.



Skärningspunkten mellan linjen $4x + 5y + 6 = 0$ och y-axeln är $\left(0, -\tfrac{6}{5}\right)$.

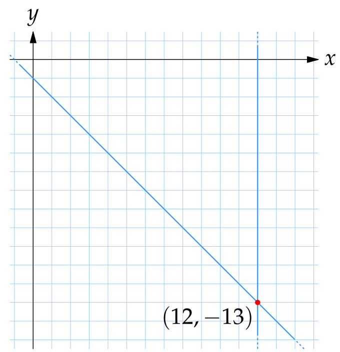
d) I den punkt där linjerna skär varandra har vi en punkt som ligger på båda linjerna och som därför måste uppfylla båda linjers ekvationer,

$$x + y + 1 = 0 \quad \text{och} \quad x = 12.$$

Lösningen till detta ekvationssystem får vi genom att sätta in $x = 12$ i den första ekvationen,

$$12 + y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -13,$$

vilket ger oss skärningspunkten $(12, -13)$.



Skärningspunkten mellan linjerna $x + y + 1 = 0$ och $x = 12$ (lodrät) är $(12, -13)$.

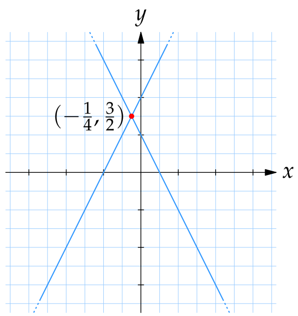
e) Linjerna har en skärningspunkt i den punkt som samtidigt uppfyller båda linjers ekvationer,

$$2x + y - 1 = 0 \quad \text{och} \quad y - 2x - 2 = 0.$$

Om vi löser ut y från den andra ekvationen, $y = 2x + 2$, och stoppar in i den första ekvationen får vi en ekvation som bara innehåller x,

$$2x + (2x + 2) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 1 = 0,$$

vilket ger att $x = -\frac{1}{4}$. Sedan får vi från sambandet $y = 2x + 2$ att $y = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 = \frac{3}{2}$. Skärningspunkten är $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$.



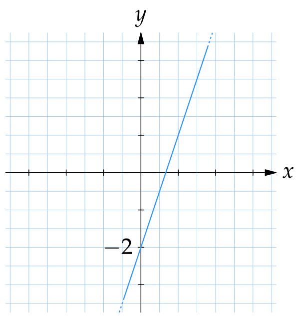
Skärningspunkten mellan linjerna $2x + y - 1 = 0$ och $y - 2x - 2 = 0$ är $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2})$.

Vi kontrollerar för säkerhets skull att $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$ verkligen uppfyller båda ekvationerna.

$2x + y - 1 = 0$: VL $= 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{2} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = 0 =$ HL.

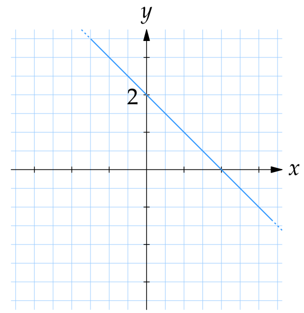
$y - 2x - 2 = 0$: VL $= \frac{3}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = 0 =$ HL.

2.2:7 a) Grafen till den linjära funktionen $y = 3x - 2$ är en rät linje som har riktningskoefficient lika med 3 (koefficienten framför x) och skär y-axeln i $y = -2$.



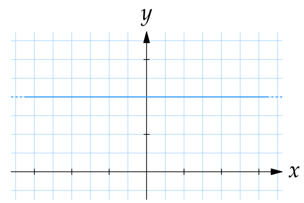
Grafen till funktionen $f(x) = 3x - 2$.

b) Funktionen har en graf $y = 2 - x$ som är en rät linje. Denna räta linje har riktningskoefficient -1 (koefficienten framför x) och skär y-axeln i $y = 2$.



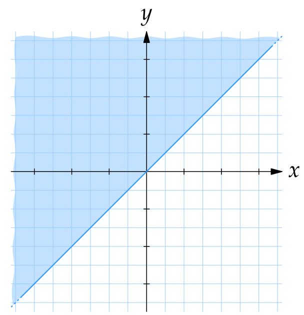
Grafen till funktionen $f(x) = 2 - x$.

c) I detta fall är grafen helt enkelt den horisontella linjen $y = 2$.



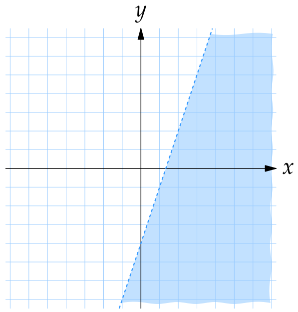
Grafen till funktionen $f(x) = 2$.

2.2:8 a) Om vi ritar upp gränsfallet då likhet gäller så får vi den räta linjen $y = x$, och mängden består därför av alla punkter ovanför denna linje, där y-koordinaten är större än x-koordinaten.



Det färgade området utgörs av punkter som uppfyller $y \geq x$.

b) En punkt vars koordinater uppfyller $y < 3x - 4$ har en y-koordinat som är mindre än vad den punkt har som befinner sig på linjen $y = 3x - 4$ och har samma x-koordinat. Det betyder att området som vi ska skissera består av alla punkter under linjen $y = 3x - 4$.



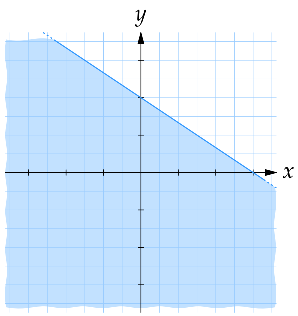
Punkterna som uppfyller olikheten $y < 3x - 4$ bildar det färgade området. De punkter som ligger på den streckade linjen tillhör inte området.

Linjen $y = 3x - 4$ kan vi rita upp genom att välja två x-värden, t.ex. $x = 0$ och $x = 1$, beräkna med linjens ekvation motsvarande y-koordinater, $y = 3 \cdot 0 - 4 = -4$ respektive $y = 3 \cdot 1 - 4 = -1$, och sedan dra en rät linje genom de två punkter vi fått.

c) Genom att flytta över x-termen i högerledet och dela med 3 kan olikheten skrivas som

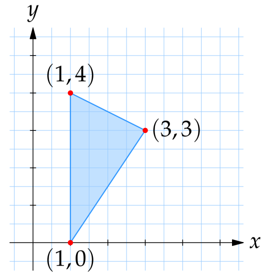
$$y \leq 2 - \tfrac{2}{3}x,$$

och då ser vi att området som vi ska rita upp består av alla punkter under den räta linjen $y = 2 - \frac{2}{3}x$.



Punkterna som uppfyller olikheten $2x + 3y \leq 6$ bildar det färgade området.

2.2:9 a) Vi kan börja med att rita upp punkterna $(1,4)$, $(3,3)$ och $(1,0)$ i ett koordinatsystem, och dra linjestycken mellan dem, så att vi får en bild av hur triangeln ser ut.



Om vi nu tänker oss att vi ska använda oss av att arean av en triangel ges av formeln

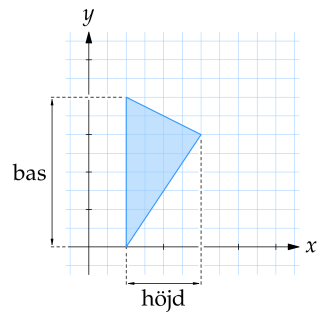
$$\text{area} = \tfrac{1}{2}(\text{basen}) \cdot (\text{höjden}),$$

så är det mest lämpliga att vi väljer kanten från $(1,0)$ till $(1,4)$ som bas för triangeln. Då är nämligen basen parallell med y-axeln och vi kan avläsa dess längd som skillnaden i y-koordinat mellan hörnpunkterna $(1,0)$ och $(1,4)$, dvs.

$$\text{basen} = 4 - 0 = 4.$$

Dessutom blir höjden i triangeln det horisontella avståndet från den tredje hörnpunkten $(3,3)$ till basen och det kan vi avläsa som skillnaden i x-led mellan $(3,3)$ och linjen $x = 1$, dvs.

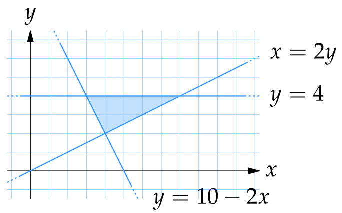
$$\text{höjden} = 3 - 1 = 2.$$



Triangelns area är alltså

$$\text{area} = \tfrac{1}{2}(\text{basen}) \cdot (\text{höjden}) = \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ a.e.}$$

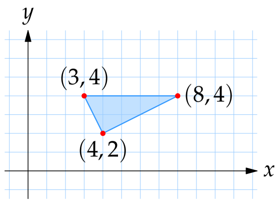
b) Ett första steg är att vi ritar upp linjerna så att vi får en överblick av hur triangeln ser ut.



Hörnpunkterna i triangeln är skärningspunkterna mellan linjerna och de får vi fram mer exakt genom att välja linjernas ekvationer parvis och lösa de ekvationssystem som uppstår,

$$\begin{cases} x = 2y, \\ y = 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y, \\ y = 10 - 2x, \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} y = 4, \\ y = 10 - 2x. \end{cases}$$

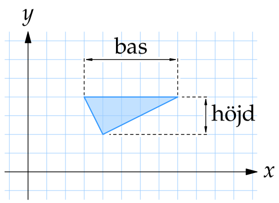
Det första ekvationssystemet har lösningen $(x,y) = (8,4)$, det andra systemet har lösningen $(x,y) = (4,2)$ och det tredje $(x,y) = (3,4)$.



Återgår vi till arean av triangeln så ges den av formeln

$$\text{area} = \tfrac{1}{2}(\text{basen}) \cdot (\text{höjden}),$$

och vi är helt fria att välja vilken kant i triangeln som ska vara bas. Eftersom en av kanterna är parallell med x-axeln verkar det bäst att välja den som bas, för då kan vi enkelt läsa av längden av basen och höjden som koordinatskillnader mellan hörnpunkterna.



Basen ges som det horisontella avståndet mellan $(3,4)$ och $(8,4)$,

$$\text{basen} = 8 - 3 = 5,$$

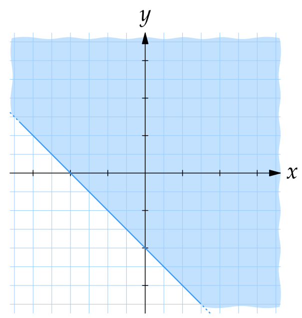
och höjden får vi på samma sätt som skillnaden i y-led mellan basen $y = 4$ och hörnpunkten $(4,2)$,

$$\text{basen} = 4 - 2 = 2.$$

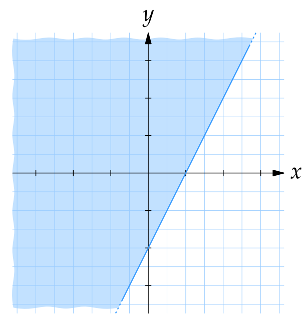
Triangelns area är

$$\text{area} = \tfrac{1}{2}(\text{basen}) \cdot (\text{höjden}) = \tfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5 \text{ a.e.}$$

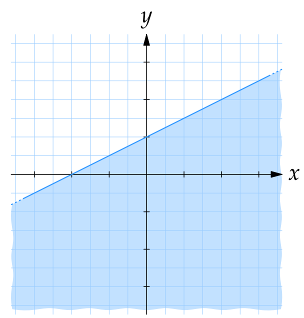
c) Först ritar vi upp områdena som de enskilda olikheterna definierar.



Området $x + y \geq -2$

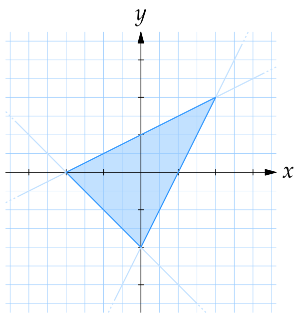


Området $2x - y \leq 2$



Området $2y - x \leq 2$

Triangeln är definierad som de punkter som uppfyller alla olikheter, vilket är den region som de tre färgade områdena har gemensamt.



Innan vi börjar fundera över hur vi ska beräkna arean av triangeln bestämmer vi hörnpunkterna till triangeln.

Skriver vi upp kantlinjernas ekvationer två och två,

$$(1)\ \begin{cases} x+y=-2,\\ 2x-y=\ \ 2,\end{cases}\qquad (2)\ \begin{cases} x+\ y=-2,\\ -x+2y=\ \ 2,\end{cases}\qquad (3)\ \begin{cases} 2x-\ y=2,\\ -x+2y=2,\end{cases}$$

så får vi ekvationssystem som bestämmer skärningspunkterna mellan respektive par av linjer och dessa skärningspunkter svarar mot triangelns hörn.

(1): Det första systemet kan vi lösa genom att summera de två ekvationerna.

$$\begin{array}{rl} & x+y=-2\\ + & 2x-y=\ \ 2\\ \hline & 3x\quad\ =\ \ 0\end{array}$$

Då får vi att $x=0$ och sedan från ekvationen $x+y=-2$ att $y=-2$.

(2): På samma sätt summerar vi ekvationerna i det andra ekvationssystemet,

$$\begin{array}{rl} & x+\ y=-2\\ + & -x+2y=\ \ 2\\ \hline & 3y=\ \ 0\end{array}$$

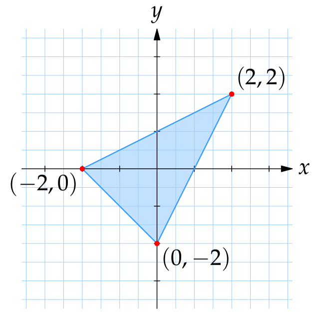
vilket ger att $y=0$ och då är $x=-2$.

(3): Det sista ekvationssystemet är lite knepigare att lösa men om vi ur den första ekvationen löser ut y, $y=2x-2$, och stoppar in i den andra ekvationen får vi

$$-x+2(2x-2)=2 \quad\Leftrightarrow\quad 3x-4=2 \quad\Leftrightarrow\quad x=2.$$

Motsvarande värde på y är $y=2\cdot 2-2=2$.

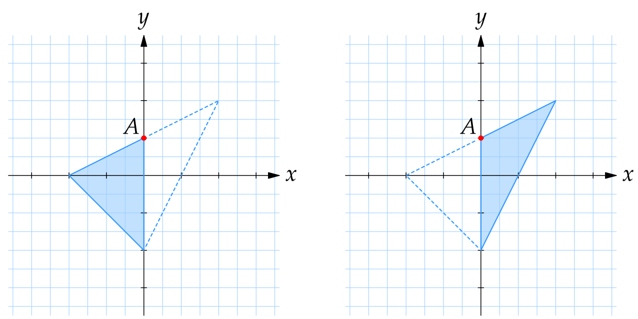
Triangelns hörnpunkter är alltså $(0,-2)$, $(-2,0)$ och $(2,2)$.



Problemet som vi ställs inför när vi ska räkna ut arean av triangeln med formeln

$$\text{area} = \tfrac{1}{2}(\text{basen})\cdot(\text{höjden})$$

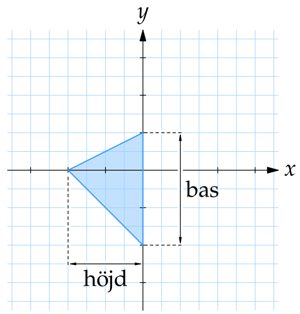
är att det inte finns någon naturlig bas för triangeln i och med att ingen av kanterna är parallell med någon av koordinataxlarna. Vad vi däremot kan göra är att dela upp triangeln längs y-axeln och få två deltrianglar där vi kan använda y-axeln som bas.



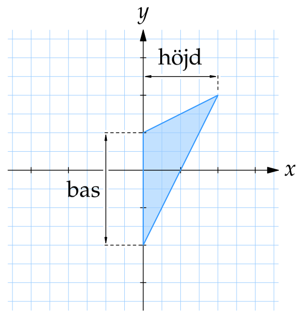
Denna uppdelning skapar en ny hörnpunkt för trianglarna (markerad med A i figuren ovan) och den kan vi bestämma som skärningspunkten mellan linjen $2y-x=2$ och y-axeln,

$$\begin{cases} 2y-x=2,\\ \quad\ \ x=0,\end{cases}$$

vilket ger att den nya hörnpunkten är $(0,1)$. Vi har nu all information som behövs för att räkna ut bas, höjd och area av de två deltrianglarna.



bas $= 1 - (-2) = 3$
höjd $= 0 - (-2) = 2$
area $= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$



bas $= 1 - (-2) = 3$
höjd $= 2 - 0 = 2$
area $= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$

Till sist återstår bara att summera ihop delareorna och få hela triangelns area,

$$\text{area} = 3 + 3 = 6.$$

2.3 Andragradsuttryck

2.3:1 a) Om vi betraktar kvadreringsregeln,

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2,$$

och flyttar över a^2 till vänsterledet så får vi formeln

$$(x-a)^2 - a^2 = x^2 - 2ax.$$

Med hjälp av denna formel kan vi skriva om (kvadratkomplettera) ett blandat uttryck $x^2 - 2ax$ till ett kvadratiskt uttryck $(x-a)^2 - a^2$. Uttrycket $x^2 - 2x$ svarar mot $a = 1$ i formeln ovan och därför är

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1.$$

b) I kvadratkompletteringen är bara de två första termerna $x^2 + 2x$ inblandade. Den allmänna formeln för kvadratkomplettering säger att $x^2 + ax$ är lika med

$$\Big(x + \frac{a}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{a}{2}\Big)^2.$$

Notera hur koefficienten a framför x dyker upp halverad på två platser. Använder vi denna formel så får vi att

$$x^2 + 2x = \big(x + \tfrac{2}{2}\big)^2 - \big(\tfrac{2}{2}\big)^2 = (x+1)^2 - 1,$$

och subtraherar vi den sista 1:an så fås att

$$x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 1 - 1 = (x+1)^2 - 2.$$

För att vara helt säker på att vi har använt rätt formel kan vi utveckla kvadraten i högerledet,

$$(x+1)^2 - 2 = x^2 + 2x + 1 - 2 = x^2 + 2x - 1,$$

och se att sambandet verkligen stämmer.

c) Som vid all kvadratkomplettering så koncentrerar vi oss på de kvadratiska och linjära termerna, $2x - x^2$, som vi också kan skriva som $-(x^2 - 2x)$. Bortser vi från minustecknet så kan uttrycket $x^2 - 2x$ kvadratkompletteras med formeln

$$x^2 - ax = \Big(x - \frac{a}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{a}{2}\Big)^2,$$

och vi får att

$$x^2 - 2x = \big(x - \tfrac{2}{2}\big)^2 - \big(\tfrac{2}{2}\big)^2 = (x-1)^2 - 1.$$

Detta betyder att

$$\begin{aligned}5+2x-x^2 &= 5-(x^2-2x) = 5-\big((x-1)^2-1\big)\\ &= 5-(x-1)^2+1 = -(x-1)^2+6.\end{aligned}$$

En kontroll visar också att vi kvadratkompletterat rätt,

$$\begin{aligned}-(x-1)^2+6 &= -(x^2-2x+1)+6 = -x^2+2x-1+6\\ &= -x^2+2x+5.\end{aligned}$$

d) Vi applicerar standardformeln för kvadratkomplettering,

$$x^2+ax = \Big(x+\frac{a}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{a}{2}\Big)^2,$$

på vårt uttryck och det ger att

$$x^2+5x = \big(x+\tfrac{5}{2}\big)^2 - \big(\tfrac{5}{2}\big)^2 = \big(x+\tfrac{5}{2}\big)^2 - \tfrac{25}{4}.$$

Hela uttrycket blir

$$\begin{aligned}x^2+5x+3 &= \big(x+\tfrac{5}{2}\big)^2 - \tfrac{25}{4}+3\\ &= \big(x+\tfrac{5}{2}\big)^2 - \tfrac{25}{4}+\tfrac{12}{4}\\ &= \big(x+\tfrac{5}{2}\big)^2 + \tfrac{-25+12}{4}\\ &= \big(x+\tfrac{5}{2}\big)^2 - \tfrac{13}{4}.\end{aligned}$$

En kontroll visar om vi räknat rätt,

$$\begin{aligned}\big(x+\tfrac{5}{2}\big)^2 - \tfrac{13}{4} &= x^2+2\cdot\tfrac{5}{2}x+\big(\tfrac{5}{2}\big)^2-\tfrac{13}{4}\\ &= x^2+5x+\tfrac{25}{4}-\tfrac{13}{4}\\ &= x^2+5x+\tfrac{12}{4}\\ &= x^2+5x+3.\end{aligned}$$

2.3:2 a) Vi löser andragradsekvationen genom att kombinera ihop x^2- och x-termen via en kvadratkomplettering till ett kvadratiskt uttryck och löser sedan den ekvation som uppstår med rotutdragning.
Med en kvadratkomplettering blir vänsterledet

$$\underline{x^2-4x}+3 = \underline{(x-2)^2-2^2}+3 = (x-2)^2-1,$$

där den understrukna delen är själva kvadratkompletteringen. Ekvationen kan därför skrivas som

$$(x-2)^2-1=0,$$

som vi löser genom att flytta över 1:an i högerledet och använder rotutdragning.
Detta ger oss lösningarna

- $x-2=\sqrt{1}=1$, dvs. $x=2+1=3$,
- $x-2=-\sqrt{1}=-1$, dvs. $x=2-1=1$.

Eftersom det är lätt att räkna fel kontrollerar vi svaret genom att sätta in $x=1$ respektive $x=3$ i den ursprungliga ekvationen,

$x=1$: VL $=1^2-4\cdot1+3=1-4+3=0=$ HL,

$x=3$: VL $=3^2-4\cdot3+3=9-12+3=0=$ HL.

b) Huvudsteget när vi löser andragradsekvationen är att kvadratkomplettera vänsterledet,

$$y^2+2y-15=(y+1)^2-1^2-15=(y+1)^2-16.$$

Ekvationen kan nu skrivas som

$$(y+1)^2=16,$$

och har, efter rotutdragning, lösningarna

- $y+1=\sqrt{16}=4$, vilket ger $y=-1+4=3$,
- $y+1=-\sqrt{16}=-4$, vilket ger $y=-1-4=-5$.

En kontroll visar också att $y=-5$ och $y=3$ uppfyller ekvationen

$y=-5$: VL $=(-5)^2+2\cdot(-5)-15=25-10-15=0=$ HL,

$y=3$: VL $=3^2+2\cdot3-15=9+6-15=0=$ HL.

c) Vi börjar med att kvadratkomplettera vänsterledet,

$$\begin{aligned}y^2+3y+4 &= \big(y+\tfrac{3}{2}\big)^2-\big(\tfrac{3}{2}\big)^2+4\\ &= \big(y+\tfrac{3}{2}\big)^2-\tfrac{9}{4}+\tfrac{16}{4}\\ &= \big(y+\tfrac{3}{2}\big)^2+\tfrac{7}{4}.\end{aligned}$$

Ekvationen är alltså

$$\big(y+\tfrac{3}{2}\big)^2+\tfrac{7}{4}=0.$$

Den första termen $\big(y+\tfrac{3}{2}\big)^2$ är alltid större än eller lika med 0 eftersom det är en kvadrat, och den andra termen $\tfrac{7}{4}$ är ett positivt tal. Det betyder att vänsterledet kan inte, oavsett hur y väljs, vara mindre än $\tfrac{7}{4}$ och därmed inte lika med noll. Ekvationen saknar lösning.

d) Ekvationen kan skrivas i normalform (dvs. koefficienten framför x^2 är 1) genom att dela båda led med 4,

$$x^2-7x+\tfrac{13}{4}=0.$$

Kvadratkomplettera nu vänsterledet,

$$\begin{aligned} x^2-7x+\tfrac{13}{4} &= \bigl(x-\tfrac{7}{2}\bigr)^2-\bigl(\tfrac{7}{2}\bigr)^2+\tfrac{13}{4}\\ &= \bigl(x-\tfrac{7}{2}\bigr)^2-\tfrac{49}{4}+\tfrac{13}{4}\\ &= \bigl(x-\tfrac{7}{2}\bigr)^2-\tfrac{36}{4}\\ &= \bigl(x-\tfrac{7}{2}\bigr)^2-9. \end{aligned}$$

Ekvationen kan därför skrivas som

$$\bigl(x-\tfrac{7}{2}\bigr)^2=9,$$

och rotutdragning ger att lösningarna är

- $x-\frac{7}{2}=\sqrt{9}=3$, dvs. $x=\frac{7}{2}+3=\frac{13}{2}$,
- $x-\frac{7}{2}=-\sqrt{9}=-3$, dvs. $x=\frac{7}{2}-3=\frac{1}{2}$.

Som en extra kontroll sätter vi in $x=\frac{1}{2}$ och $x=\frac{13}{2}$ i ekvationen.

$$\begin{aligned} x=\tfrac{1}{2}:\quad \text{VL} &= 4\cdot\bigl(\tfrac{1}{2}\bigr)^2-28\cdot\tfrac{1}{2}+13=4\cdot\tfrac{1}{4}-14+13=1-14+13\\ &= 0=\text{HL}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=\tfrac{13}{2}:\quad \text{VL} &= 4\cdot\bigl(\tfrac{13}{2}\bigr)^2-28\cdot\tfrac{13}{2}+13=4\cdot\tfrac{169}{4}-14\cdot 13+13\\ &= 169-182+13=0=\text{HL}. \end{aligned}$$

e) Skriv ekvationen i normalform genom att dela båda led med 5,

$$x^2+\tfrac{2}{5}x-\tfrac{3}{5}=0.$$

Kvadratkomplettera vänsterledet,

$$\begin{aligned} x^2+\tfrac{2}{5}x-\tfrac{3}{5} &= \left(x+\frac{\frac{2}{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\frac{2}{5}}{2}\right)^2-\tfrac{3}{5}\\ &= \bigl(x+\tfrac{1}{5}\bigr)^2-\bigl(\tfrac{1}{5}\bigr)^2-\tfrac{3}{5}\\ &= \bigl(x+\tfrac{1}{5}\bigr)^2-\tfrac{1}{25}-\tfrac{3\cdot 5}{25}\\ &= \bigl(x+\tfrac{1}{5}\bigr)^2-\tfrac{16}{25}. \end{aligned}$$

Ekvationen är nu omskriven som

$$\bigl(x+\tfrac{1}{5}\bigr)^2=\tfrac{16}{25},$$

och rotutdragning ger att lösningarna är

- $x+\frac{1}{5}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$, eftersom $\bigl(\frac{4}{5}\bigr)^2=\frac{16}{25}$, vilket ger att $x=-\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$,
- $x+\frac{1}{5}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$, vilket ger att $x=-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-1$.

Slutligen kontrollerar vi svaret genom att sätta in $x=-1$ och $x=\frac{3}{5}$ i ekvationen.

$$x=-1:\quad \text{VL}=5\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-3=5-2-3=0=\text{HL},$$

$$\begin{aligned} x=\tfrac{3}{5}:\quad \text{VL} &= 5\cdot\bigl(\tfrac{3}{5}\bigr)^2+2\cdot\bigl(\tfrac{3}{5}\bigr)-3=5\cdot\tfrac{9}{25}+\tfrac{6}{5}-\tfrac{3\cdot 5}{5}=\tfrac{9+6-15}{5}\\ &= 0=\text{HL}. \end{aligned}$$

f) Vi delar båda led med 3 och kvadratkompletterar vänsterledet,

$$\begin{aligned} x^2-\tfrac{10}{3}x+\tfrac{8}{3} &= \bigl(x-\tfrac{5}{3}\bigr)^2-\bigl(\tfrac{5}{3}\bigr)^2+\tfrac{8}{3}\\ &= \bigl(x-\tfrac{5}{3}\bigr)^2-\tfrac{25}{9}+\tfrac{24}{9}\\ &= \bigl(x-\tfrac{5}{3}\bigr)^2-\tfrac{1}{9}. \end{aligned}$$

Ekvationen blir då $\bigl(x-\frac{5}{3}\bigr)^2=\frac{1}{9}$ och rotutdragning ger att lösningarna är

- $x-\frac{5}{3}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$, dvs. $x=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}=2$,
- $x-\frac{5}{3}=-\sqrt{\frac{1}{9}}=-\frac{1}{3}$, dvs. $x=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

Kontroll:

$$x=\tfrac{4}{3}:\quad \text{VL}=3\cdot\bigl(\tfrac{4}{3}\bigr)^2-10\cdot\tfrac{4}{3}+8=3\cdot\tfrac{16}{9}-\tfrac{40}{3}+\tfrac{8\cdot 3}{3}=\tfrac{16-40+24}{3}=0=\text{HL},$$

$$x=2:\quad \text{VL}=3\cdot 2^2-10\cdot 2+8=12-20+8=0=\text{HL}.$$

2.3:3 a) Vänsterledet i ekvationen består av två faktorer x och $x+3$. Det finns bara en möjlighet att deras produkt är noll och det är om någon av x eller $x+3$ är noll.
Ekvationen har alltså lösningarna $x=0$ och $x=-3$.

b) Ekvationens vänsterled blir noll endast när någon av faktorerna $x-3$ eller $x+5$ är noll, dvs. lösningarna till ekvationen är $x=3$ och $x=-5$.

c) För att ekvationen ska vara uppfylld måste någon av faktorerna $3x-2$ eller $x+8$ i vänsterledet vara noll och detta ger oss att lösningarna är $x=\frac{2}{3}$ och $x=-8$.

d) Eftersom båda termerna $x(x+3)$ och $x(2x-9)$ innehåller faktorn x kan vi bryta ut x från vänsterledet och samla ihop det resterande uttrycket,

$$\begin{aligned} x(x+3)-x(2x-9) &= x\bigl((x+3)-(2x-9)\bigr)\\ &= x(x+3-2x+9)\\ &= x(-x+12). \end{aligned}$$

Alltså är ekvationen

$$x(-x+12)=0,$$

och vi får direkt att ekvationen är uppfylld endast om antingen x eller $-x+12$ är noll. Lösningarna till ekvationen är därför $x=0$ och $x=12$.

Här kan det vara värt att kontrollera att $x=12$ är en lösning (fallet $x=0$ är uppenbart),

$$\text{VL} = 12\cdot(12+3) - 12\cdot(2\cdot 12-9) = 12\cdot 15 - 12\cdot 15 = 0 = \text{HL}.$$

e) I detta fall ser vi att vänsterledet innehåller faktorn $x+3$ som vi kan bryta ut och få

$$\begin{aligned}(x+3)(x-1)-(x+3)(2x-9) &= (x+3)\big((x-1)-(2x-9)\big)\\ &= (x+3)(x-1-2x+9)\\ &= (x+3)(-x+8).\end{aligned}$$

Denna omskrivning av ekvationen resulterar i den nya ekvationen

$$(x+3)(-x+8)=0,$$

som har lösningarna $x=-3$ och $x=8$.

Vi kontrollerar lösningen $x=8$ genom att stoppa in den i ekvationen,

$$\text{VL} = (8+3)\cdot(8-1)-(8+3)\cdot(2\cdot 8-9) = 11\cdot 7 - 11\cdot 7 = 0 = \text{HL}.$$

f) Den första termen $x(x^2-2x)$ i vänsterledet kan vi dela upp i faktorer genom att bryta ut x ur parentesen, $x(x^2-2x) = x\cdot x\cdot(x-2)$, och den andra termen kan vi skriva som $x(2-x) = -x(x-2)$. Från detta ser vi att båda termerna innehåller $x(x-2)$ som gemensamma faktorer och bryter vi ut de faktorerna blir vänsterledet

$$\begin{aligned}x(x^2-2x)+x(2-x) &= x^2(x-2)-x(x-2)\\ &= x\big(x(x-2)-(x-2)\big)\\ &= x(x-2)(x-1).\end{aligned}$$

Hela ekvationen kan alltså skrivas som

$$x(x-2)(x-1)=0,$$

och denna ekvation är uppfylld endast när en av de tre faktorerna x, $x-2$ eller $x-1$ är noll, dvs. lösningarna till ekvationen är $x=0$, $x=2$ och $x=1$.

Eftersom det inte är helt uppenbart att $x=1$ är en lösning till ekvationen kontrollerar vi att $x=1$ uppfyller ekvationen (att vi inte råkat räkna fel),

$$\text{VL} = 1\cdot(1^2-2\cdot 1)+1\cdot(2-1) = 1\cdot(-1)+1\cdot 1 = 0 = \text{HL}.$$

2.3:4 a) En första tanke kanske är att skriva upp ekvationen som

$$x^2+ax+b=0$$

och sedan försöka välja konstanterna a och b på något sätt så att $x=-1$ och $x=2$ blir lösningar. Men ett bättre sätt är att vi utgår från en faktoriserad form på andragradsekvationen,

$$(x+1)(x-2)=0.$$

Om vi betraktar denna ekvation så ser vi att både $x=-1$ och $x=2$ är lösningar till ekvationen i och med att $x=-1$ gör att den första faktorn i vänsterledet är noll medan $x=2$ gör att den andra faktorn är noll. Det är också verkligen en andragradsekvation eftersom om vi multiplicerar ut vänsterledet så får vi att

$$x^2-x-2=0.$$

Ett svar är alltså ekvationen $(x+1)(x-2)=0$, eller om man vill, $x^2-x-2=0$.

Anm. Det finns egentligen många svar på denna uppgift men vad alla andragradsekvationer som har $x=-1$ och $x=2$ som rötter har gemensamt är att de kan skrivas i formen

$$ax^2-ax-2a=0,$$

där a är en nollskild konstant.

b) En förstagradsekvation som har $x=1+\sqrt{3}$ som rot är $x-(1+\sqrt{3})=0$, som vi också kan skriva som $x-1-\sqrt{3}=0$. På samma sätt har vi att $x-(1-\sqrt{3})=0$, dvs. $x-1+\sqrt{3}=0$, är en förstagradsekvation som har $x=1-\sqrt{3}$ som rot. Om vi multiplicerar ihop dessa två förstagradsekvationer så får vi en andragradsekvation med just $x=1+\sqrt{3}$ och $x=1-\sqrt{3}$ som rötter,

$$(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})=0.$$

Den första faktorn blir noll när $x=1+\sqrt{3}$ och den andra faktorn blir noll när $x=1-\sqrt{3}$.

Inget hindrar oss egentligen från att svara med $(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})=0$ men om vi vill ge ekvationen i standardform så behöver vi utveckla vänsterledet,

$$\begin{aligned}&(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})\\ &\quad = x^2-x+\sqrt{3}x-x+1-\sqrt{3}-\sqrt{3}x+\sqrt{3}-(\sqrt{3})^2\\ &\quad = x^2+(-x+\sqrt{3}x-x-\sqrt{3}x)+(1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3)\\ &\quad = x^2-2x-2,\end{aligned}$$

och får ekvationen $x^2 - 2x - 2 = 0$.

Anm. Precis som i a-uppgiften kan vi multiplicera ekvationen med en nollskild konstant a,

$$ax^2 - 2ax - 2a = 0,$$

och fortfarande ha en andragradsekvation med samma rötter.

c) Ekvationen $(x-3)(x-\sqrt{3}) = 0$ är en andragradsekvation som har $x = 3$ och $x = \sqrt{3}$ som rötter; när $x = 3$ är den första faktorn noll och när $x = \sqrt{3}$ är den andra faktorn noll.
Om vi utvecklar ekvationens vänsterled,

$$\begin{aligned}(x-3)(x-\sqrt{3}) &= x^2 - \sqrt{3}x - 3x + 3\sqrt{3}\\ &= x^2 - (3+\sqrt{3})x + 3\sqrt{3},\end{aligned}$$

får vi ekvationen i standardform,

$$x^2 - (3+\sqrt{3})x + 3\sqrt{3} = 0.$$

Anm. Det allmänna svaret är $ax^2 - (3+\sqrt{3})ax + 3\sqrt{3}a = 0$, där $a \neq 0$ är en konstant.

2.3:5 a) I denna uppgift kan vi utnyttja tekniken att skriva ekvationer faktoriserade. Betrakta i vårt fall ekvationen

$$(x+7)(x+7) = 0.$$

Denna ekvation har bara $x = -7$ som rot eftersom båda faktorerna blir noll endast när $x = -7$. Dessutom är det en andragradsekvation, som vi tydligt ser om vänsterledet utvecklas,

$$(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49.$$

Ett svar är alltså ekvationen $x^2 + 14x + 49 = 0$.

Anm. Alla andragradsekvationer som bara har $x = -7$ som rot kan skrivas $ax^2 + 14ax + 49a = 0$, där a är en nollskild konstant.

b) Istället för att lite planlöst prova med några x-värden så kan vi undersöka andragradsuttrycket bättre om vi kvadratkompletterar,

$$\begin{aligned}4x^2 - 28x + 48 &= 4(x^2 - 7x + 12)\\ &= 4\bigl((x-\tfrac{7}{2})^2 - (\tfrac{7}{2})^2 + 12\bigr)\\ &= 4\bigl((x-\tfrac{7}{2})^2 - \tfrac{49}{4} + \tfrac{48}{4}\bigr)\\ &= 4\bigl((x-\tfrac{7}{2})^2 - \tfrac{1}{4}\bigr)\\ &= 4(x-\tfrac{7}{2})^2 - 1.\end{aligned}$$

I det kvadratkompletterade uttrycket ser vi att om t.ex. $x = \frac{7}{2}$ så är hela uttrycket negativt och lika med -1.

Anm. Alla x-värden mellan 3 och 4 ger ett negativt värde på uttrycket.

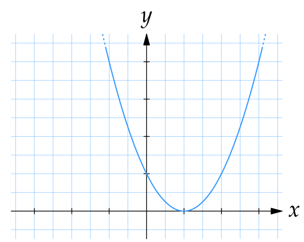
c) Om $x = 1$ ska vara en rot till ekvationen så ska ekvationen vara uppfylld om vi stoppar in $x = 1$ i den, dvs. $1^2 + 4 \cdot 1 + b = 5 + b$ ska vara lika med noll och detta ger direkt att $b = -5$.

2.3:6 a) Polynomet känner vi igen med kvadreringsregeln som

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Detta kvadratuttryck är som minst lika med noll när $x - 1 = 0$, dvs. $x = 1$. Alla nollskilda värden på $x - 1$ ger ett positivt värde på $(x-1)^2$.

Anm. Ritar vi upp kurvan $y = (x-1)^2$ så ser vi att den har ett minimivärde 0 i $x = 1$.



Grafen till $f(x) = (x-1)^2$.

b) Med kvadratkomplettering kan andragradspolynomet skrivas om som en kvadrat plus en konstant, och då går det relativt enkelt att avläsa uttryckets minsta värde,

$$x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2^2 + 2 = (x-2)^2 - 2.$$

Eftersom $(x-2)^2$ är en kvadrat är denna term alltid större än eller lika med 0 och hela uttrycket blir därför som minst lika med -2 när kvadraten är noll då $x - 2 = 0$, dvs. $x = 2$.

c) Om vi kvadratkompletterar uttrycket har vi att

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 7 &= \bigl(x-\tfrac{5}{2}\bigr)^2 - \bigl(\tfrac{5}{2}\bigr)^2 + 7\\ &= \bigl(x-\tfrac{5}{2}\bigr)^2 - \tfrac{25}{4} + \tfrac{28}{4}\\ &= \bigl(x-\tfrac{5}{2}\bigr)^2 + \tfrac{3}{4},\end{aligned}$$

och eftersom $\bigl(x-\frac{5}{2}\bigr)^2$ är en kvadrat är denna term som minst lika med 0 när $x = \frac{5}{2}$. Detta visar att polynomets minsta värde är $\frac{3}{4}$.

2.3:7 a) I polynomet $1 - x^2$ är bara den andra termen beroende av x och på grund av minustecknet framför den termen blir hela uttrycket som störst när kvadraten x^2 är som minst. Den kvadratiska termen x^2 är som minst när $x = 0$. Därför är polynomets största värde lika med $1 - 0^2 = 1$.

b) Vi skriver om uttrycket med kvadratkomplettering,

$$\begin{aligned}-x^2 + 3x - 4 &= -(x^2 - 3x + 4)\\ &= -\bigl((x - \tfrac{3}{2})^2 - (\tfrac{3}{2})^2 + 4\bigr)\\ &= -\bigl((x - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{9}{4} + \tfrac{16}{4}\bigr)\\ &= -\bigl((x - \tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{7}{4}\bigr)\\ &= -(x - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{7}{4}.\end{aligned}$$

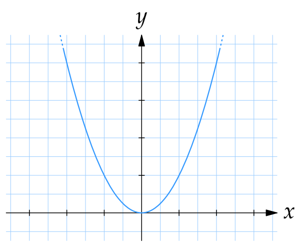
Nu ser vi att den första termen $-(x - \frac{3}{2})^2$ är en kvadrat med ett minustecken framför, så den termen är alltid mindre än eller lika med noll. Detta betyder att polynomets största värde är $-\frac{7}{4}$ och det inträffar när $x - \frac{3}{2} = 0$, dvs. $x = \frac{3}{2}$.

c) Om vi kvadratkompletterar,

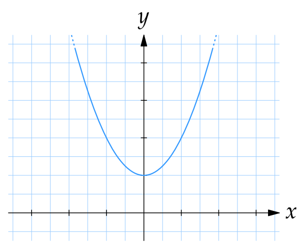
$$x^2 + x + 1 = (x + \tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2 + 1 = (x + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4},$$

så ser vi i högerledet att vi kan få uttrycket att bli hur stort som helst bara genom att vi väljer $x + \frac{1}{2}$ tillräckligt stor. Det finns alltså inget största värde.

2.3:8 a) Kurvan $y = x^2$ är en parabel med minimipunkt i origo enligt figuren nere till vänster, och jämfört med denna kurva är $y = x^2 + 1$ samma kurva men där talet 1 adderats till varje punkts y-koordinat, dvs. parabeln är förskjuten en enhet uppåt i y-led.

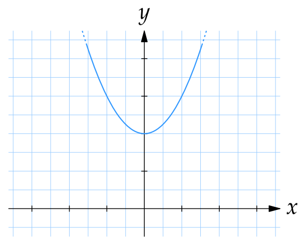


Grafen till $f(x) = x^2$.

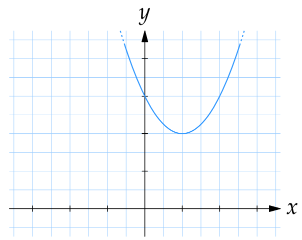


Grafen till $f(x) = x^2 + 1$.

b) Som utgångspunkt kan vi ta kurvan $y = x^2 + 2$ som är en parabel med minimipunkt i $(0,2)$ och finns skisserad nere till vänster. Jämfört med den kurvan är $y = (x-1)^2 + 2$ samma kurva men där vi genomgående måste välja x en enhet större för att få samma y-värde. Kurvan $y = (x-1)^2 + 2$ är alltså förskjuten en enhet åt höger jämfört med $y = x^2 + 2$.



Grafen till $f(x) = x^2 + 2$.

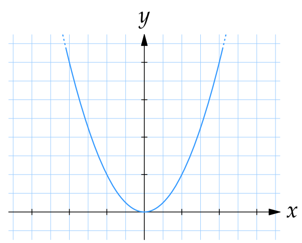


Grafen till $f(x) = (x-1)^2 + 2$.

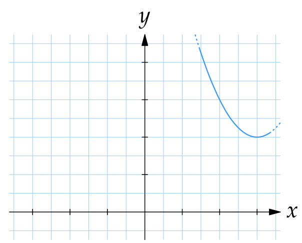
c) Med en kvadratkomplettering kan vi skriva om funktionen som

$$f(x) = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 - 3^2 + 11 = (x-3)^2 + 2,$$

och när funktionen är skriven på detta sätt går det att se att grafen $y = (x-3)^2 + 2$ är samma kurva som parabeln $y = x^2$ men förskjuten 2 enheter uppåt och 3 enheter åt höger (se deluppgift a och b).



Grafen till $f(x) = x^2$.

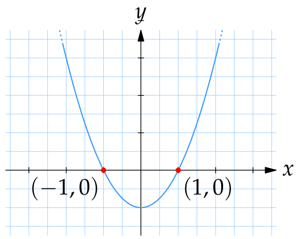


Grafen till $f(x) = (x-3)^2 + 2$.

2.3:9 a) En punkt ligger på x-axeln om den har y-koordinat 0 och därför söker vi alla punkter på kurvan $y = x^2 - 1$ med $y = 0$, dvs. alla punkter som uppfyller ekvationen

$$0 = x^2 - 1.$$

Denna ekvation har lösningarna $x = \pm 1$, vilket betyder att skärningspunkterna är $(-1,0)$ och $(1,0)$.



Parabeln $y = x^2 - 1$ skär x-axeln i punkterna $(-1,0)$ och $(1,0)$.

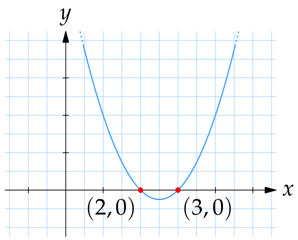
b) Skärningspunkterna är de punkter på kurvan som också ligger på x-axeln, dvs. de är de punkter som både uppfyller kurvans ekvation $y = x^2 - 5x + 6$ och x-axelns ekvation $y = 0$,

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6, \\ y = 0. \end{cases}$$

Detta ekvationssystem ger direkt att $y = 0$ och att x måste uppfylla andragradsekvationen $x^2 - 5x + 6 = 0$. Med kvadratkomplettering får vi att vänsterledet är

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= \left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 + 6 \\ &= \left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 - \tfrac{25}{4} + \tfrac{24}{4} \\ &= \left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4}, \end{aligned}$$

och det ger att ekvationen har lösningarna $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$, dvs. $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ och $x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{3} = 3$.
Skärningspunkterna är därför $(2,0)$ och $(3,0)$.



Parabeln $y = x^2 - 5x + 6$ skär x-axeln i punkterna $(2,0)$ och $(3,0)$.

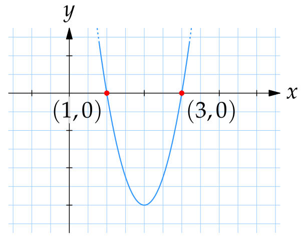
c) För att bestämma alla punkter på kurvan $y = 3x^2 - 12x + 9$ som också ligger på x-axeln sätter vi in x-axelns ekvation $y = 0$ i kurvans ekvation och får att x måste uppfylla

$$0 = 3x^2 - 12x + 9.$$

Efter division med 3 och kvadratkomplettering blir högerledet

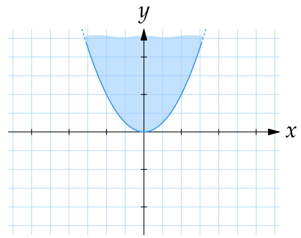
$$x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 2^2 + 3 = (x-2)^2 - 1,$$

och ekvationen har därför lösningarna $x = 2 \pm 1$, dvs. $x = 2 - 1 = 1$ och $x = 2 + 1 = 3$. Skärningspunkterna är $(1,0)$ och $(3,0)$.

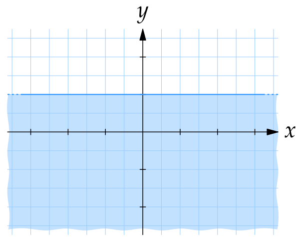


Parabeln $y = 3x^2 - 12x + 9$ skär x-axeln i punkterna $(1,0)$ och $(3,0)$.

2.3:10 a) Var för sig definierar olikheterna $y \geq x^2$ och $y \leq 1$ området ovanför parabeln $y = x^2$ respektive under linjen $y = 1$.

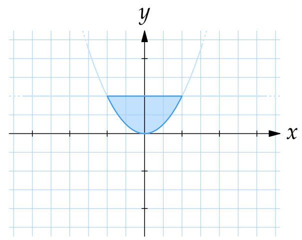


Området $y \geq x^2$



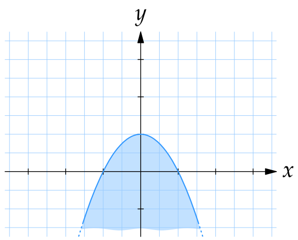
Området $y \leq 1$

De punkter som uppfyller båda olikheterna blir området ovanför parabeln men under linjen $y = 1$.

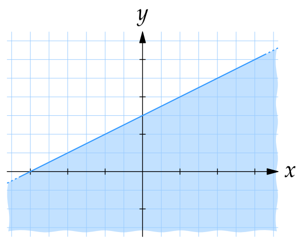


Området $y \geq x^2$ och $y \leq 1$.

b) Olikheten $y \le 1 - x^2$ definierar området under och på kurvan $y = 1 - x^2$, som är en parabel med maximipunkt i $(0, 1)$. Den andra olikheten $x \ge 2y - 3$ kan vi skriva om som $y \le \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ och det definierar området under och på den räta linjen $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

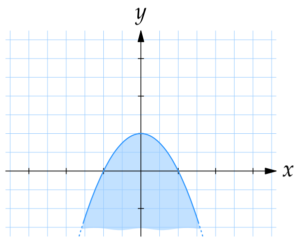


Området $y \le 1 - x^2$.



Området $x \ge 2y - 3$.

Av figurerna ovan verkar det som att parabelområdet ligger helt under linjen $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ och det betyder att det är området under parabeln som uppfyller båda olikheterna.



Området $y \le 1 - x^2$ och $x \ge 2y - 3$.

Anm. Om man känner sig osäker på om parabeln verkligen ligger under linjen (att det inte bara råkar se ut så) så kan vi undersöka om y-värden på linjen $y_{\text{linje}} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ alltid är större än motsvarande y-värden på parabeln $y_{\text{parabel}} = 1 - x^2$ genom att studera differensen mellan dem

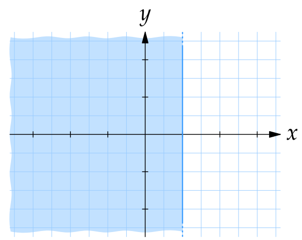
$$y_{\text{linje}} - y_{\text{parabel}} = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2} - (1 - x^2).$$

Om denna differens är positiv oavsett hur x väljs då vet vi att linjens y-värde alltid är större än parabelns y-värde. Efter lite förenkling och kvadratkomplettering har vi att

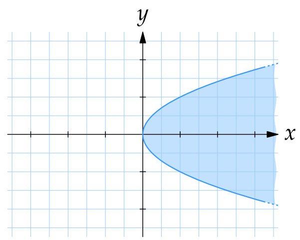
$$\begin{aligned} y_{\text{linje}} - y_{\text{parabel}} &= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2} - (1 - x^2) \\ &= x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} \\ &= \bigl(x + \tfrac{1}{4}\bigr)^2 - \bigl(\tfrac{1}{4}\bigr)^2 + \tfrac{1}{2} \\ &= \bigl(x + \tfrac{1}{4}\bigr)^2 + \tfrac{7}{16}, \end{aligned}$$

och detta uttryck är alltid positivt eftersom $\frac{7}{16}$ är ett positivt tal och $\bigl(x + \frac{1}{4}\bigr)^2$ är en kvadrat som aldrig är negativ. Med andra ord är parabeln helt under linjen.

c) Uttrycket $1 \ge x \ge y^2$ betyder att vi har ett område som definieras av de två olikheterna $1 \ge x$ och $x \ge y^2$. Den första olikheten ger oss området till vänster om linjen $x = 1$. Hade den andra olikheten istället varit $y \ge x^2$ så skulle vi ha ett område ovanför parabeln $y = x^2$ men i vårt fall är x och y i ombytta roller så olikheten $x \ge y^2$ definierar samma typ av parabelområde men där x- och y-axeln bytt plats.

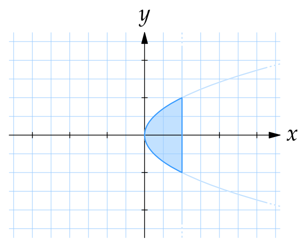


Området $1 \ge x$.



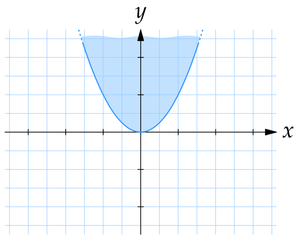
Området $x \ge y^2$.

Tillsammans definierar olikheterna området som begränsas till vänster av parabeln och till höger av linjen.

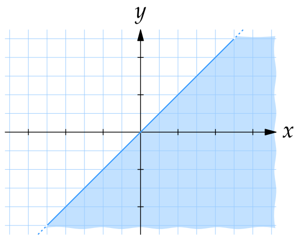


Området $1 \ge x \ge y^2$.

d) Vi kan skriva om dubbelolikheten $x^2 \le y \le x$ som $x^2 \le y$ och $y \le x$. Dessa två olikheter definierar dels området ovanför parabeln $y = x^2$, dels området under linjen $y = x$.

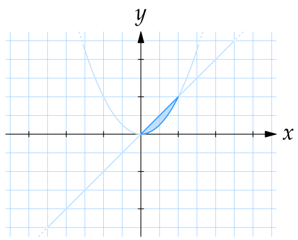


Området $x^2 \le y$.



Området $y \le x$.

Området som olikheterna definierar tillsammans blir regionen i första kvadranten som begränsas nerifrån av parabeln och uppifrån av linjen.



Området $x^2 \le y \le x$.

3.1 Rötter

3.1:1 a) $\sqrt{2}$ är ett annat beteckningssätt för $2^{1/2}$.

b) Uttrycket $\sqrt{7^5}$ kan skrivas som $(7^5)^{1/2}$ och sedan ger potenslagarna att detta är lika med $7^{5\cdot(1/2)} = 7^{5/2}$.

c) $\sqrt[3]{3}$ betyder $3^{1/3}$ och då är $(\sqrt[3]{3})^4 = (3^{1/3})^4 = 3^{(1/3)\cdot 4} = 3^{4/3}$.

d) Eftersom $\sqrt{3}$ är $3^{1/2}$ så är $\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt{3^{1/2}} = (3^{1/2})^{1/2} = 3^{(1/2)\cdot(1/2)} = 3^{1/4}$.

3.1:2 a) Ett sätt att förenkla uttrycket är att skriva det i potensform och sedan arbeta med potenslagarna,

$$\sqrt{3^2} = (3^2)^{1/2} = 3^{2\cdot(1/2)} = 3^1 = 3.$$

b) Det som står under rottecknet är lika med $(-3)^2 = 9$ och eftersom $9 = 3\cdot 3 = 3^2$ så är

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 9^{1/2} = (3^2)^{1/2} = 3^{2\cdot(1/2)} = 3^1 = 3.$$

Anm. Uträkningen $\sqrt{(-3)^2} = \big((-3)^2\big)^{1/2} \overset{*}{=} (-3)^{2\cdot(1/2)} = (-3)^1 = -3$ är felaktig vid det markerade likhetstecknet. Kom ihåg att potenslagarna gäller när basen är positiv.

c) Uttrycket -3^2 betyder $-(3^2) = -9$ (och *inte* $(-3)^2$) så vi har alltså att

$$\sqrt{-3^2} = \sqrt{-9}.$$

Rotuttrycket $\sqrt{-9}$ är inte definierat eftersom det inte finns något reellt tal som multiplicerat med sig självt ger -9.

d) Det mest lämpliga är ofta att göra sig av med rottecknen och skriva allt i potensform och sedan utnyttja potenslagarna,

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot 5 = 5^{1/2}\cdot 5^{1/3}\cdot 5^1 = 5^{1/2+1/3+1} = 5^{11/6}.$$

e) Om vi först tittar på $\sqrt{18}$ så kan detta rotuttryck förenklas genom att vi skriver 18 som en produkt av så små heltalsfaktorer som möjligt,

$$18 = 2\cdot 9 = 2\cdot 3\cdot 3 = 2\cdot 3^2,$$

och sedan kan vi bryta ut kvadrater ur rottecknet med regeln $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$,

$$\sqrt{18} = \sqrt{2\cdot 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

På samma sätt skriver vi $8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ och får att

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Tillsammans får vi

$$\sqrt{18}\sqrt{8} = 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2}\,)^2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12.$$

f) Tredjeroten ur ett tal är samma sak som talet upphöjt till $\frac{1}{3}$, dvs. $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$. Om vi därför skriver talet som en produkt av så små heltalsfaktorer som möjligt,

$$8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3,$$

så ser vi att

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = (2^3)^{1/3} = 2^{3 \cdot (1/3)} = 2^1 = 2.$$

Anm. Tredjeroten ur kan alltså ses som att den upphäver operationen att upphöja något till 3, dvs. $\sqrt[3]{5^3} = 5$, $\sqrt[3]{6^3} = 6$ osv.

g) Eftersom -125 kan skrivas som $-125 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^3$ definieras $\sqrt[3]{-125}$ som

$$\sqrt[3]{-125} = -5.$$

Anm. Till skillnad från $\sqrt{-125}$ (kvadratroten ur -125) som inte är definierad är $\sqrt[3]{-125}$ definierad. Det finns nämligen inget tal x som uppfyller $x^2 = -125$, men däremot ett tal x som uppfyller $x^3 = -125$.

Anm. Det går att skriva uträkningen i lösningen som $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = (-5)^1 = -5$, men man måste vara försiktig när man räknar med negativa tal och bråktalsexponenter. Ibland är uttrycken inte definierade och de vanliga potenslagarna gäller inte alltid. Titta t.ex. på uträkningen

$$-5 = (-125)^{1/3} = (-125)^{2/6} = \left((-125)^2\right)^{1/6} = 15625^{1/6} = 5. \quad \text{(Fel!)}$$

3.1:3 a) Först utvecklar vi uttrycket,

$$\begin{aligned}(\sqrt{5} - \sqrt{2}\,)(\sqrt{5} + \sqrt{2}\,) &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + \cancel{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\\ &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

Eftersom $\sqrt{5}$ och $\sqrt{2}$ är definierade som de tal som multiplicerade med sig själva ger 5 respektive 2 så är

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 5 - 2 = 3.$$

Anm. Utvecklingen av $(\sqrt{5} - \sqrt{2}\,)(\sqrt{5} + \sqrt{2}\,)$ kan också göras direkt med konjugatregeln $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, där $a = \sqrt{5}$ och $b = \sqrt{2}$.

b) Vid förenkling av rotuttryck är en vanlig teknik att dela upp talen under rottecknen i så små heltalsfaktorer som möjligt och sedan bryta ut kvadrater och se om gemensamma faktorer tar ut varandra eller kan kombineras ihop på ett nytt sätt.

Genom att successivt dela med 2 och 3 ser vi att

$$\begin{aligned}96 &= 2 \cdot 48 = 2 \cdot 2 \cdot 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12\\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3,\\ 18 &= 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2.\end{aligned}$$

Därför är

$$\begin{aligned}\sqrt{96} &= \sqrt{2^5 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3},\\ \sqrt{18} &= \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3 \cdot \sqrt{2},\end{aligned}$$

och hela kvoten kan skrivas som

$$\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{18}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \cancel{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Anm. Om det är svårt att arbeta med rottecken går det att istället skriva i potensform,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{18}} &= \frac{(96)^{1/2}}{(18)^{12}} = \frac{(2^5 \cdot 3)^{1/2}}{(2 \cdot 3^2)^{1/2}} = \frac{2^{5 \cdot (1/2)} \cdot 3^{1/2}}{2^{1/2} \cdot 3^{2 \cdot (1/2)}}\\ &= 2^{5/2 - 1/2} \cdot 3^{1/2 - 1} = 2^2 \cdot 3^{-1/2} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

(I sista ledet förlänger vi med $\sqrt{3}$.)

c) Vi börjar med att titta på deluttrycket $\sqrt{16}$. Denna rot kan förenklas i och med att $16 = 4 \cdot 4 = 4^2$, vilket ger att $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$ och hela uttrycket blir

$$\sqrt{16 + \sqrt{16}} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}.$$

Kan $\sqrt{20}$ förenklas? För att få svar på detta delar vi upp 20 i heltalsfaktorer,

$$20 = 2 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5,$$

och ser att talet 20 innehåller kvadraten 2^2 som faktor och som därför kan brytas ut utanför rottecknet,

$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}.$$

d) Vi kan multiplicera in $\sqrt{\frac{2}{3}}$ i parentesen och sedan skriva ihop rotuttrycken under ett gemensamt rottecken med regeln $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$,

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}}(\sqrt{6}-\sqrt{3}) = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\cdot\sqrt{6}-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{\frac{2\cdot 6}{3}}-\sqrt{\frac{2\cdot 3}{3}}.$$

Eftersom $(2\cdot 6)/3 = 2\cdot 2 = 2^2$ och $(2\cdot 3)/3 = 2$ så blir

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}}(\sqrt{6}-\sqrt{3}) = \sqrt{2^2}-\sqrt{2} = 2-\sqrt{2}.$$

3.1:4 a) Decimaltalet 0,16 kan också skrivas som $16\cdot 10^{-2}$ och då kan vi enklare se att, eftersom $16 = 4\cdot 4 = 4^2$ och $10^{-2} = (10^{-1})^2 = 0{,}1^2$, så är

$$\sqrt{0{,}16} = \sqrt{16\cdot 10^{-2}} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{10^{-2}} = \sqrt{4^2}\cdot\sqrt{0{,}1^2} = 4\cdot 0{,}1 = 0{,}4.$$

Ett alternativ är förstås att vi direkt ser att $0{,}16 = 0{,}4\cdot 0{,}4 = 0{,}4^2$ och då att $\sqrt{0{,}16} = \sqrt{0{,}4^2} = 0{,}4$.

b) Genom att skriva 0,027 som $27\cdot 10^{-3}$ där $27 = 3\cdot 3\cdot 3 = 3^3$ och $10^{-3} = (10^{-1})^3 = 0{,}1^3$ så ser vi att

$$\sqrt[3]{0{,}027} = \sqrt[3]{27\cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{10^{-3}} = \sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{0{,}1^3} = 3\cdot 0{,}1 = 0{,}3,$$

där vi använt att $\sqrt[3]{a^3} = (a^3)^{1/3} = a^{3\cdot(1/3)} = a^1 = a$.

c) Varje term i uttrycket kan förenklas genom att vi faktoriserar talet under rottecknet så långt som möjligt,

$$\begin{aligned}
50 &= 5\cdot 10 = 5\cdot 2\cdot 5 = 2\cdot 5^2,\\
20 &= 2\cdot 10 = 2\cdot 2\cdot 5 = 2^2\cdot 5,\\
18 &= 2\cdot 9 = 2\cdot 3\cdot 3 = 2\cdot 3^2,\\
80 &= 8\cdot 10 = (2\cdot 4)\cdot(2\cdot 5) = (2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 5) = 2^4\cdot 5,
\end{aligned}$$

och sedan bryter ut kvadrater ur rottecknen,

$$\begin{aligned}
\sqrt{50} &= \sqrt{2\cdot 5^2} = 5\sqrt{2},\\
\sqrt{20} &= \sqrt{2^2\cdot 5} = 2\sqrt{5},\\
\sqrt{18} &= \sqrt{2\cdot 3^2} = 3\sqrt{2},\\
\sqrt{80} &= \sqrt{2^4\cdot 5} = \sqrt{(2^2)^2\cdot 5} = 2^2\cdot\sqrt{5} = 4\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Sammantaget får vi att

$$\begin{aligned}
&\sqrt{50}+4\sqrt{20}-3\sqrt{18}-2\sqrt{80}\\
&\quad = 5\sqrt{2}+4\cdot 2\sqrt{5}-3\cdot 3\sqrt{2}-2\cdot 4\sqrt{5}\\
&\quad = 5\sqrt{2}+8\sqrt{5}-9\sqrt{2}-8\sqrt{5}\\
&\quad = (5-9)\sqrt{2}+(8-8)\sqrt{5}\\
&\quad = -4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

d) Vi börjar med att faktorisera talen under rottecknen,

$$\begin{aligned}
48 &= 2\cdot 24 = 2\cdot 2\cdot 12 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 6 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3 = 2^4\cdot 3,\\
12 &= 2\cdot 6 = 2\cdot 2\cdot 3 = 2^2\cdot 3,\\
3 &= 3,\\
75 &= 3\cdot 25 = 3\cdot 5\cdot 5 = 3\cdot 5^2.
\end{aligned}$$

Nu kan vi bryta ut kvadrater ur rötterna,

$$\begin{aligned}
\sqrt{48} &= \sqrt{2^4\cdot 3} = \sqrt{(2^2)^2\cdot 3} = 2^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3},\\
\sqrt{12} &= \sqrt{2^2\cdot 3} = 2\sqrt{3},\\
\sqrt{3} &= \sqrt{3},\\
\sqrt{75} &= \sqrt{3\cdot 5^2} = 5\sqrt{3},
\end{aligned}$$

och sedan förenkla hela uttrycket

$$\begin{aligned}
\sqrt{48}+\sqrt{12}+\sqrt{3}-\sqrt{75} &= 4\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}-5\sqrt{3}\\
&= (4+2+1-5)\sqrt{3}\\
&= 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

3.1:5 a) Om vi förlänger bråket med $\sqrt{12}$ så kommer den nya nämnaren att bli lika med $\sqrt{12}\cdot\sqrt{12} = 12$ och vi blir av med rottecknet i nämnaren,

$$\frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{2}{\sqrt{12}}\cdot\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{12}}{12} = \frac{\cancel{2}\sqrt{12}}{\cancel{2}\cdot 6} = \frac{\sqrt{12}}{6}.$$

Detta uttryck kan förenklas ytterligare om vi skriver $12 = 2\cdot 6 = 2\cdot 2\cdot 3 = 2^2\cdot 3$ och bryter ut 2^2 ur roten $\sqrt{12} = \sqrt{2^2\cdot 3} = 2\sqrt{3}$. Vi får att

$$\frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) För att eliminera roten $\sqrt[3]{7} = 7^{1/3}$ från nämnaren kan vi förlänga bråket med $7^{2/3}$. Då blir nämnaren $7^{1/3}\cdot 7^{2/3} = 7^{1/3+2/3} = 7^1 = 7$, och vi får att

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}} = \frac{1}{7^{1/3}} = \frac{1}{7^{1/3}}\cdot\frac{7^{2/3}}{7^{2/3}} = \frac{7^{2/3}}{7}.$$

c) Tricket är att utnyttja konjugatregeln, $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$, och förlänga bråket med $3-\sqrt{7}$ (notera minustecknet) för då kommer den nya nämnaren bli $(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7}) = 3^2-(\sqrt{7})^2 = 9-7 = 2$ (konjugatregeln med $a = 3$ och $b = \sqrt{7}$), dvs. rottecknet kvadreras bort.
Hela uträkningen blir

$$\frac{2}{3+\sqrt{7}} = \frac{2}{3+\sqrt{7}}\cdot\frac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{3^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{\cancel{2}\cdot 3-\cancel{2}\sqrt{7}}{\cancel{2}} = 3-\sqrt{7}.$$

d) Vi kan bli av med båda kvadratrötterna i nämnaren om vi förlänger bråket med det konjugerade uttrycket $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ och använder konjugatregeln

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

med $a=\sqrt{17}$ och $b=\sqrt{13}$. Båda rötterna kvadreras då bort och vi får

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{17}-\sqrt{13}} &= \frac{1}{\sqrt{17}-\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{\sqrt{17}+\sqrt{13}}\\ &= \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{(\sqrt{17})^2-(\sqrt{13})^2}\\ &= \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{17-13}\\ &= \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{4}.\end{aligned}$$

Detta uttryck kan inte förenklas ytterligare eftersom varken 17 eller 13 innehåller några kvadrater som faktorer.

3.1:6 a) Vi använder standardmetoden och förlänger bråket med nämnarens konjugatuttryck, $\sqrt{5}+2$. Då ger konjugatregeln att

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{5}-2} &= \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}\\ &= \frac{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5})^2-2^2}\\ &= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot 2+3\cdot\sqrt{5}+3\cdot 2}{5-4}\\ &= \sqrt{2\cdot 5}+2\sqrt{2}+3\sqrt{5}+6\\ &= 6+2\sqrt{2}+3\sqrt{5}+\sqrt{10}.\end{aligned}$$

b) Rottecknet i nämnaren ligger inbakad i ett kvadratiskt uttryck och därför utvecklar vi först kvadraten $(\sqrt{3}-2)^2$ med kvadreringsregeln,

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}-2)^2 &= (\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2+2^2\\ &= 3-4\sqrt{3}+4\\ &= 7-4\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Alltså är

$$\frac{1}{(\sqrt{3}-2)^2-2} = \frac{1}{7-4\sqrt{3}-2} = \frac{1}{5-4\sqrt{3}},$$

och i detta uttryck kan vi få bort rottecknet från nämnaren genom att förlänga med konjugatet $5+4\sqrt{3}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{5-4\sqrt{3}} &= \frac{1}{5-4\sqrt{3}}\cdot\frac{5+4\sqrt{3}}{5+4\sqrt{3}} = \frac{5+4\sqrt{3}}{5^2-(4\sqrt{3})^2}\\ &= \frac{5+4\sqrt{3}}{5^2-4^2(\sqrt{3})^2} = \frac{5+4\sqrt{3}}{25-16\cdot 3}\\ &= \frac{5+4\sqrt{3}}{-23} = -\frac{5+4\sqrt{3}}{23}.\end{aligned}$$

c) Uttrycket är så pass komplicerat att vi först behöver förenkla delar av uttrycket. Vi börjar med de tre delbråken $1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{5}$ och $1/\sqrt{2}$ som innehåller rottecken i nämnarna och förlänger så att rötterna hamnar i täljarna,

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{5}}{5}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}}.$$

Förläng sedan huvudbråket med 2 så att vi slipper bråktal i nämnaren,

$$\frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\cdot 2}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\cdot 2} = \frac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}{\dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}-\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}}} = \frac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{2}-1}.$$

Nu kan vi förlänga med konjugatet $\sqrt{2}+1$ till nämnaren, och få ett uttryck utan rötter i nämnaren,

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} &= \frac{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2})^2-1^2}\\ &= \frac{\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{2}}{3}+\dfrac{2\sqrt{3}\cdot 1}{3}-\dfrac{2\sqrt{5}\sqrt{2}}{5}-\dfrac{2\sqrt{5}\cdot 1}{5}}{2-1}\\ &= \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3\cdot 2}+\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{2}{5}\sqrt{5\cdot 2}-\frac{2}{5}\sqrt{5}}{1}\\ &= \tfrac{2}{3}\sqrt{6}+\tfrac{2}{3}\sqrt{3}-\tfrac{2}{5}\sqrt{10}-\tfrac{2}{5}\sqrt{5}.\end{aligned}$$

d) Problemet med detta uttryck är att nämnaren innehåller tre rottecken och då finns inget enkelt sätt att bli av med alla rottecken på en gång, utan vi behöver arbeta stegvis. I ett första steg ser vi nämnaren som $(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{6}$ och förlänger med det konjugatliknande uttrycket $(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{6}$. Då kommer åtminstone $\sqrt{6}$ att kvadreras bort med konjugatregeln,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{6}}\cdot\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{6}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{6}} &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-6}.\end{aligned}$$

Den återstående kvadraten $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ utvecklar vi med kvadreringsregeln,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-6} &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-6}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2+2\sqrt{2\cdot 3}+3-6}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}-1}.\end{aligned}$$

Detta uttryck har bara ett rottecken i nämnaren och då kan vi slutföra uträkningen genom att förlänga med konjugatet $2\sqrt{6}+1$,

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}-1}\cdot\frac{2\sqrt{6}+1}{2\sqrt{6}+1}\\ &\quad= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})(2\sqrt{6}+1)}{(2\sqrt{6})^2-1^2}\\ &\quad= \frac{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}+\sqrt{2}\cdot 1+\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6}+\sqrt{3}\cdot 1-\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}-\sqrt{6}\cdot 1}{2^2(\sqrt{6})^2-1^2}\\ &\quad= \frac{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2\cdot 3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2\cdot 3}+\sqrt{3}-2(\sqrt{6})^2-\sqrt{6}}{4\cdot 6-1}\\ &\quad= \frac{2(\sqrt{2})^2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2(\sqrt{3})^2\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\cdot 6-\sqrt{6}}{24-1}\\ &\quad= \frac{2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}-12-\sqrt{6}}{23}\\ &\quad= \frac{(1+2\cdot 3)\sqrt{2}+(2\cdot 2+1)\sqrt{3}-\sqrt{6}-12}{23}\\ &\quad= \frac{7\sqrt{2}+5\sqrt{3}-\sqrt{6}-12}{23}.\end{aligned}$$

3.1:7 a) Först förlänger vi de två termerna med respektive nämnares konjugerade rotutryck så att inga rottecken finns kvar i nämnarna,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} &= \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5} = \sqrt{6}+\sqrt{5},\\ \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} &= \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6})^2}\\ &= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6} = \sqrt{7}+\sqrt{6}.\end{aligned}$$

Nu kan vi subtrahera termerna och förenkla resultatet,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} &= \sqrt{6}+\sqrt{5}-(\sqrt{7}+\sqrt{6})\\ &= \cancel{\sqrt{6}}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-\cancel{\sqrt{6}}\\ &= \sqrt{5}-\sqrt{7}.\end{aligned}$$

b) Vi förlänger bråket med nämnarens konjugat, $\sqrt{7}+\sqrt{5}$, och ser vad det leder till,

$$\begin{aligned}\frac{5\sqrt{7}-7\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} &= \frac{(5\sqrt{7}-7\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}\\ &= \frac{5\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}+5\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}-7\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}-7\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{7-5}\\ &= \frac{5(\sqrt{7})^2+5\sqrt{5}\sqrt{7}-7\sqrt{5}\sqrt{7}-7(\sqrt{5})^2}{2}\\ &= \frac{\cancel{5\cdot 7}+5\sqrt{5}\sqrt{7}-7\sqrt{5}\sqrt{7}-\cancel{7\cdot 5}}{2}\\ &= \frac{5\sqrt{5}\sqrt{7}-7\sqrt{5}\sqrt{7}}{2}\\ &= \frac{(5-7)\sqrt{5}\sqrt{7}}{2}\\ &= \frac{-\cancel{2}\sqrt{5\cdot 7}}{\cancel{2}}\\ &= -\sqrt{35}.\end{aligned}$$

c) Delar vi upp 153 och 68 i så små heltalsfaktorer som möjligt ser vi om det finns kvadrater som kan brytas ut ur rötterna och om uttrycket kan förenklas vidare,

$$\begin{aligned}153 &= 3\cdot 51 = 3\cdot 3\cdot 17 = 3^2\cdot 17,\\ 68 &= 2\cdot 34 = 2\cdot 2\cdot 17 = 2^2\cdot 17.\end{aligned}$$

Vi får att

$$\begin{aligned}\sqrt{153}-\sqrt{68} &= \sqrt{3^2\cdot 17}-\sqrt{2^2\cdot 17}\\ &= 3\sqrt{17}-2\sqrt{17}=\sqrt{17}.\end{aligned}$$

Anm. Ett tips när man undersöker om ett heltal är delbart med 3 är att titta på talets siffersumma. Ett tal är delbart med 3 om och endast om dess siffersumma är delbar med 3. T.ex. är talet 97818 delbart med 3 eftersom siffersumman $9+7+8+1+8=33$ är debar med 3, och omvänt, talet 11536 är inte delbart med 3 i och med att siffersumman $1+1+5+3+6=16$ inte är delbar med 3.

3.1:8 a) Om vi skriver talen i potensform,

$$\sqrt[3]{5}=5^{1/3}\quad\text{och}\quad\sqrt[3]{6}=6^{1/3},$$

så ser vi att $\sqrt[3]{6}$ är störst eftersom basen 6 är större än 5 och båda talen har samma positiva exponent $\frac{1}{3}$.

b) Skriver vi talen i potensform,

$$\sqrt{7}=7^{1/2}\quad\text{och}\quad 7=7^1,$$

så framgår att 7 är större än $\sqrt{7}$ eftersom båda talen har samma bas 7, som är större än 1, och exponenten 1 är större än $\frac{1}{2}$.

c) Eftersom $2{,}5^2=2{,}5\cdot 2{,}5=6{,}25$ så är $2{,}5=\sqrt{6{,}25}$ och då ser vi att $\sqrt{7}$ är större än 2,5 i och med att $7^{1/2}>6{,}25^{1/2}$.

d) I potensform blir uttrycken

$$\begin{aligned}\sqrt{2}(\sqrt[4]{3})^3 &= 2^{1/2}(3^{1/4})^3=2^{1/2}3^{3/4},\\ \sqrt[3]{2}\cdot 3 &= 2^{1/3}3^1.\end{aligned}$$

Visserligen ser vi att $2^{1/2}>2^{1/3}$ och $3^1>3^{3/4}$ men det hjälper oss inte att säga något om hur produkterna förhåller sig till varandra. Istället observerar vi att exponenterna $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ och 1 har $3\cdot 4=12$ som minsta gemensamma nämnare (MGN) som vi kan bryta ut,

$$\begin{aligned}2^{1/2}3^{3/4} &= 2^{6/12}3^{9/12}=(2^6\cdot 3^9)^{1/12},\\ 2^{1/3}3^1 &= 2^{4/12}3^{12/12}=(2^4\cdot 3^{12})^{1/12}.\end{aligned}$$

Nu kan vi jämföra baserna $2^6\cdot 3^9$ och $2^4\cdot 3^{12}$ med varandra och på så sätt avgöra vilket tal som är störst.
Eftersom

$$\frac{2^6\cdot 3^9}{2^4\cdot 3^{12}}=2^{6-4}3^{9-12}=2^2 3^{-3}=\frac{2^2}{3^3}=\frac{4}{27}<1$$

så är nämnaren $2^4\cdot 3^{12}$ större än täljaren $2^6\cdot 3^9$, vilket betyder att $\sqrt[3]{2}\cdot 3$ är större än $\sqrt{2}(\sqrt[4]{3})^3$.

3.2 Rotekvationer

3.2:1

För att bli av med rottecknet i ekvationen kvadrerar vi båda led,

$$x-4=(6-x)^2.$$

Det är viktigt att komma ihåg att detta steg innebär att vi nu arbetar med en ny ekvation som kan ha lösningar som rotekvationen inte har. I slutet blir det därför nödvändigt för oss att pröva om de framräknade lösningarna vi får också uppfyller den ursprungliga rotekvationen.
Fortsätter vi med den kvadrerade ekvationen och utvecklar högerledet så får vi en andragradsekvation,

$$x-4=36-12x+x^2, \qquad (*)$$

dvs.

$$x^2-13x+40=0.$$

Vi kvadratkompletterar vänsterledet,

$$\begin{aligned}x^2-13x+40 &= \bigl(x-\tfrac{13}{2}\bigr)^2-\bigl(\tfrac{13}{2}\bigr)^2+40\\ &= \bigl(x-\tfrac{13}{2}\bigr)^2-\tfrac{169}{4}+\tfrac{160}{4}\\ &= \bigl(x-\tfrac{13}{2}\bigr)^2-\tfrac{9}{4},\end{aligned}$$

vilket ger ekvationen

$$\bigl(x-\tfrac{13}{2}\bigr)^2=\tfrac{9}{4},$$

som har lösningarna

- $x=\frac{13}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{13}{2}+\frac{3}{2}=\frac{16}{2}=8,$
- $x=\frac{13}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=\frac{10}{2}=5.$

För säkerhets skull kontrollerar vi att vi löste andragradsekvationen $(*)$ rätt genom att stoppa in $x=5$ och $x=8$ i ekvationen.

$x=5$: VL $=5-4=1$ och HL $=(6-5)^2=1$.

$x=8$: VL $=8-4=4$ och HL $=(6-8)^2=4$.

Sedan måste vi pröva lösningarna $x=5$ och $x=8$ i rotekvationen.

$x=5$: VL $=\sqrt{5-4}=1$ och HL $=6-5=1$.

$x=8$: VL $=\sqrt{8-4}=2$ och HL $=6-8=-2$.

Detta visar att $x = 5$ är en lösning till rotekvationen medan $x = 8$ är en falsk rot.

Anm. Att vi får en falsk rot $x = 8$ beror inte på att vi räknat fel på något sätt, utan är helt och hållet resultatet av att vi kvadrerade ekvationen.

3.2:2

Det första vi gör är att kvadrera båda led i ekvationen,

$$2x+7=(x+2)^2,$$

och får en ekvation utan rottecken. Det är möjligt att vi därmed introducerar s.k. falska rötter (lösningar till den nya ekvationen som inte är lösningar till den gamla ekvationen) så vi behöver därför pröva lösningarna i den ursprungliga rotekvationen innan vi svarar.
Utvecklar vi högerledet i den kvadrerade ekvationen får vi

$$2x+7=x^2+4x+4, \qquad (*)$$

som vi också kan skriva som

$$x^2+2x-3=0.$$

Kvadratkomplettering av vänsterledet ger

$$x^2+2x-3=(x+1)^2-1^2-3=(x+1)^2-4.$$

Ekvationen blir då

$$(x+1)^2=4,$$

som har lösningarna

- $x=-1+\sqrt{4}=-1+2=1,$
- $x=-1-\sqrt{4}=-1-2=-3.$

En kontroll visar också att $x=-3$ och $x=1$ är lösningar till den kvadrerade ekvationen $(*)$,

$x=-3$: $\mathrm{VL}=2\cdot(-3)+7=-6+7=1$ och $\mathrm{HL}=(-3+2)^2=1,$

$x=1$: $\mathrm{VL}=2\cdot 1+7=2+7=9$ och $\mathrm{HL}=(1+2)^2=9.$

När vi prövar lösningarna i rotekvationen får vi att

$$x=-3:\quad \begin{aligned}\mathrm{VL}&=\sqrt{2\cdot(-3)+7}=\sqrt{-6+7}=\sqrt{1}=1,\\ \mathrm{HL}&=-3+2=-1,\end{aligned}$$

$$x=1:\quad \begin{aligned}\mathrm{VL}&=\sqrt{2\cdot 1+7}=\sqrt{2+7}=\sqrt{9}=3,\\ \mathrm{HL}&=1+2=3,\end{aligned}$$

och därför är $x = 1$ den enda lösningen till rotekvationen ($x = -3$ är en falsk rot).

Anm. Kontrollen när vi stoppar in lösningarna i ekvationen $(*)$ är strikt sett inte nödvändig, utan är mer för att se att vi inte råkat räkna fel. Däremot är prövningen i rotekvationen nödvändig.

3.2:3

Först flyttar vi över 2:an i högerledet, $\sqrt{3x-8}=x-2$, och kvadrerar sedan bort rottecknet,

$$3x-8=(x-2)^2, \qquad (*)$$

eller med högerledet utvecklat,

$$3x-8=x^2-4x+4.$$

Flyttar vi över alla termer i ena ledet får vi

$$x^2-7x+12=0.$$

Om vi kvadratkompletterar vänsterledet,

$$\begin{aligned}x^2-7x+12&=\bigl(x-\tfrac{7}{2}\bigr)^2-\bigl(\tfrac{7}{2}\bigr)^2+12\\ &=\bigl(x-\tfrac{7}{2}\bigr)^2-\tfrac{49}{4}+\tfrac{48}{4}\\ &=\bigl(x-\tfrac{7}{2}\bigr)^2-\tfrac{1}{4},\end{aligned}$$

så kan ekvationen skrivas som

$$\bigl(x-\tfrac{7}{2}\bigr)^2=\tfrac{1}{4},$$

och lösningarna är

- $x=\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=4,$
- $x=\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3.$

För säkerhets skull kontrollerar vi att $x = 3$ och $x = 4$ uppfyller den kvadrerade ekvationen $(*)$,

$x=3$: $\mathrm{VL}=3\cdot 3-8=9-8=1$ och $\mathrm{HL}=(3-2)^2=1,$

$x=4$: $\mathrm{VL}=3\cdot 4-8=12-8=4$ och $\mathrm{HL}=(4-2)^2=4.$

Eftersom vi kvadrerade rotekvationen så dyker eventuellt falska rötter upp och vi måste därför pröva lösningarna när vi går tillbaka till den ursprungliga rotekvationen,

$x=3$: $\mathrm{VL}=\sqrt{3\cdot 3-8}+2=\sqrt{9-8}+2=1+2=3$ och $\mathrm{HL}=3,$

$x=4$: VL $=\sqrt{3\cdot 4-8}+2=\sqrt{12-8}+2=2+2=4$ och HL $=4$.

Lösningarna till rotekvationen är $x=3$ och $x=4$.

3.2:4

Kvadrera båda led i ekvationen så att rottecknet försvinner,

$$1-x=(2-x)^2 \quad\Leftrightarrow\quad 1-x=4-4x+x^2,$$

och lös sedan den uppkomna andragradsekvationen med kvadratkomplettering,

$$\begin{aligned} x^2-3x+3&=0,\\ \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\left(\tfrac{3}{2}\right)^2+3&=0,\\ \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}+\tfrac{12}{4}&=0,\\ \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}&=0. \end{aligned}$$

Som synes kan denna andragradsekvation inte ha några lösningar (vänsterledet är alltid större än eller lika med $\frac{3}{4}$ oavsett hur x väljs) så den ursprungliga rotekvationen saknar lösning.

3.2:5

Efter att ha kvadrerat båda led får vi ekvationen

$$3x-2=(2-x)^2, \qquad (*)$$

och om vi utvecklar högerledet och sedan samlar ihop termerna har vi

$$x^2-7x+6=0.$$

Vänsterledet kvadratkompletteras,

$$\begin{aligned} x^2-7x+6&=\left(x-\tfrac{7}{2}\right)^2-\left(\tfrac{7}{2}\right)^2+6\\ &=\left(x-\tfrac{7}{2}\right)^2-\tfrac{49}{2}+\tfrac{24}{4}\\ &=\left(x-\tfrac{7}{2}\right)^2-\tfrac{25}{4}, \end{aligned}$$

vilket medför att ekvationen kan skrivas

$$\left(x-\tfrac{7}{2}\right)^2=\tfrac{25}{4},$$

och lösningarna är därför

- $x=\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=\frac{12}{2}=6$,
- $x=\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}=\frac{2}{2}=1$.

En kontroll där vi stoppar in $x=1$ och $x=6$ i den kvadrerade ekvationen $(*)$ visar att vi löst den ekvationen rätt.

$x=1$: VL $=3\cdot 1-2=1$ och HL $=(2-1)^2=1$.

$x=6$: VL $=3\cdot 6-2=16$ och HL $=(2-6)^2=16$.

Till sist behöver vi sortera bort eventuella falska rötter till rotekvationen genom att pröva lösningarna.

$x=1$: VL $=\sqrt{3\cdot 1-2}=1$ och HL $=2-1=1$.

$x=6$: VL $=\sqrt{3\cdot 6-2}=4$ och HL $=2-6=-4$.

Detta visar att rotekvationen har lösningen $x=1$.

3.2:6

Det som skiljer denna ekvation från tidigare exempel är att den innehåller två rottermer och då går det inte att med en kvadrering få bort alla rottecken på en gång, utan vi behöver arbeta i två steg.
En första kvadrering ger

$$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+5}\,\right)^2=4^2,$$

och utvecklas vänsterledet med kvadreringsregeln fås

$$\left(\sqrt{x+1}\,\right)^2+2\sqrt{x+1}\sqrt{x+5}+\left(\sqrt{x+5}\,\right)^2=16,$$

vilket efter förenkling resulterar i ekvationen

$$(x+1)+2\sqrt{x+1}\sqrt{x+5}+(x+5)=16.$$

Flytta nu över alla termer utom rottermen till högerledet

$$2\sqrt{x+1}\sqrt{x+5}=-2x+10,$$

och med ytterligare en kvadrering,

$$\left(2\sqrt{x+1}\sqrt{x+5}\,\right)^2=(-2x+10)^2,$$

får vi till slut en ekvation helt utan rottecken,

$$4(x+1)(x+5)=(-2x+10)^2.$$

Utveckla båda led

$$4(x^2+6x+5)=4x^2-40x+100,$$

och stryk sedan den gemensamma x^2-termen,

$$24x+20=-40x+100.$$

Denna ekvation kan vi skriva som $64x = 80$, vilket ger att

$$x = \frac{80}{64} = \frac{2^4 \cdot 5}{2^6} = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}.$$

Eftersom vi kvadrerade vår ursprungliga ekvation (t.o.m. två gånger) måste vi pröva lösningen $x = \frac{5}{4}$ för att kunna utesluta att vi har en falsk rot,

$$\mathrm{VL} = \sqrt{\tfrac{5}{4}+1} + \sqrt{\tfrac{5}{4}+5} = \sqrt{\tfrac{9}{4}} + \sqrt{\tfrac{25}{4}} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{2} = \tfrac{8}{2} = 4 = \mathrm{HL}.$$

Alltså har ekvationen lösningen $x = \frac{5}{4}$.

3.3 Logaritmer

3.3:1 a) Eftersom $1000 = 10^3$ så är $x = 3$.

b) Om vi skriver 0,1 som 10 upphöjt till någonting så har vi att $0{,}1 = 10^{-1}$ och därför är $x = -1$.

c) Vänsterledet kan vi skriva som 10^{-x} och detta ska vara lika med $100 = 10^2$ och då ser vi att x måste vara lika med -2.

d) Precis som i c-uppgiften skriver vi vänsterledet som 10^{-x} och högerledet som $0{,}0001 = 10^{-4}$, dvs. $10^{-x} = 10^{-4}$, vilket ger att $x = 4$.

3.3:2 a) Logaritmen $\lg 0{,}1$ definieras som det tal som ska stå i den gråa rutan för att likheten

$$10^{\boxed{}} = 0{,}1$$

ska gälla. I detta fall ser vi att

$$10^{-1} = 0{,}1$$

och därför är $\lg 0{,}1 = -1$.

b) $\lg 10000$ är det tal som ska stå i den gråa rutan i likheten

$$10^{\boxed{}} = 10000,$$

och eftersom

$$10^4 = 10000$$

så ser vi att $\lg 10000 = 4$.

c) Eftersom $\lg 0{,}001$ definieras som den exponent som ska stå i den gråa rutan i likheten

$$10^{\boxed{}} = 0{,}001$$

och vi har att $10^{-3} = 0{,}001$ så är $\lg 0{,}001 = -3$.

d) Jämför vi likheten som definierar $\lg 1$,

$$10^{\lg 1} = 1,$$

med

$$10^0 = 1$$

så ser vi att $\lg 1 = 0$.

e) Från definitionen av tiologaritmen ser vi direkt att $10^{\lg 2} = 2$.

f) Istället för att hela tiden gå tillbaka till definitionen av logaritmen är det bättre att lära sig arbeta med logaritmlagarna,

- $\lg(ab) = \lg a + \lg b$,
- $\lg a^b = b \lg a$,

och förenkla uttrycken först. Med ett sådant arbetssätt behöver man i princip bara lära sig att $\lg 10 = 1$.
I vårt fall har vi att

$$\lg 10^3 = 3 \cdot \lg 10 = 3 \cdot 1 = 3.$$

g) Vi vet att $10^{\lg x} = x$ så därför skriver vi om exponenten till $-\lg 0{,}1 = (-1)\cdot \lg 0{,}1 = \lg 0{,}1^{-1}$ med logaritmlagen $b \lg a = \lg a^b$. Detta ger att

$$10^{-\lg 0{,}1} = 10^{\lg 0{,}1^{-1}} = 0{,}1^{-1} = \frac{1}{0{,}1} = 10.$$

h) Argumentet till logaritmen kan skrivas som $1/10^2 = 10^{-2}$ och sedan ger logaritmlagen $\lg a^b = b \cdot \lg a$ resten,

$$\lg \frac{1}{10^2} = \lg 10^{-2} = (-2)\cdot \lg 10 = (-2)\cdot 1 = -2.$$

3.3:3 a) Genom att skriva argumentet 8 som $8 = 2\cdot 4 = 2\cdot 2\cdot 2 = 2^3$ så ger sedan logaritmlagen $\log a^b = b \cdot \log a$ att

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3,$$

där vi använt att $\log_2 2 = 1$.

b) Eftersom vi arbetar med 9-logaritmen så uttrycker vi $\frac{1}{3}$ som en potens av 9,

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{9^{1/2}} = 9^{-1/2}.$$

Då får vi med logaritmlagarna att

$$\log_9 \tfrac{1}{3} = \log_9 9^{-1/2} = -\tfrac{1}{2}\cdot \log_9 9 = -\tfrac{1}{2}\cdot 1 = -\tfrac{1}{2}.$$

c) Vi skriver först om talet 0,125 som ett bråktal som vi också förkortar,

$$0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{5\cdot 25}{10^3} = \frac{5\cdot 5\cdot 5}{(2\cdot 5)^3} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}.$$

Eftersom 0,125 blev uttryckt som en potens av 2 så kan logaritmen räknas ut helt och hållet,

$$\log_2 0{,}125 = \log_2 2^{-3} = (-3)\cdot \log_2 2 = (-3)\cdot 1 = -3.$$

d) Argumentet till $\log_3$ skriver vi som en potens av 3,

$$9\cdot 3^{1/3} = 3^2 \cdot 3^{1/3} = 3^{2+1/3} = 3^{7/3},$$

och förenklar sedan uttrycket med logaritmlagarna,

$$\log_3(9\cdot 3^{1/3}) = \log_3 3^{7/3} = \tfrac{7}{3}\cdot \log_3 3 = \tfrac{7}{3}\cdot 1 = \tfrac{7}{3}.$$

e) Här kan vi använda definitionen av logaritmen direkt och få att $2^{\log_2 4} = 4$.

f) Skriver vi 4 och 16 som

$$4 = 2\cdot 2 = 2^2,$$
$$16 = 2\cdot 8 = 2\cdot 2\cdot 4 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^4,$$

så får vi att

$$\begin{aligned}\log_2 4 + \log_2 \frac{1}{16} &= \log_2 2^2 + \log_2 \frac{1}{2^4}\\ &= \log_2 2^2 + \log_2 2^{-4}\\ &= 2\cdot \log_2 2 + (-4)\cdot \log_2 2\\ &= 2\cdot 1 + (-4)\cdot 1\\ &= -2.\end{aligned}$$

g) Med logaritmlagen $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$ så kan uttrycket beräknas till

$$\log_3 12 - \log_3 4 = \log_3 \frac{12}{4} = \log_3 3 = 1.$$

Ett annat sätt är att skriva $12 = 3\cdot 4$ och använda logaritmlagen $\log(ab) = \log a + \log b$,

$$\begin{aligned}\log_3 12 - \log_3 4 &= \log_3(3\cdot 4) - \log_3 4\\ &= \log_3 3 + \log_3 4 - \log_3 3\\ &= \log_3 3\\ &= 1.\end{aligned}$$

h) Eftersom $a^2\sqrt{a} = a^2 a^{1/2} = a^{2+1/2} = a^{5/2}$ så ger sedan logaritmlagen $\log a^b = b\cdot \log a$ att

$$\log_a(a^2\sqrt{a}\,) = \log_a a^{5/2} = \tfrac{5}{2}\cdot \log_a a = \tfrac{5}{2}\cdot 1 = \tfrac{5}{2},$$

där vi använt att $\log_a a = 1$.

Anm. I uppgiften antar vi, underförstått, att $a > 0$ och $a \neq 1$.

3.3:4 a) Var för sig är termerna svåra att räkna ut men de två logaritmerna kan slås ihop med logaritmlagen $\log a - \log b = \log(a/b)$,

$$\lg 50 - \lg 5 = \lg\frac{50}{5} = \lg 10 = 1.$$

b) De två termerna kan kombineras till ett logaritmuttryck med logaritmlagen $\log a + \log b = \log(ab)$,

$$\lg 23 + \lg\frac{1}{23} = \lg\Bigl(23\cdot\frac{1}{23}\Bigr) = \lg 1 = 0.$$

c) Alla tre argument till logaritmen kan skrivas som potenser av 3,

$$\begin{aligned} 27^{1/3} &= (3^3)^{1/3} = 3^{3\cdot(1/3)} = 3^1 = 3,\\ \frac{1}{9} &= \frac{1}{3^2} = 3^{-2}, \end{aligned}$$

och därför är det lämpligt att använda just basen 3 i förenklingsarbetet med logaritmerna även om vi har 10-logaritmen lg,

$$\begin{aligned} \lg 27^{1/3} + \frac{\lg 3}{2} + \lg\frac{1}{9} &= \lg 3 + \tfrac{1}{2}\lg 3 + \lg 3^{-2}\\ &= \lg 3 + \tfrac{1}{2}\lg 3 + (-2)\lg 3\\ &= (1 + \tfrac{1}{2} - 2)\lg 3\\ &= -\tfrac{1}{2}\lg 3. \end{aligned}$$

Detta uttryck kan inte förenklas ytterligare.

3.3:5 a) Beteckningen ln används för logaritmen med den naturliga basen $e = 2{,}7182818\ldots$ och vi har därför att $\ln e = 1$, vilket tillsammans med logaritmlagen $\ln a^b = b\cdot\ln a$ ger att

$$\ln e^3 + \ln e^2 = 3\cdot\ln e + 2\cdot\ln e = 3\cdot 1 + 2\cdot 1 = 5.$$

b) Genom att använda logaritmlagarna,

- $\ln a + \ln b = \ln(a\cdot b)$,
- $\ln a - \ln b = \ln\dfrac{a}{b}$,

kan vi samla ihop termerna i ett logaritmuttryck,

$$\begin{aligned} \ln 8 - \ln 4 - \ln 2 &= \ln 8 - (\ln 4 + \ln 2)\\ &= \ln 8 - \ln(4\cdot 2)\\ &= \ln\frac{8}{4\cdot 2}\\ &= \ln 1\\ &= 0, \end{aligned}$$

där $\ln 1 = 0$ eftersom $e^0 = 1$. (Likheten $a^0 = 1$ gäller för alla $a \neq 0$.)

c) Eftersom $\ln 1 = 0$ (följer av att $e^0 = 1$) så är $(\ln 1)\cdot e^2 = 0\cdot e^2 = 0$.

d) I och med att $e^1 = e$ så är $\ln e = 1$ och vi har att $\ln e - 1 = 1 - 1 = 0$.

e) Argumentet till ln kan skrivas som

$$\frac{1}{e^2} = e^{-2},$$

och med logaritmlagen $\ln a^b = b\cdot\ln a$ får vi att

$$\ln\frac{1}{e^2} = \ln e^{-2} = (-2)\cdot\ln e = (-2)\cdot 1 = -2.$$

f) Det gäller att $\ln e = 1$ så hela uttrycket blir $(e^{\ln e})^2 = (e^1)^2 = e^{1\cdot 2} = e^2$.

3.3:6 a) Miniräknaren har ingen knapp för $\log_3$ men däremot en knapp för den naturliga logaritmen ln, så vi behöver skriva om $\log_3 4$ i termer av ln.
Går vi tillbaka till definitionen av logaritmen så ser vi att $\log_3 4$ är det tal som uppfyller

$$3^{\log_3 4} = 4.$$

Logaritmera nu båda led i denna likhet med ln,

$$\ln 3^{\log_3 4} = \ln 4.$$

Vänsterledet kan med logaritmlagen $\ln a^b = b\cdot\ln a$ skrivas som $\log_3 4\cdot\ln 3$ och sambandet blir

$$\log_3 4\cdot\ln 3 = \ln 4.$$

Alltså har vi, efter division med $\ln 3$, att

$$\log_3 4 = \frac{\ln 4}{\ln 3} = \frac{1{,}386294\ldots}{1{,}098612\ldots} = 1{,}2618595\ldots,$$

vilket ger det avrundade svaret $1{,}262$.
Anm. På miniräknaren fås svaret fram genom att trycka på knapparna:

$$\boxed{4}\ \boxed{\text{LN}}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{LN}}\ \boxed{=}$$

b) Logaritmen $\lg 46$ uppfyller sambandet

$$10^{\lg 46} = 46$$

och logaritmerar vi båda led med ln får vi

$$\ln 10^{\lg 46} = \ln 46.$$

Använder vi logaritmlagen $\ln a^b = b \cdot \ln a$ på vänsterledet blir likheten

$$\lg 46 \cdot \ln 10 = \ln 46.$$

Detta visar att

$$\lg 46 = \frac{\ln 46}{\ln 10} = \frac{3{,}828641\ldots}{2{,}302585\ldots} = 1{,}6627578\ldots$$

och svaret blir $1{,}663$.

Anm. För att räkna ut svaret på miniräknaren knappar man in

$\boxed{4}$ $\boxed{6}$ $\boxed{\text{LN}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{LN}}$ $\boxed{=}$

c) Innan vi börjar tänka på att omvandla $\log_2$ och $\log_3$ till ln så använder vi logaritmlagarna,

- $\log a^b = b \cdot \log a$,
- $\log(ab) = \log a + \log b$,

för att förenkla uttrycket,

$$\begin{aligned}\log_3 \log_2 3^{118} &= \log_3(118 \cdot \log_2 3)\\ &= \log_3 118 + \log_3 \log_2 3.\end{aligned}$$

Med hjälp av sambanden

$$2^{\log_2 x} = x \quad \text{och} \quad 3^{\log_3 x} = x,$$

och logaritmering med ln kan vi uttrycka $\log_2$ och $\log_3$ med ln,

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2} \quad \text{och} \quad \log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}.$$

De två termerna $\log_3 118$ och $\log_3 \log_2 3$ kan därför skrivas som

$$\log_3 118 = \frac{\ln 118}{\ln 3} \quad \text{och} \quad \log_3 \log_2 3 = \log_3 \frac{\ln 3}{\ln 2},$$

där vi kan förenkla det sista uttrycket ytterligare genom att använda logaritmlagen $\log(a/b) = \log a - \log b$ och sedan omvandla $\log_3$ till ln,

$$\begin{aligned}\log_3 \frac{\ln 3}{\ln 2} &= \log_3 \ln 3 - \log_3 \ln 2\\ &= \frac{\ln \ln 3}{\ln 3} - \frac{\ln \ln 2}{\ln 3}.\end{aligned}$$

Sammantaget får vi alltså att

$$\log_3 \log_2 3^{118} = \frac{\ln 118}{\ln 3} + \frac{\ln \ln 3}{\ln 3} - \frac{\ln \ln 2}{\ln 3}.$$

Inmatat i miniräknaren ger detta att

$$\log_3 \log_2 3^{118} \approx 4{,}762.$$

Anm. Knappsekvensen på miniräknaren blir

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{8}$ $\boxed{\text{LN}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{LN}}$ $\boxed{+}$

$\boxed{3}$ $\boxed{\text{LN}}$ $\boxed{\text{LN}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{LN}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{2}$

$\boxed{\text{LN}}$ $\boxed{\text{LN}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{LN}}$ $\boxed{=}$

3.4 Logaritmekvationer

3.4:1 a) En ekvation av denna typ löser vi genom att logaritmera båda led med ln,

$$\ln e^x = \ln 13.$$

Då kan det obekanta x flyttas ner med logaritmlagen $\ln a^b = b \cdot \ln a$ som en faktor i vänsterledet,

$$x \cdot \ln e = \ln 13,$$

och sedan är det enkelt att lösa ut x,

$$x = \frac{\ln 13}{\ln e} = \frac{\ln 13}{1} = \ln 13.$$

Anm. En sak som vi inte nämner i denna lösning är att innan vi gör det första steget och logaritmerar båda led i ekvationen är det nödvändigt att försäkra oss om att vänsterledet och högerledet är positiva (det går inte att ta logaritmen av ett negativt tal). Eftersom ekvationen är

$$e^x = 13$$

så ser vi direkt att högerledet är positivt. Vänsterledet är också positivt eftersom ”ett positivt tal $e \approx 2{,}718\ldots$ upphöjt till ett tal” alltid ger ett positivt tal.

b) I ekvationen är båda led positiva eftersom faktorerna e^x och 3^{-x} är positiva oavsett värdet på x (en positiv bas upphöjd till ett tal ger alltid ett positivt tal). Vi kan därför logaritmera båda led med ln,

$$\ln(13e^x) = \ln(2 \cdot 3^{-x}).$$

Med logaritmlagen $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ kan vi dela upp produkterna i flera logaritmtermer,

$$\ln 13 + \ln e^x = \ln 2 + \ln 3^{-x},$$

och med lagen $\ln a^b = b \cdot \ln a$ får vi bort x från exponenterna,

$$\ln 13 + x \ln e = \ln 2 + (-x) \ln 3.$$

Samla ihop x i ena ledet och övriga termer i det andra ledet,

$$x \ln e + x \ln 3 = \ln 2 - \ln 13.$$

Bryt ut x i vänsterledet och använd att $\ln e = 1$,

$$x(1 + \ln 3) = \ln 2 - \ln 13.$$

Lös sedan ut x,

$$x = \frac{\ln 2 - \ln 13}{1 + \ln 3}.$$

Anm. Eftersom $\ln 2 < \ln 13$ kan man skriva svaret som

$$x = -\frac{\ln 13 - \ln 2}{1 + \ln 3}$$

för att indikera att x är negativ.

c) Ekvationen har samma form som ekvationen i b-uppgiften och därför kan vi använda samma strategi.
Vi logaritmerar först båda led,

$$\ln(3e^x) = \ln(7 \cdot 2^x),$$

och använder logaritmlagarna för att frigöra x,

$$\ln 3 + x \ln e = \ln 7 + x \ln 2.$$

Samla sedan ihop x i vänsterledet,

$$x(\ln e - \ln 2) = \ln 7 - \ln 3.$$

Lösningen blir nu

$$x = \frac{\ln 7 - \ln 3}{\ln e - \ln 2} = \frac{\ln 7 - \ln 3}{1 - \ln 2}.$$

3.4:2 a) Vänsterledet är ”2 upphöjt till någonting” och därför ett positivt tal vilket värde än exponenten har. Vi kan därför logaritmera båda led,

$$\ln 2^{x^2-2} = \ln 1,$$

och använda logaritmlagen $\ln a^b = b \cdot \ln a$ för att få exponenten $x^2 - 2$ som en faktor i vänsterledet,

$$(x^2 - 2) \ln 2 = \ln 1.$$

Eftersom $e^0 = 1$ så är $\ln 1 = 0$,

$$(x^2 - 2) \ln 2 = 0.$$

Detta betyder att x måste uppfylla andragradsekvationen

$$x^2 - 2 = 0.$$

Rotutdragning ger att $x = -\sqrt{2}$ eller $x = \sqrt{2}$.
Anm. Uppgiften är från finska studentexamen mars 2007.

b) Skriver vi om ekvationen som

$$(e^x)^2 + e^x = 4$$

så ser vi att x förekommer bara i kombinationen e^x och därför är det lämpligt att först betrakta e^x som en ny obekant i ekvationen och sedan, när vi fått fram värden på e^x, kan vi beräkna motsvarande värden på x via en enkel logaritmering.

Sätter vi för tydlighets skull $t = e^x$ så kan ekvationen skrivas

$$t^2 + t = 4,$$

och denna andragradsekvation löser vi med kvadratkomplettering,

$$t^2 + t = \bigl(t + \tfrac{1}{2}\bigr)^2 - \bigl(\tfrac{1}{2}\bigr)^2 = \bigl(t + \tfrac{1}{2}\bigr)^2 - \tfrac{1}{4},$$

vilket ger att

$$\bigl(t + \tfrac{1}{2}\bigr)^2 - \tfrac{1}{4} = 4 \quad\Leftrightarrow\quad t = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{17}.$$

Dessa två rötter ger oss två möjliga värden på e^x,

$$e^x = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{17} \quad \text{eller} \quad e^x = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{17}.$$

I det första fallet är högerledet negativt och eftersom "e upphöjt till någonting" aldrig kan vara negativt finns det inget x som kan uppfylla den likheten. Det andra fallet har däremot ett positivt högerled (eftersom $\sqrt{17} > 1$) och då kan vi logaritmera båda led och få

$$x = \ln\bigl(\tfrac{1}{2}\sqrt{17} - \tfrac{1}{2}\bigr).$$

Anm. Det är lite knepigt att kontrollera svaret i den ursprungliga ekvationen så vi kan nöja oss med att sätta in $t = \tfrac{1}{2}\sqrt{17} - \tfrac{1}{2}$ i ekvationen $t^2 + t = 4$,

$$\begin{aligned}
\text{VL} &= \bigl(\tfrac{1}{2}\sqrt{17} - \tfrac{1}{2}\bigr)^2 + \bigl(\tfrac{1}{2}\sqrt{17} - \tfrac{1}{2}\bigr)\\
&= \tfrac{1}{4}\cdot 17 - 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{17} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\sqrt{17} - \tfrac{1}{2}\\
&= \tfrac{17}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{16}{4} = 4 = \text{HL}.
\end{aligned}$$

c) Oavsett vilket värde x har så är båda led i ekvationen positiva eftersom de är av typen "positivt tal upphöjt till någonting". Därför går det bra att logaritmera båda led och på så sätt med logaritmlagarna få ner x från exponenterna,

$$\begin{aligned}
\text{VL} &= \ln\bigl(3e^{x^2}\bigr) = \ln 3 + \ln e^{x^2} = \ln 3 + x^2 \ln e = \ln 3 + x^2,\\
\text{HL} &= \ln 2^x = x \ln 2.
\end{aligned}$$

Samlar vi termerna i ena ledet blir ekvationen

$$x^2 - x\ln 2 + \ln 3 = 0,$$

vilket är en vanlig andragradsekvation som vi börjar med att kvadratkomplettera,

$$\begin{aligned}
\bigl(x - \tfrac{1}{2}\ln 2\bigr)^2 - \bigl(\tfrac{1}{2}\ln 2\bigr)^2 + \ln 3 &= 0,\\
\bigl(x - \tfrac{1}{2}\ln 2\bigr)^2 &= \bigl(\tfrac{1}{2}\ln 2\bigr)^2 - \ln 3.
\end{aligned}$$

Nu måste vi vara observanta och tänka på att eftersom $2 < e < 3$ så är $\ln 2 < 1 < \ln 3$ vilket betyder att $\tfrac{1}{4}(\ln 2)^2 < \ln 3$ och högerledet är därför negativt. I och med att kvadraten i vänsterledet inte kan vara negativ så saknar ekvationen lösning.

3.4:3 a) Både vänster- och högerled är positiva för alla värden på x och det betyder att vi kan logaritmera båda led och få en mer hanterbar ekvation,

$$\begin{aligned}
\text{VL} &= \ln 2^{-x^2} = -x^2 \ln 2,\\
\text{HL} &= \ln(2e^{2x}) = \ln 2 + \ln e^{2x} = \ln 2 + 2x\cdot\ln e = \ln 2 + 2x\cdot 1.
\end{aligned}$$

Ekvationen blir, efter lite ommöblering,

$$x^2 + \frac{2}{\ln 2}x + 1 = 0.$$

Vi kvadratkompletterar vänsterledet,

$$\Bigl(x + \frac{1}{\ln 2}\Bigr)^2 - \Bigl(\frac{1}{\ln 2}\Bigr)^2 + 1 = 0,$$

och flyttar över konstanttermerna i högerledet,

$$\Bigl(x + \frac{1}{\ln 2}\Bigr)^2 = \Bigl(\frac{1}{\ln 2}\Bigr)^2 - 1.$$

Det kan vara svårt att direkt se om högerledet är positivt eller inte, men om vi tänker på att $e > 2$ och därmed att $\ln 2 < \ln e = 1$ så måste $(1/\ln 2)^2 > 1$, dvs. högerledet är positivt. Ekvationen har därför lösningarna

$$x = -\frac{1}{\ln 2} \pm \sqrt{\Bigl(\frac{1}{\ln 2}\Bigr)^2 - 1},$$

vilket också kan skrivas som

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (\ln 2)^2}}{\ln 2}.$$

b) Uttrycken $\ln(x^2 + 3x)$ och $\ln(3x^2 - 2x)$ är lika bara när argumenten till ln är lika, dvs.

$$x^2 + 3x = 3x^2 - 2x.$$

Men vi måste se upp! Om vi får fram ett värde på x som gör att dessa argument är lika men negativa eller noll så motsvarar det inte en riktig lösning eftersom ln inte är definierad för negativa argument. I slutet av uppgiften måste vi därför kontrollera att x^2+3x och $3x^2-2x$ verkligen är positiva för de framräknade lösningarna.

Flyttar vi över alla termer i ena ledet i argumentekvationen får vi andragradsekvationen

$$2x^2-5x=0,$$

och vi ser att båda termer innehåller x som vi bryter ut,

$$x(2x-5)=0.$$

Från detta faktoriserade uttryck avläser vi direkt att lösningarna är $x=0$ och $x=\frac{5}{2}$.

Den slutliga kontrollen visar att när $x=0$ är $x^2+3x=2x^2-2x=0$, så $x=0$ är inte en lösning. Däremot, när $x=\frac{5}{2}$ är $x^2+3x=3x^2-2x=\frac{55}{4}>0$, så $x=\frac{5}{2}$ är en lösning.

c) Med logaritmlagarna kan vi skriva ihop vänsterledet till ett logaritmuttryck,

$$\ln x+\ln(x+4)=\ln\bigl(x(x+4)\bigr),$$

men denna omskrivning förutsätter att uttrycken $\ln x$ och $\ln(x+4)$ är definierade, dvs. att $x>0$ och $x+4>0$. Väljer vi därför att fortsätta med ekvationen

$$\ln\bigl(x(x+4)\bigr)=\ln(2x+3)$$

så måste vi komma ihåg att bara acceptera lösningar som uppfyller $x>0$ (villkoret $x+4>0$ är då automatiskt uppfyllt).

Den ihopskrivna ekvationen är i sin tur bara uppfylld om argumenten $x(x+4)$ och $2x+3$ är lika och positiva, dvs.

$$x(x+4)=2x+3.$$

Vi skriver om denna ekvation till $x^2+2x-3=0$ och kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned}(x+1)^2-1^2-3&=0,\\(x+1)^2&=4,\end{aligned}$$

vilket betyder att $x=-1\pm 2$, dvs. $x=-3$ och $x=1$.

Eftersom $x=-3$ är negativ sorteras den bort medan $x=1$ uppfyller både att $x>0$ och att $x(x+4)=2x+3>0$. Svaret är alltså $x=1$.

4.1 Vinklar och cirklar

4.1:1 Det enda vi egentligen behöver hålla reda på är att ett varv motsvarar 360° eller 2π radianer. Då får vi att

a) $\frac{1}{4}$ varv $=\frac{1}{4}\cdot 360^\circ=90^\circ$ och
$\frac{1}{4}$ varv $=\frac{1}{4}\cdot 2\pi$ radianer $=\pi/2$ radianer,

b) $\frac{3}{8}$ varv $=\frac{3}{8}\cdot 360^\circ=135^\circ$ och
$\frac{3}{8}$ varv $=\frac{3}{8}\cdot 2\pi$ radianer $=3\pi/4$ radianer,

c) $-\frac{2}{3}$ varv $=-\frac{2}{3}\cdot 360^\circ=-240^\circ$ och
$-\frac{2}{3}$ varv $=-\frac{2}{3}\cdot 2\pi$ radianer $=-4\pi/3$ radianer,

d) $\frac{97}{12}$ varv $=\frac{97}{12}\cdot 360^\circ=2910^\circ$ och
$\frac{97}{12}$ varv $=\frac{97}{12}\cdot 2\pi$ radianer $=97\pi/6$ radianer.

4.1:2 Använder vi minnesregeln att ett varv är 360° eller 2π radianer kan vi härleda en omvandlingsformel från grader till radianer. Eftersom

$$360\cdot 1^\circ = 2\pi \text{ radianer}$$

så ger detta att

$$1^\circ=\frac{2\pi}{360}\text{ radianer}=\frac{\pi}{180}\text{ radianer.}$$

Nu kan vi sätta igång att omvandla vinklarna,

a) $45^\circ=45\cdot 1^\circ=45\cdot\dfrac{\pi}{180}$ radianer $=\pi/4$ radianer,

b) $135^\circ=135\cdot 1^\circ=135\cdot\dfrac{\pi}{180}$ radianer $=3\pi/4$ radianer,

c) $-63^\circ=-63\cdot 1^\circ=-63\cdot\dfrac{\pi}{180}$ radianer $=-7\pi/20$ radianer,

d) $270^\circ=270\cdot 1^\circ=270\cdot\dfrac{\pi}{180}$ radianer $=3\pi/2$ radianer.

4.1:3 a) En rätvinklig triangel är en triangel där en av vinklarna är 90°. Den sida som är mittemot 90°-vinkeln kallas för hypotenusan (markerad med x i triangeln) och de andra sidorna kallas för kateter.

Med hjälp av Pythagoras sats kan vi i den rätvinkliga triangeln skriva upp ett samband mellan triangelns sidor,

$$x^2=30^2+40^2.$$

Denna ekvation ger oss att

$$\begin{aligned}x&=\sqrt{30^2+40^2}=\sqrt{900+1600}=\sqrt{2500}\\&=\sqrt{25\cdot 100}=\sqrt{5^2\cdot 10^2}=5\cdot 10=50.\end{aligned}$$

b) Eftersom en av vinklarna i triangeln är 90° har vi en rätvinklig triangel och kan använda Pythagoras sats för att ställa upp ett samband mellan triangelns sidor. Sidan med längd 13 är hypotenusan i triangeln och Pythagoras sats ger oss därför att

$$13^2 = 12^2 + x^2,$$

dvs. $x^2 = 13^2 - 12^2$. Detta betyder att

$$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5.$$

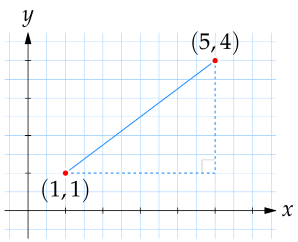
c) I denna rätvinkliga triangel är sidan med längd 17 hypotenusan. (Det är den sida som står mittemot den räta vinkeln.) Pythagoras sats ger då att

$$17^2 = 8^2 + x^2,$$

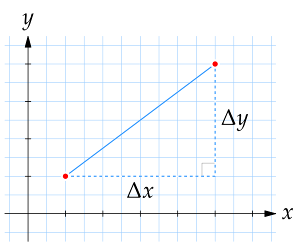
eller $x^2 = 17^2 - 8^2$. Vi får att

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} \\ &= \sqrt{9 \cdot 25} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2} = 3 \cdot 5 = 15. \end{aligned}$$

4.1:4 a) Ritar vi in punkterna i ett koordinatsystem så kan vi se linjestycket mellan punkterna som hypotenusan i en tänkt rätvinklig triangel där kateterna är parallella med x- resp. y-axeln.



I denna triangel är det lätt att mäta kateternas längd som helt enkelt avståndet i x- resp. y-led mellan punkterna,



$$\Delta x = 5 - 1 = 4, \quad \Delta y = 4 - 1 = 3.$$

Sedan kan vi med Pythagoras sats räkna ut hypotenusans längd som också är avståndet mellan punkterna,

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

Anm. Allmänt så har vi att avståndet mellan två punkter (x, y) och (a, b) ges av avståndsformeln,

$$d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

b) Om vi använder avståndsformeln,

$$d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

för att bestämma avståndet mellan punkterna $(x, y) = (-2, 5)$ och $(a, b) = (3, -1)$ så får vi att

$$d = \sqrt{(-2-3)^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{(-5)^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}.$$

c) Låt punkten på x-axeln ha koordinater $(x, 0)$, där x är något okänt tal. Då ges avstånden från punkten $(x, 0)$ till $(3, 3)$ och $(5, 1)$ med hjälp av avståndsformeln av

$$\sqrt{(x-3)^2 + (0-3)^2} \quad \text{resp.} \quad \sqrt{(x-5)^2 + (0-1)^2}.$$

Eftersom dessa avstånd ska vara lika får vi ekvationen

$$\sqrt{(x-3)^2 + 9} = \sqrt{(x-5)^2 + 1},$$

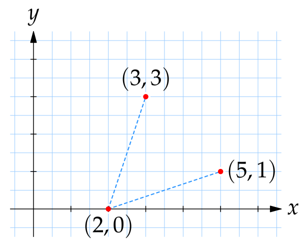
eller om vi kvadrerar båda led, för att bli av med rottecknen,

$$(x-3)^2 + 9 = (x-5)^2 + 1.$$

Utveckla nu kvadraterna och samla alla termer i ena ledet

$$x^2 - 6x + 9 + 9 = x^2 - 10x + 25 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 8 = 0.$$

Detta ger oss att $x = 2$, dvs. punkten på x-axeln är $(2, 0)$.



Som ett sista steg kontrollerar vi att vi räknat rätt och att avstånden verkligen är lika. Avståndet mellan $(2,0)$ och $(3,3)$ är

$$\sqrt{(3-2)^2+(3-0)^2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

och avståndet mellan $(2,0)$ och $(5,1)$ är

$$\sqrt{(5-2)^2+(1-0)^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

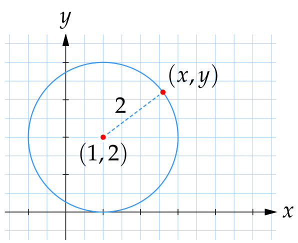
Anm. Trots att vi kvadrerade vår rotekvation är det faktiskt inte nödvändigt att pröva lösningen av det skälet att eftersom uttrycken under rottecknen är summor av kvadrater som aldrig är negativa och därför inte kan ge upphov till s.k. falska rötter.

4.1:5 a) En cirkel definieras som alla punkter som har ett fixt bestämt avstånd till cirkelns medelpunkt. En punkt (x,y) ligger alltså på vår cirkel om och endast om dess avstånd till punkten $(1,2)$ är exakt lika med 2. Med avståndsformeln kan vi uttrycka detta villkor som

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = 2.$$

Efter en kvadrering får vi cirkelns ekvation i standardform,

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = 4.$$



Cirkeln med medelpunkt i $(1,2)$ och radie 2 har ekvationen $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

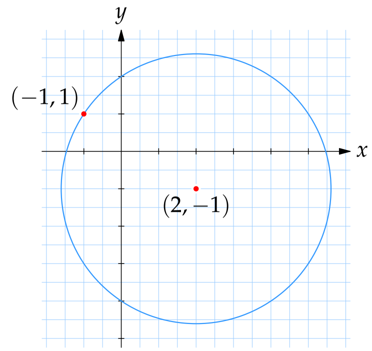
b) Om cirkeln ska innehålla punkten $(-1,1)$ så måste den punkten ha ett avstånd till medelpunkten $(2,-1)$ som är lika med cirkelns radie r. Cirkelns radie kan vi alltså få fram genom att beräkna avståndet mellan $(-1,1)$ och $(2,-1)$ med avståndsformeln,

$$r = \sqrt{(2-(-1))^2+(-1-1)^2} = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

När vi vet cirkelns medelpunkt och radie kan vi direkt ställa upp cirkelns ekvation,

$$(x-2)^2+\bigl(y-(-1)\bigr)^2 = (\sqrt{13}\,)^2,$$

vilket är samma sak som $(x-2)^2+(y+1)^2=13$.



Cirkeln med medelpunkt i $(2,-1)$ och som innehåller punkten $(-1,1)$ har ekvationen $(x-2)^2+(y+1)^2=13$.

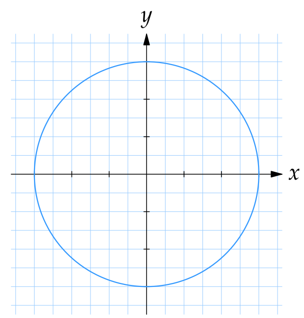
Anm. En cirkel som har medelpunkt (a,b) och radie r har ekvationen

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2.$$

4.1:6 a) Skriver vi om ekvationen som

$$(x-0)^2+(y-0)^2 = 9$$

så kan vi tolka vänsterledet som avståndet i kvadrat mellan punkten (x,y) och $(0,0)$. Hela ekvationen säger då att avståndet från en punkt (x,y) till origo ska vara konstant lika med $\sqrt{9}=3$, vilket beskriver en cirkel med medelpunkt i origo och radie 3.



Cirkeln med ekvationen $x^2+y^2=9$ har medelpunkt i origo och radie 3.

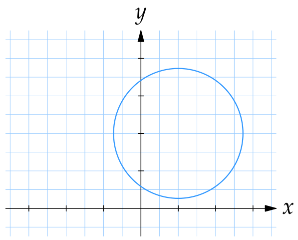
b) Ett snabbt sätt att tolka ekvationen är att jämföra den med standardformen på ekvationen för en cirkel med medelpunkt i (a,b) och radie r,

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2.$$

I vårt fall kan vi skriva ekvationen som

$$(x-1)^2+(y-2)^2=(\sqrt{3})^2,$$

och då ser vi att den beskriver en cirkel med medelpunkt i $(1,2)$ och radie $\sqrt{3}$.



Cirkeln med ekvationen $(x-1)^2+(y-2)^2=3$ har medelpunkt i $(1,2)$ och radie $\sqrt{3}$.

c) Vad vi behöver göra är att skriva om ekvationen till standardformen,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

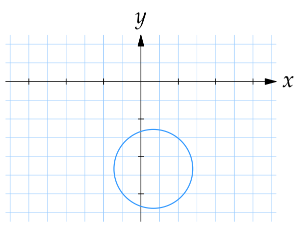
för då kan vi avläsa cirkelns medelpunkt (a,b) och radie r.
I vårt fall behöver vi bara bryta ut faktorn 3 från vänsterledets parenteser,

$$\begin{aligned}(3x-1)^2+(3y+7)^2 &= 3^2\bigl(x-\tfrac{1}{3}\bigr)^2+3^2\bigl(y+\tfrac{7}{3}\bigr)^2\\ &= 9\bigl(x-\tfrac{1}{3}\bigr)^2+9\bigl(y+\tfrac{7}{3}\bigr)^2,\end{aligned}$$

och sedan dela båda led med 9 för att få ekvationen i den önskade formen,

$$\bigl(x-\tfrac{1}{3}\bigr)^2+\bigl(y+\tfrac{7}{3}\bigr)^2=\tfrac{10}{9}.$$

Eftersom högerledet kan skrivas som $\bigl(\sqrt{\tfrac{10}{9}}\,\bigr)^2$ och termen $\bigl(y+\tfrac{7}{3}\bigr)^2$ som $\bigl(y-(-\tfrac{7}{3})\bigr)^2$ så beskriver ekvationen en cirkel med medelpunkt i $\bigl(\tfrac{1}{3},-\tfrac{7}{3}\bigr)$ och radie $\sqrt{\tfrac{10}{9}}=\tfrac{1}{3}\sqrt{10}$.



Cirkeln med ekvationen $(3x-1)^2+(3x+7)^2=10$ har medelpunkt i $(\frac{1}{3},-\frac{7}{3})$ och radie $\sqrt{10}/3$.

4.1:7 a) Som ekvationen står skriven är det svårt att direkt kunna avläsa något om cirkeln, men om vi använder kvadratkomplettering och kombinerar ihop x- och y-termerna i varsina kvadratuttryck så har vi ekvationen i standardformen,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

och kan avläsa cirkelns medelpunkt och radie.
Tar vi x- respektive y-termerna i vänsterledet och kvadratkompletterar så får vi att

$$\begin{aligned}x^2+2x&=(x+1)^2-1^2,\\ y^2-2y&=(y-1)^2-1^2,\end{aligned}$$

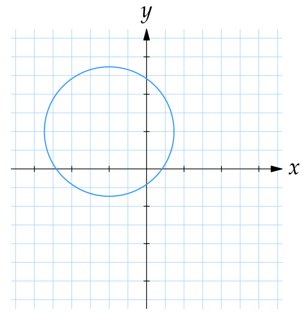
och då kan hela ekvationen skrivas som

$$(x+1)^2-1+(y-1)^2-1=1,$$

eller med konstanterna flyttade till högerledet,

$$(x+1)^2+(y-1)^2=3.$$

Detta är en cirkel med medelpunkt i $(-1,1)$ och radie $\sqrt{3}$.



Cirkeln med ekvationen $x^2+2x+y^2-2y=1$ har medelpunkt i $(-1,1)$ och radie $\sqrt{3}$.

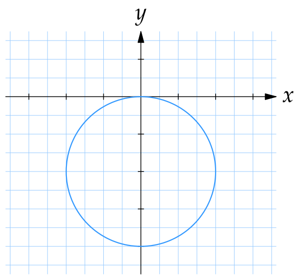
b) Ekvationen är nästan given i standardformen för en cirkel; det enda ytterligare som behövs är att vi samlar ihop y^2- och y-termerna i ett kvadratuttryck med kvadratkomplettering,

$$y^2+4y=(y+2)^2-2^2.$$

Efter denna omskrivning är ekvationen

$$x^2+(y+2)^2=4,$$

och vi ser att ekvationen beskriver en cirkel med medelpunkt i $(0,-2)$ och radie $\sqrt{4}=2$.



Cirkeln med ekvationen $x^2+y^2+4y=0$ har medelpunkt i $(0,-2)$ och radie 2.

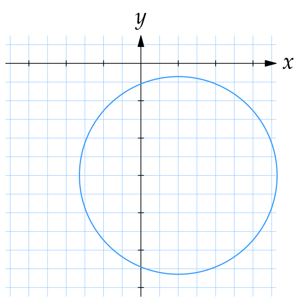
c) Med kvadratkomplettering kan vi skriva om x- respektive y-termerna som kvadratuttryck,

$$\begin{aligned} x^2-2x &= (x-1)^2-1^2,\\ y^2+6y &= (y+3)^2-3^2, \end{aligned}$$

och hela ekvationen blir då i standardform,

$$\begin{aligned} &(x-1)^2-1+(y+3)^2-9=-3\\ \Leftrightarrow\quad &(x-1)^2+(y+3)^2=7. \end{aligned}$$

Från detta avläser vi att cirkeln har medelpunkt i $(1,-3)$ och radie $\sqrt{7}$.



Cirkeln med ekvationen $x^2-2x+y^2+6y=-3$ har medelpunkt i $(1,-3)$ och radie $\sqrt{7}$.

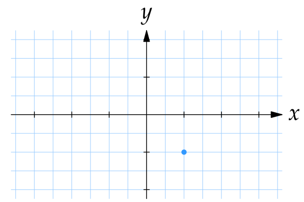
d) Vi skriver om ekvationen i standardform genom att kvadratkomplettera x- och y-termerna,

$$\begin{aligned} x^2-2x &= (x-1)^2-1^2,\\ y^2+2y &= (y+1)^2-1^2. \end{aligned}$$

Nu blir ekvationen

$$\begin{aligned} &(x-1)^2-1^2+(y+1)^2-1=-2\\ \Leftrightarrow\quad &(x-1)^2+(y+1)^2=0. \end{aligned}$$

Den enda punkt som uppfyller denna ekvation är $(x,y)=(1,-1)$ eftersom för alla andra värden på x och y är vänsterledet strikt positivt och därmed skilt från 0.



Cirkeln med ekvationen $x^2-2x+y^2+2y=-2$ är degenererad och består endast av punkten $(1,-1)$.

4.1:8 Eftersom hjulets omkrets är

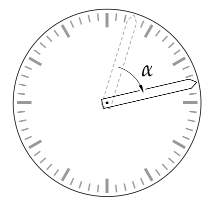
$$2\pi\cdot(\text{radien}) = 2\pi\cdot 0{,}5\,\text{meter} = \pi\,\text{meter}$$

så snurrar hjulet π meter varje varv och på 10 meter hinner därför hjulet snurra

$$\frac{10\,\text{meter}}{\pi\,\text{meter}} = \frac{10}{\pi}\,\text{varv} \approx 3{,}2\,\text{varv}.$$

4.1:9 Tiden 10 sekunder motsvarar $\frac{1}{6}$ minut så under den tidsperioden hinner sekundvisaren svepa över $\frac{1}{6}$ varv, dvs. en cirkelsektor med medelpunktsvinkeln

$$\alpha = \tfrac{1}{6}\cdot 2\pi\ \text{radianer} = \pi/3\ \text{radianer}.$$

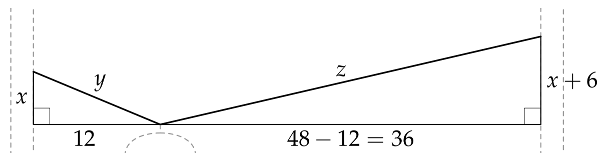


Arean av den cirkelsektorn är

$$\text{Area} = \tfrac{1}{2}\alpha r^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\pi\cdot(8\,\text{cm})^2 = \frac{32\pi}{3}\,\text{cm}^2 \approx 33{,}5\,\text{cm}^2.$$

4.1:10 Låt oss först bestämma oss för att mäta alla avstånd i dm (decimeter) istället för m (meter) så får vi avstånden som heltal.

Vi kallar tvättlinans längd från träd till galge för y respektive z enligt figuren nedan, och inför två hjälptrianglar som har y resp. z som hypotenusa. (Som en approximation antar vi att den spända tvättlinan består av två räta delar.)



Eftersom linan är 54 dm lång har vi att

$$y + z = 54. \tag{1}$$

Sedan ger Pythagoras sats att vi har sambanden

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + 12^2, \qquad (2)\\ z^2 &= (x+6)^2 + 36^2. \qquad (3) \end{aligned}$$

Planen är nu att lösa ekvationssystemet (1) till (3) genom att först eliminera z så att vi får två ekvationer som bara innehåller x och y. Sedan eliminera y från en av dessa ekvationer så att vi får en ekvation som bestämmer x.

Från (1) har vi att $z = 54 - y$ och detta insatt i (3) ger oss ekvationen

$$(54-y)^2 = (x+6)^2 + 36^2. \tag{3'}$$

Ekvationer (2) och (3′) bildar tillsammans ett mindre ekvationssystem i x och y,

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + 12^2, \qquad (2)\\ (54-y)^2 &= (x+6)^2 + 36^2. \qquad (3') \end{aligned}$$

Utveckla kvadraterna i båda led av (3′),

$$54^2 - 2\cdot 54\cdot y + y^2 = x^2 + 2\cdot 6\cdot x + 6^2 + 36^2,$$

och förenkla

$$2916 - 108y + y^2 = x^2 + 12x + 1332.$$

Använd (2) och ersätt y^2 med $x^2 + 12^2$ i denna ekvation,

$$2916 - 108y + x^2 + 144 = x^2 + 12x + 1332,$$

vilket gör att x^2-termerna förenklas bort,

$$2916 - 108y + 144 = 12x + 1332,$$

och ytterligare förenkling ger ekvationen

$$12x + 108y = 1728. \tag{3''}$$

Om vi stannar upp ett tag och sammanfattar läget så har vi nu lyckats förenkla ekvationssystemet (2) och (3′) till ett system (2) och (3″) där en av ekvationerna är linjär,

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + 12^2, \qquad (2)\\ 12x + 108y &= 1728. \qquad (3'') \end{aligned}$$

I detta system kan vi lösa ut y från (3″),

$$y = \frac{1728 - 12x}{108} = 16 - \frac{x}{9},$$

och stoppa in i (2),

$$\Bigl(16 - \frac{x}{9}\Bigr)^2 = x^2 + 144.$$

Detta är en ekvation som bara innehåller x och löser vi den får vi fram vårt svar.

Utveckla kvadraten i vänsterledet,

$$16^2 - 2\cdot 16\cdot \frac{x}{9} + \Bigl(\frac{x}{9}\Bigr)^2 = x^2 + 144,$$

och samla ihop alla termer i ena ledet,

$$x^2 - \frac{x^2}{81} + \tfrac{32}{9}x + 144 - 16^2 = 0,$$

vilket ger ekvationen

$$\tfrac{80}{81}x^2 + \tfrac{32}{9}x - 112 = 0.$$

Multiplicera båda led med $\frac{81}{80}$ så att vi får ekvationen i standardform,

$$x^2 + \tfrac{18}{5}x - \tfrac{567}{5} = 0.$$

Kvadratkomplettera vänsterledet,

$$\bigl(x + \tfrac{9}{5}\bigr)^2 - \bigl(\tfrac{9}{5}\bigr)^2 - \tfrac{567}{5} = 0,$$

och vi får

$$\bigl(x + \tfrac{9}{5}\bigr)^2 = \tfrac{81}{25} + \tfrac{567}{5} = \tfrac{2916}{25},$$

dvs.

$$x = -\tfrac{9}{5} \pm \sqrt{\tfrac{2916}{25}} = -\tfrac{9}{5} \pm \tfrac{54}{5}.$$

Detta betyder att ekvationen har lösningarna

$$x = -\tfrac{9}{5} - \tfrac{54}{5} = -\tfrac{63}{5} \quad\text{och}\quad x = -\tfrac{9}{5} + \tfrac{54}{5} = 9.$$

Svaret är alltså att $x = 9$ dm. (Den negativa roten måste förkastas.)

För att vara säker på att vi har räknat rätt tar vi också reda på värdena på y och z, och kontrollerar att de ursprungliga ekvationerna (1) till (3) är uppfyllda.

Ekvation (3″) ger att

$$y = 16 - \frac{x}{9} = 16 - 1 = 15,$$

och ekvation (1) ger att

$$z = 54 - y = 54 - 15 = 39.$$

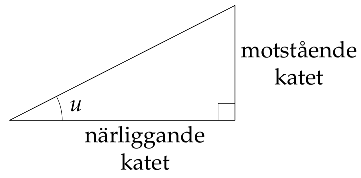
Nu kontrollerar vi att $x = 9$, $y = 15$ och $z = 39$ uppfyller ekvationerna (1), (2) och (3),

$$\begin{aligned}
\text{VL av (1)} &= 15 + 39 = 54,\\
\text{HL av (1)} &= 54,\\
\text{VL av (2)} &= 15^2 = 225,\\
\text{HL av (2)} &= 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225,\\
\text{VL av (3)} &= 39^2 = 1521,\\
\text{HL av (3)} &= (9+6)^2 + 36^2 = 15^2 + 36^2 = 225 + 1296 = 1521.
\end{aligned}$$

4.2 Trigonometriska funktioner

4.2:1 a) Definitionen av tangens säger att

$$\tan u = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}.$$



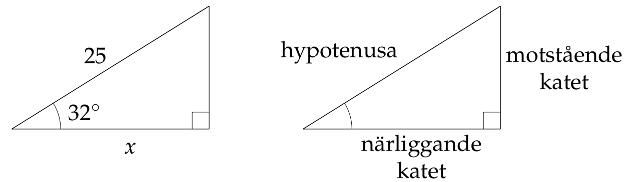
I vårt fall betyder detta att

$$\tan 27^\circ = \frac{x}{13},$$

vilket ger att $x = 13 \cdot \tan 27^\circ$.

Anm. Med en miniräknare kan vi räkna ut vad x blir, $x = 13 \cdot \tan 27^\circ \approx 6{,}62$.

b) Om vi spegelvänder triangeln kan det vara enklare att identifiera de olika sidorna i triangeln.



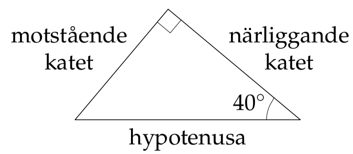
Eftersom vi vet hypotenusan och söker den närliggande kateten är det lämpligt att ställa upp kvoten för cosinus av vinkeln,

$$\cos 32^\circ = \frac{x}{25} \quad \Bigl(= \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusa}}\Bigr).$$

Ur detta samband kan vi lösa ut x,

$$x = 25 \cdot \cos 32^\circ \quad (\approx 21{,}2).$$

c) Svårigheten är att känna igen sidorna i den rätvinkliga triangeln. En enkel tumregel är att hypotenusan är den sida som står mittemot den räta vinkeln. (Det är också den längsta sidan i triangeln.) Den närliggande kateten är den sida som ligger intill den vinkel vi betraktar och den motstående kateten är den tredje sidan.

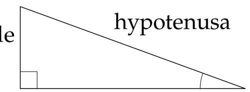


Den motstående kateten är given medan den närliggande kateten söks. Därför ställer vi upp tangens av vinkeln,

$$\tan 40^\circ = \frac{14}{x},$$

och då är $x = \dfrac{14}{\tan 40^\circ} \quad (\approx 16{,}7)$.

d) Sidan markerad med x är hypotenusan i den rätvinkliga triangeln och sidan med längd 16 är den närliggande kateten till vinkeln 20°.

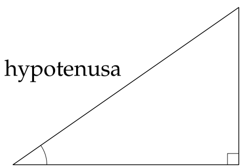


Genom att ställa upp kvoten för $\cos 20^\circ$ får vi sambandet

$$\cos 20^\circ = \frac{16}{x}$$

och det medför att $x = \dfrac{16}{\cos 20^\circ} \quad (\approx 17{,}0)$.

e) I triangeln söker vi hypotenusan x när vi vet vinkeln 35° och den motstående katetens längd, 11.

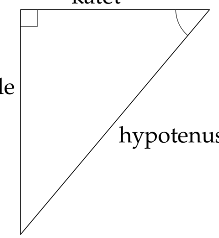


Definitionen av sinus ger att

$$\sin 35^\circ = \frac{11}{x}$$

och därmed att $x = \dfrac{11}{\sin 35^\circ} \quad (\approx 19{,}2)$.

f) Den närliggande kateten till vinkeln 50° är markerad med x och den motsatta kateten är den sida som har längd 19.



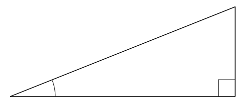
Ställer vi upp tangens för vinkeln så ger detta ett samband som bara innehåller x som obekant,

$$\tan 50^\circ = \frac{19}{x}.$$

Detta ger att $x = \dfrac{19}{\tan 50^\circ} \quad (\approx 15{,}9)$.

4.2:2 a) De två kateterna är givna i den rätvinkliga triangeln och det betyder att tangensvärdet för vinkeln kan bestämmas som kvoten mellan den motstående och närliggande kateten,

$$\tan v = \frac{2}{5}.$$

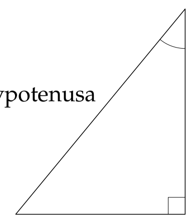


Detta är samtidigt en trigonometrisk ekvation för vinkeln v.

Anm. I kapitlet ”Trigonometriska ekvationer” kommer vi undersöka närmare hur man löser ekvationer av denna typ.

b) I denna rätvinkliga triangel är den motstående kateten och hypotenusan givna. Detta betyder att vi direkt kan ställa upp ett samband för sinus av vinkeln v,

$$\sin v = \frac{70}{110}.$$

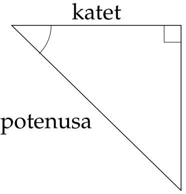


Högerledet i denna ekvation kan förenklas så att vi får

$$\sin v = \frac{7}{11}.$$

c) Cosinus av vinkeln v är den närliggande kateten dividerat med hypotenusan,

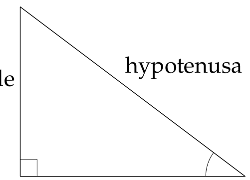
$$\cos v = \frac{5}{7}.$$



Detta är också en ekvation för vinkeln v.

d) Genom att skriva upp uttrycket för sinus av vinkeln v (motstående katet dividerat med hypotenusan) får vi en trigonometrisk ekvation där v är den enda obekanta,

$$\sin v = \frac{3}{5}.$$



e) Uppgiften är lite av en kuggfråga eftersom det inte behövs någon trigonometri för att lösa den.

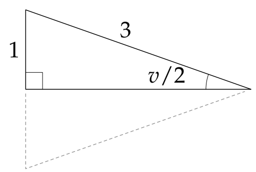
Två vinklar är givna i triangeln (60° -vinkeln och den räta vinkeln) och då kan vi använda att summan av alla vinklar i en triangel är 180°,

$$v + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

vilket ger att

$$v = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$

f) Eftersom triangeln är likbent (två sidor är lika långa) kan den delas upp i två lika stora rätvinkliga trianglar genom att införa en sida som delar vinkeln v mittuti.

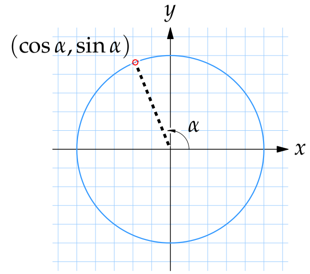


Betraktar vi den ena triangelhalvan kan vi ställa upp det trigonometriska sambandet

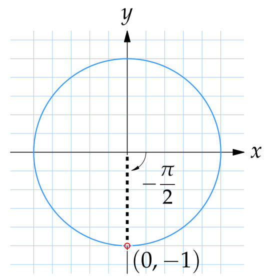
$$\sin\frac{v}{2} = \frac{1}{3},$$

som är en ekvation för v.

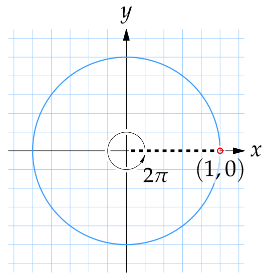
4.2:3 a) En användbar teknik för att räkna ut värdet på en trigonometrisk funktion för vinklar som inte ligger mellan 0 och $\pi/2$ är att använda enhetscirkeln. Ritar vi in en linje som utgår från origo och bildar en viss vinkel relativt den positiva delen av x-axeln så kan vi läsa av cos-värdet av vinkeln som x-koordinaten för skärningspunkten mellan linjen och enhetscirkeln. På samma sätt är sin-värdet av vinkeln y-koordinaten för skärningspunkten.



I detta fall går det direkt att avläsa att $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.



b) Vinkeln 2π motsvarar ett helt varv och därför ser vi att om vi ritar in linjen med vinkeln 2π relativt den positiva x-axeln så får vi den positiva x-axeln.



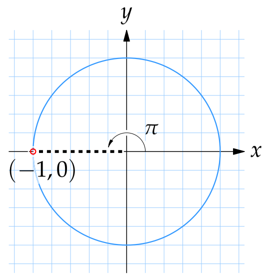
Eftersom $\cos 2\pi$ är x-koordinaten för skärningspunkten mellan linjen med vinkeln 2π och enhetscirkeln så kan vi direkt avläsa att $\cos 2\pi = 1$.

c) Utan att förändra värdet på sinusfunktionen kan vi lägga till och dra ifrån multipler av 2π till dess argument. Vinkeln 2π svarar nämligen mot ett helt varv i enhetscirkeln och sinusfunktionen återkommer till samma värde för varje helt varvs förändring av vinkeln.

Exempelvis kan vi dra ifrån tillräckligt många 2π från 9π så att vi får ett mer hanterbart argument som ligger mellan 0 och 2π,

$$\sin 9\pi = \sin(9\pi - 2\pi - 2\pi - 2\pi - 2\pi) = \sin \pi.$$

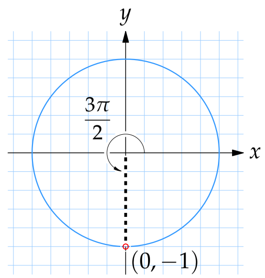
Linjen som bildar vinkeln π mot den positiva delen av x-axeln är den negativa delen av x-axeln och den skär enhetscirkeln i punkten $(-1, 0)$ varför vi från y-koordinaten kan avläsa att $\sin 9\pi = \sin \pi = 0$.



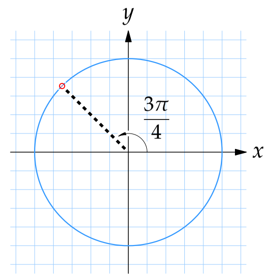
d) För att få en vinkel mellan 0 och 2π subtraherar vi 2π från vinkeln $7\pi/2$, vilket också lämnar cosinusvärdet oförändrat,

$$\cos\frac{7\pi}{2} = \cos\Bigl(\frac{7\pi}{2} - 2\pi\Bigr) = \cos\frac{3\pi}{2}.$$

När vi ritar upp linjen som bildar vinkeln $3\pi/2$ mot den positiva x-axeln får vi den negativa y-axeln och ser att denna linje skär enhetscirkeln i punkten $(0, -1)$. Alltså är skärningspunktens x-koordinat lika med 0 och därmed är $\cos(7\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0$.

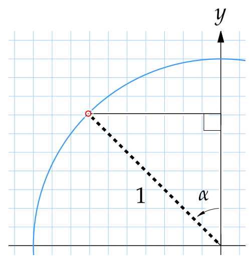


e) Om vi ritar upp linjen som har vinkeln $3\pi/4$ relativt den positiva x-axeln så skär den enhetscirkeln i den andra kvadranten.

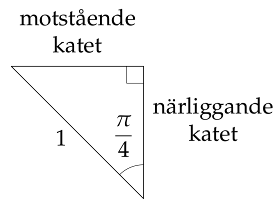


Vad figuren vid första påsyn ger information om är vilka tecken som $\cos(3\pi/4)$ och $\sin(3\pi/4)$ har: cosinus, som är x-koordinaten för skärningspunkten, är negativ och sinus, som är y-koordinaten, är positiv.

För att komma vidare och bestämma skärningspunktens koordinater koncentrerar vi oss på den andra kvadranten och inför där en hjälptriangel som har vinkellinjen som hypotenusa och övriga kanter parallella med koordinataxlarna.



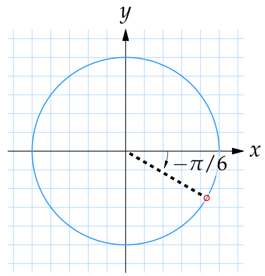
I denna triangel ser vi att vinkeln α mellan hypotenusan och y-axeln är den del av vinkeln $3\pi/4$ som ligger i den andra kvadranten, dvs. $\alpha = 3\pi/4 - \pi/2 = \pi/4$. Med hjälp av trigonometri kan vi nu bestämma triangelns kanter,



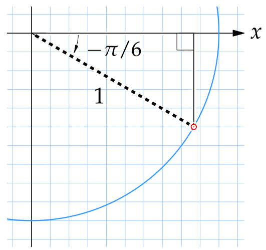
$$\text{motstående katet} = 1\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\text{närliggande katet} = 1\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Detta visar att skärningspunkten har koordinaterna $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ (notera minustecknet i x-koordinaten) och därmed att $\sin(3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

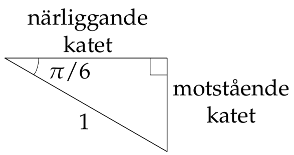
f) Den punkt på enhetscirkeln som svarar mot vinkeln $-\pi/6$ ligger i den fjärde kvadranten.



Som vanligt ges $\cos(-\pi/6)$ som x-koordinaten för skärningspunkten mellan vinkellinjen och enhetscirkeln. För att bestämma denna punkt inför vi en hjälptriangel i den fjärde kvadranten.



Kanterna i denna triangel kan vi bestämma med enkel trigonometri och sedan översätta till punktens koordinater.



$$\text{motstående katet} = 1 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\text{närliggande katet} = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

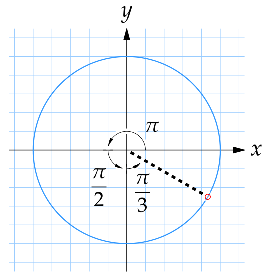
Alltså har skärningspunkten koordinaterna $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ och speciellt är $\cos(-\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

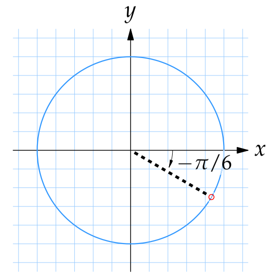
4.2:4 a) Det kan vara lite svårt att direkt rita in vinkeln $11\pi/6$ i enhetscirkeln, men om vi skriver om $11\pi/6$ som

$$\frac{11\pi}{6} = \frac{6\pi + 3\pi + 2\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$$

så ser vi att vi har en vinkel som ligger i fjärde kvadranten enligt figuren nere till vänster. Vi lägger också märke till att denna vinkel svarar mot exakt samma punkt på enhetscirkeln som vinkeln $-\pi/6$, och eftersom vi räknade ut $\cos(-\pi/6)$ i uppgift 4.2:3f har vi att

$$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\Bigl(-\frac{\pi}{6}\Bigr) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$





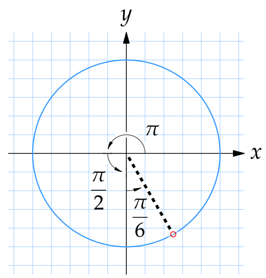
b) Vi börjar med att subtrahera 2π från $11\pi/3$ så vi får en vinkel mellan 0 och 2π. Detta förändrar inte heller cosinusvärdet,

$$\cos\frac{11\pi}{3} = \cos\Bigl(\frac{11\pi}{3} - 2\pi\Bigr) = \cos\frac{5\pi}{3}.$$

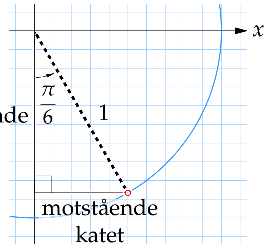
Genom att sedan skriva om $5\pi/3$ som en summa av π- och $\pi/2$-termer,

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi + \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6},$$

så ser vi att $5\pi/3$ är en vinkel i fjärde kvadranten som bildar vinkeln $\pi/6$ mot den negativa y-axeln.



Med hjälp av en triangel och lite trigonometri kan vi bestämma koordinaterna för punkten på enhetscirkeln som svarar mot vinkeln $5\pi/3$.



$$\begin{matrix}\text{motstående}\\ \text{katet}\end{matrix} = 1 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{matrix}\text{närliggande}\\ \text{katet}\end{matrix} = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Punkten har koordinaterna $(1/2, -\sqrt{3}/2)$ och därmed är $\cos(11\pi/3) = \cos(5\pi/3) = \frac{1}{2}$.

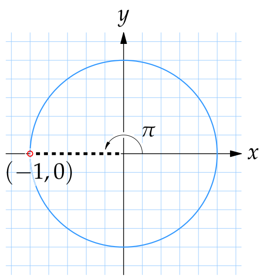
c) I uppgift 4.2:3e studerade vi vinkeln $3\pi/4$ och kom fram till att

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Eftersom $\tan x$ är definierat som $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ så får vi direkt att

$$\tan\frac{3\pi}{4} = \frac{\sin\dfrac{3\pi}{4}}{\cos\dfrac{3\pi}{4}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = -1.$$

d) Använder vi enhetscirkeln och markerar vinkeln π så avläser vi direkt att $\cos\pi = -1$ och $\sin\pi = 0$.



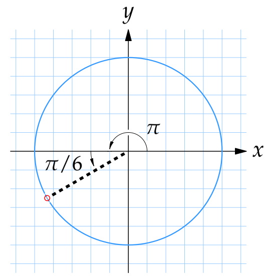
Därmed får vi att

$$\tan\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0.$$

e) Skriver vi vinkeln $7\pi/6$ som

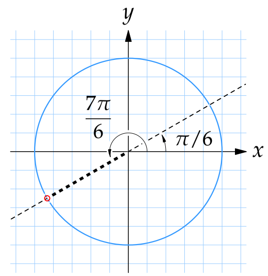
$$\frac{7\pi}{6} = \frac{6\pi+\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$$

så ser vi att vinkeln $7\pi/6$ på enhetscirkeln hamnar i den tredje kvadranten och bildar vinkeln $\pi/6$ med den negativa x-axeln.



Geometriskt definieras $\tan(7\pi/6)$ som riktningskoefficienten för linjen med vinkeln $7\pi/6$ och eftersom denna linje har samma lutning som linjen med vinkeln $\pi/6$ har vi att

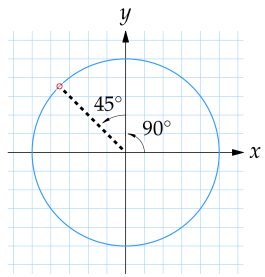
$$\tan\frac{7\pi}{6} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{\cos\dfrac{\pi}{6}} = \frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



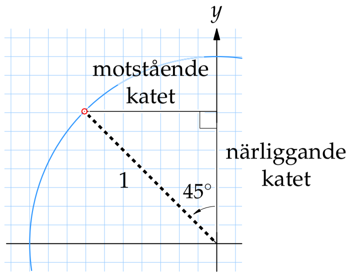
f) Adderar vi 2π till $-5\pi/3$ så får vi en ny vinkel i den första kvadranten som svarar mot exakt samma punkt på enhetscirkeln som den gamla vinkeln $-5\pi/3$ och har följdaktligen samma tangensvärde,

$$\tan\Bigl(-\frac{5\pi}{3}\Bigr) = \tan\Bigl(-\frac{5\pi}{3} + 2\pi\Bigr) = \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{\cos\dfrac{\pi}{3}} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

4.2:5 a) Eftersom $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$ så är 135° en vinkel i den andra kvadranten som bildar vinkeln 45° med den positiva y-axeln.



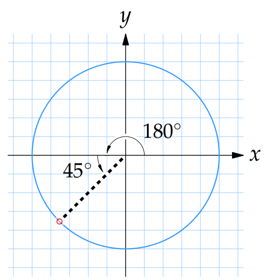
Punkten på enhetscirkeln som svarar mot vinkeln 135° kan vi bestämma genom att införa en hjälptriangel och räkna ut dess kanter med trigonometri,



$$\text{motstående katet} = 1 \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\text{närliggande katet} = 1 \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Koordinaterna för punkten är $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ och detta ger att $\cos 135^\circ = -1/\sqrt{2}$.

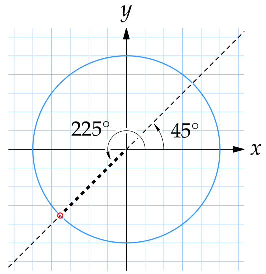
b) Ritar vi in vinkeln $225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$ i enhetscirkeln så bildar den vinkeln 45° med den negativa x-axeln.



Det innebär att $\tan 225^\circ$, som är riktningskoefficienten för linjen som bildar vinkeln 225° med den positiva x-axeln, är lika med $\tan 45^\circ$ eftersom

linjen som bildar vinkeln 45° har samma lutning,

$$\tan 225^\circ = \tan 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = 1.$$



c) Uttrycker vi vinkeln 330° i radianer så får vi att

$$330^\circ = 330^\circ \cdot \frac{\pi}{180}\,\text{radianer} = \frac{11\pi}{6}\,\text{radianer},$$

och från uppgift 4.2:4a vet vi att

$$\cos 330^\circ = \cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

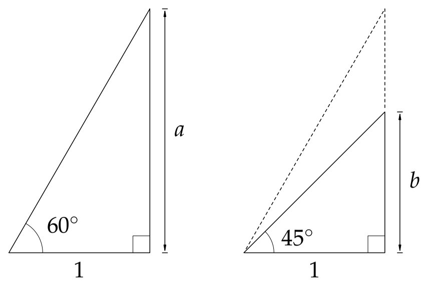
d) Genom att subtrahera 360° från vinkeln 495° förändrar vi inte värdet på tangens,

$$\tan 495^\circ = \tan(495^\circ - 360^\circ) = \tan 135^\circ.$$

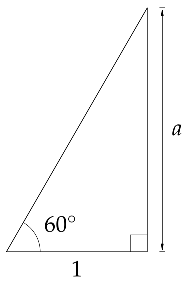
Nu vet vi från deluppgift a att $\cos 135^\circ = -1/\sqrt{2}$ och $\sin 135^\circ = 1/\sqrt{2}$ vilket ger att

$$\tan 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = -1.$$

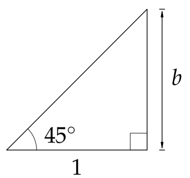
4.2:6 Den eftersökta sträckan kan vi räkna ut genom att ta differensen $a-b$ av kateterna a och b i trianglarna nedan.



Tar vi tangens av den givna vinkeln i respektive triangel får vi enkelt ut a och b,



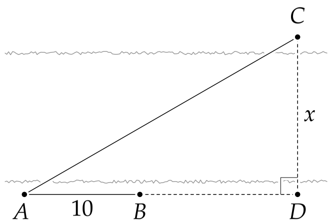
$$a = 1\cdot\tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3},$$



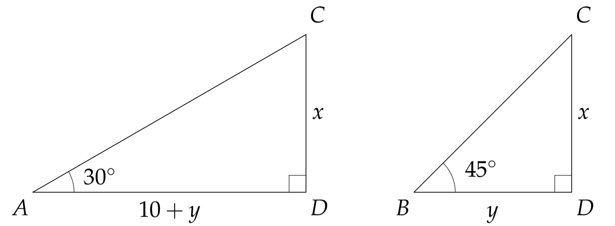
$$b = 1\cdot\tan 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1.$$

Alltså är $x = a - b = \sqrt{3}-1$.

4.2:7 Om vi förlänger sträckan mellan A och B till en punkt D mittemot punkten C så får vi den rätvinkliga triangeln nedan där kateten x mellan C och D är det sökta avståndet.



Informationen i uppgiftstexten kan sammanfattas genom att betrakta de två trianglarna ACD och BCD, och ställa upp tangenssambanden som vinklarna 30° och 45° ger upphov till,



$$x = (10+y)\tan 30^\circ = (10+y)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad x = y\tan 45^\circ = y\cdot 1,$$

där y är avståndet mellan B och D.

Det andra sambandet ovan ger att $y = x$ och detta insatt i det första sambandet ger att

$$x = (10+x)\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Multiplicera båda led med $\sqrt{3}$,

$$\sqrt{3}x = 10 + x,$$

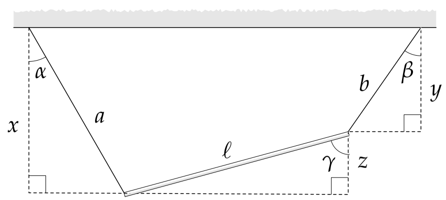
och flytta över alla x-termer i vänsterledet,

$$(\sqrt{3}-1)x = 10.$$

Svaret blir att

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}-1}\ \text{m} \approx 13{,}7\ \text{m}.$$

4.2:8 Vi börjar med att rita upp tre hjälptrianglar, och kallar de tre vertikala kateterna för x, y och z enligt figuren.



Använder vi definitionen av cosinus kan vi räkna ut kateterna x och y,

$$x = a\cos\alpha,$$
$$y = b\cos\beta,$$

och av samma skäl vet vi att z uppfyller sambandet

$$z = \ell\cos\gamma.$$

Dessutom vet vi att längderna x, y och z uppfyller likheten

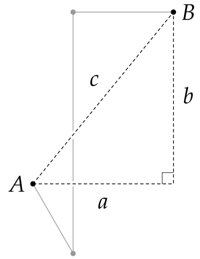
$$z = x - y.$$

Stoppar vi in uttrycken för x, y och z så får vi den trigonometriska ekvationen

$$\ell\cos\gamma = a\cos\alpha - b\cos\beta,$$

där endast γ är obekant.

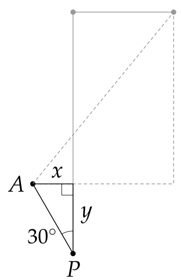
4.2:9 Om vi inför den streckade triangeln nedan så är fågelavståndet mellan A och B lika med triangelns hypotenusa c.



Ett sätt att bestämma hypotenusan är om vi känner till triangelns kateter a och b, för då ger Pythagoras sats att

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Kateterna, i sin tur, kan vi bestämma genom att införa ytterligare en triangel APR, där R är den punkt på linjen PQ där den streckade triangelns katet skär linjen.

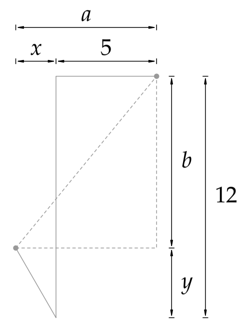


Eftersom vi känner till sträckan AP och vinkeln vid P ger enkel trigonometri att den nya triangelns kateter x och y ges av

$$x = 4\sin 30^\circ = 4\cdot\tfrac{1}{2} = 2,$$
$$y = 4\cos 30^\circ = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Nu kan vi börja nysta upp lösningen. I och med att x och y är framräknade så kan vi bestämma a och b genom att betrakta horisontella och vertikala avstånd i figuren,

$$a = x + 5 = 2 + 5 = 7,$$
$$b = 12 - y = 12 - 2\sqrt{3}.$$

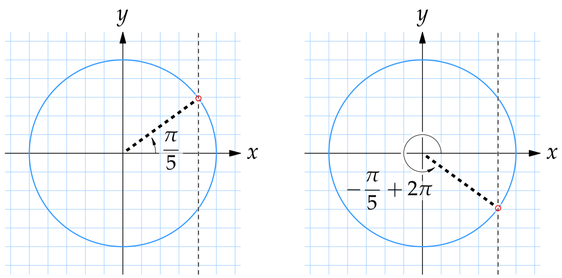


Med a och b givna ger Pythagoras sats att

$$\begin{aligned} c = \sqrt{a^2+b^2} &= \sqrt{7^2 + (12-2\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{49 + (12^2 - 2\cdot 12\cdot 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3}\,)^2)} \\ &= \sqrt{205 - 48\sqrt{3}}\ \text{km} \\ &\approx 11{,}0\ \text{km}. \end{aligned}$$

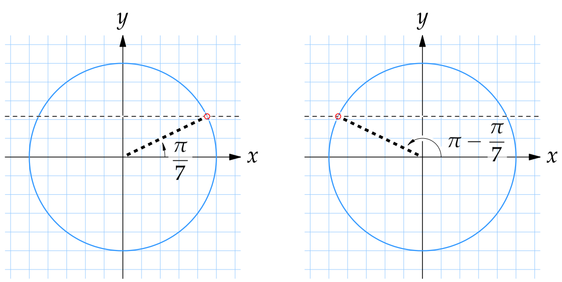
4.3 Trigonometriska samband

4.3:1 a) Om vi ritar ut vinkeln $\pi/5$ i enhetscirkeln så har den en x-koordinat som är lika med $\cos(\pi/5)$.



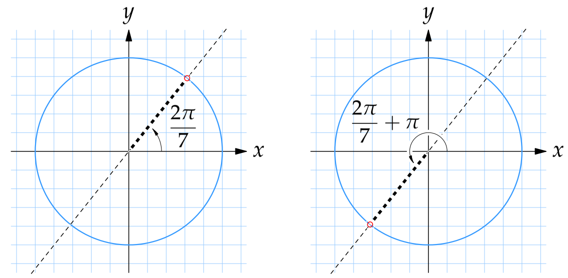
I figuren ser vi också att den enda andra vinkel i enhetscirkeln som har samma cosinusvärde (dvs. samma x-koordinat) är vinkeln $v = -\pi/5$ på motsatt sida om x-axeln. För att få denna vinkels riktning uttryckt med en vinkel mellan 0 och 2π adderar vi 2π, dvs. vi får vinkeln $v = -\pi/5 + 2\pi = 9\pi/5$.

b) Eftersom sinusvärdet för en vinkel är lika med vinkelns y-koordinat i enhetscirkeln så har två vinklar samma sinusvärde bara när de har samma y-koordinat. Ritar vi därför in vinkeln $\pi/7$ i enhetscirkeln så ser vi att den enda vinkel mellan $\pi/2$ och 2π som har samma sinusvärde finns i den andra kvadranten där linjen $y = \sin \pi/7$ skär enhetscirkeln.



Av symmetriskäl har vi att denna vinkel är spegelbilden av vinkeln $\pi/7$ i y-axeln, dvs. bildar vinkeln $-\pi/7$ med den negativa x-axeln och är därför $v = \pi - \pi/7 = 6\pi/7$.

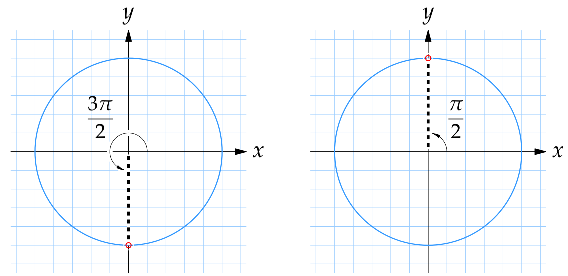
c) Tangensvärdet av vinkeln $2\pi/7$ är riktningskoefficienten av linjen som bildar vinkeln $2\pi/7$ med x-axeln.



Från figuren ser vi att den vinkel mellan $\pi/2$ och 2π som ger en linje med samma lutning som vinkeln $2\pi/7$ är

$$v = \frac{2\pi}{7} + \pi = \frac{9\pi}{7}.$$

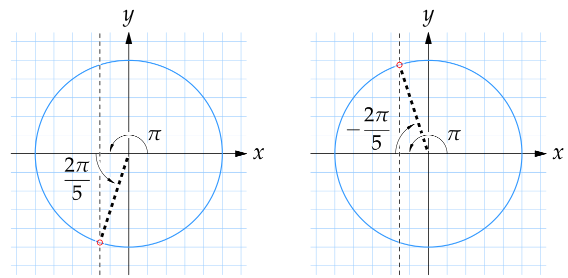
4.3:2 a) I enhetscirkeln svarar vinkeln $3\pi/2$ mot punkten $(0,-1)$ och den vinkel i intervallet från 0 till π som har samma cosinusvärde som $3\pi/2$, dvs. x-koordinat 0, är vinkeln $v = \pi/2$.



b) Skriver vi vinkeln $7\pi/5$ som

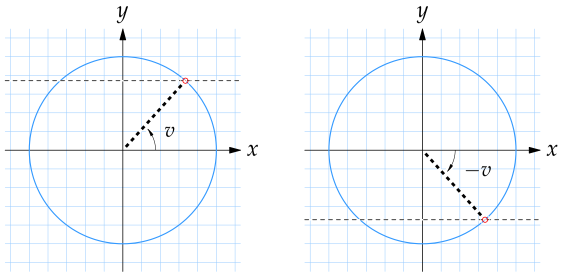
$$\frac{7\pi}{5} = \frac{5\pi+2\pi}{5} = \pi + \frac{2\pi}{5}$$

så ser vi att $7\pi/5$ är en vinkel i tredje kvadranten.

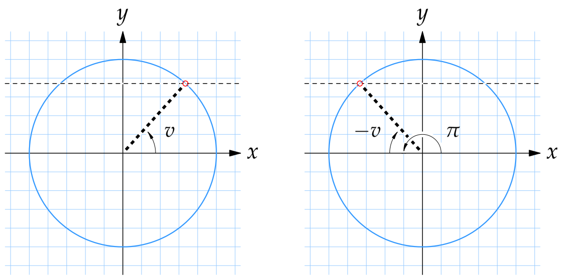


Den vinkel mellan 0 och π som har samma x-koordinat som vinkeln $7\pi/5$, och därmed samma cosinusvärde, är spegelbilden av vinkeln $7\pi/5$ i x-axeln, dvs. $v = \pi - 2\pi/5 = 3\pi/5$.

4.3:3 a) Vinkeln $-v$ är spegelbilden av vinkeln v i x-axeln och vid en sådan spegling förändras inte x-koordinaten medan y-koordinaten byter tecken. Det betyder att om $\sin v = a$ så är $\sin(-v) = -a$.



b) Vinkeln $\pi - v$ bildar samma vinkel med den negativa x-axeln som vinkeln v bildar mot den positiva x-axeln och det betyder att $\pi - v$ är spegelbilden av v i y-axeln.



Vid en sådan spegling förändras inte vinkelns y-koordinat (medan x-koordinaten byter tecken) och därför är $\sin(\pi - v) = \sin v = a$.

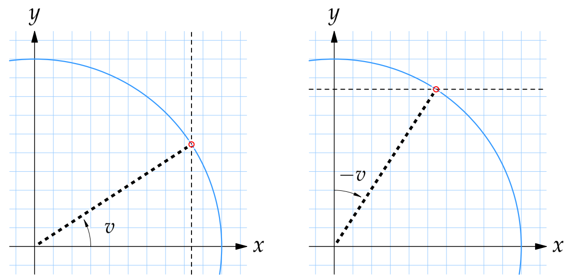
c) Med hjälp av den trigonometriska ettan kan vi uttrycka $\cos v$ i termer av $\sin v$,

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos v = \pm\sqrt{1 - \sin^2 v}.$$

Dessutom vet vi att vinkeln v ligger mellan $-\pi/2$ och $\pi/2$, dvs. antingen i den första eller fjärde kvadranten, och där har vinklar alltid positiv x-koordinat (cosinusvärde) så därför kan vi dra slutsatsen att

$$\cos v = \sqrt{1 - \sin^2 v} = \sqrt{1 - a^2}.$$

d) Vinkeluttrycket $\pi/2 - v$ skiljer sig från $\pi/2$ lika mycket som $-v$ skiljer sig från 0. Detta innebär att $\pi/2 - v$ bildar samma vinkel mot den positiva y-axeln som $-v$ bildar mot den positiva x-axeln.



Vinkeln $\pi/2 - v$ har därför en y-koordinat som är lika med x-koordinaten för vinkeln v, dvs.

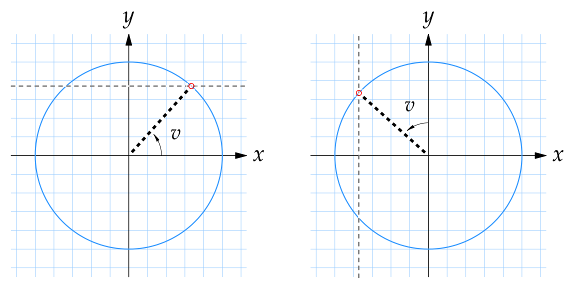
$$\sin\Bigl(\frac{\pi}{2} - v\Bigr) = \cos v,$$

och från deluppgift c vet vi att $\cos v = \sqrt{1 - a^2}$. Därför är

$$\sin\Bigl(\frac{\pi}{2} - v\Bigr) = \sqrt{1 - a^2}.$$

e) Vinkeln $\pi/2 + v$ bildar samma vinkel mot den positiva y-axeln som vinkeln v bildar mot den positiva x-axeln och därmed ser vi att x-koordinaten för $\pi/2 + v$ är lika med y-koordinaten för v med ombytt tecken, dvs.

$$\cos\Bigl(\frac{\pi}{2} + v\Bigr) = -\sin v = -a.$$



f) I detta fall är det nog enklast att använda additionsformeln för sinus,

$$\sin\Bigl(\frac{\pi}{3} + v\Bigr) = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos v + \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin v.$$

Eftersom $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin v = a$ och $\cos v = \sqrt{1-a^2}$ så kan detta skrivas som

$$\sin\Big(\frac{\pi}{3}+v\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-a^2}+\tfrac{1}{2}a.$$

4.3:4 a) Den trigonometriska ettan ger oss direkt att

$$\sin^2 v = 1-\cos^2 v = 1-b^2.$$

b) Använder vi återigen den trigonometriska ettan har vi att

$$\cos^2 v+\sin^2 v = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \sin v = \pm\sqrt{1-\cos^2 v}.$$

Eftersom vinkeln v ligger mellan 0 och π är $\sin v$ positiv (en vinkel i den första eller andra kvadranten har positiv y-koordinat) och därför är

$$\sin v = \sqrt{1-\cos^2 v} = \sqrt{1-b^2}.$$

c) Formeln för dubbla vinkeln ger att

$$\sin 2v = 2\sin v\cos v,$$

och från deluppgift b har vi att $\sin v = \sqrt{1-b^2}$. Alltså är

$$\sin 2v = 2b\sqrt{1-b^2}.$$

d) Med formeln för dubbla vinkeln och den trigonometriska ettan kan vi uttrycka $\cos 2v$ i termer av $\cos v$,

$$\begin{aligned}\cos 2v &= \cos^2 v-\sin^2 v = \cos^2 v-(1-\cos^2 v)\\ &= 2\cos^2 v-1 = 2b^2-1.\end{aligned}$$

e) Additionsformeln för sinus ger oss att

$$\sin\Big(v+\frac{\pi}{4}\Big) = \sin v\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos v\cdot\sin\frac{\pi}{4}.$$

Eftersom vi från deluppgift b vet vi att $\sin v = \sqrt{1-b^2}$ och sedan använder att $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ så får vi att

$$\sin\Big(v+\frac{\pi}{4}\Big) = \sqrt{1-b^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+b\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

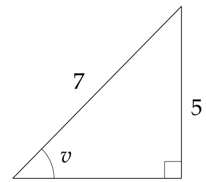
f) Vi använder additionsformeln för cosinus och kan uttrycka $\cos(v-\pi/3)$ i termer av $\cos v$ och $\sin v$,

$$\cos\Big(v-\frac{\pi}{3}\Big) = \cos v\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\sin v\cdot\sin\frac{\pi}{3}.$$

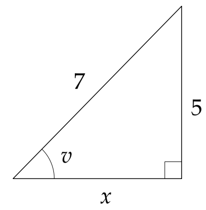
I och med att $\cos v = b$ och $\sin v = \sqrt{1-b^2}$ så ger detta att

$$\cos\Big(v-\frac{\pi}{3}\Big) = b\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{1-b^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.3:5 En ofta använd teknik att beräkna $\cos v$ och $\tan v$, givet sinusvärdet av en spetsig vinkel v, är att rita in vinkeln v i en rätvinklig triangel som har två sidor anpassade så att just $\sin v = \frac{7}{5}$.



Med Pythagoras sats kan vi sedan bestämma längden av den tredje sidan i triangeln,



$$x^2+5^2 = 7^2,$$

vilket ger att

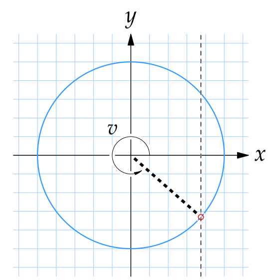
$$x = \sqrt{7^2-5^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Därefter är det bara att använda definitionen av cosinus och tangens,

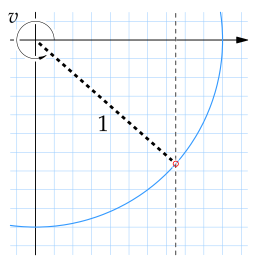
$$\begin{aligned}\cos v &= \frac{x}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{7},\\ \tan v &= \frac{5}{x} = \frac{5}{2\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

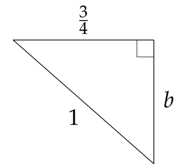
Anm. Notera att den rätvinkliga triangeln som vi använder är ett hjälpmedel och har inget att göra med triangeln som omnämns i uppgiftstexten.

4.3:6 a) Tänker vi på vinkeln v som en vinkel i enhetscirkeln så ligger v i den fjärde kvadranten och har x-koordinat $\frac{3}{4}$.



Förstorar vi upp den fjärde kvadranten så ser vi att vi kan bilda en rätvinklig triangel med hypotenusa 1 och en katet lika med $\frac{3}{4}$.





Med Pythagoras sats går det att bestämma den återstående kateten,

$$b^2 + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = 1^2,$$

vilket ger att

$$b = \sqrt{1 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \tfrac{9}{16}} = \sqrt{\tfrac{7}{16}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{7}.$$

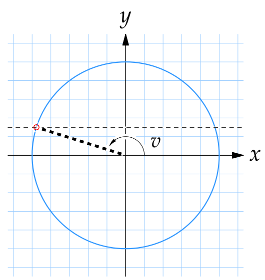
Eftersom vinkeln v tillhör den fjärde kvadranten är dess y-koordinat negativ och därför lika med $-b$, dvs.

$$\sin v = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

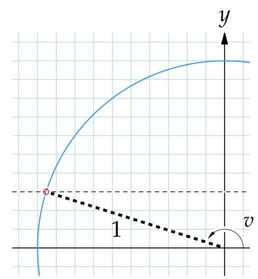
Sedan har vi direkt att

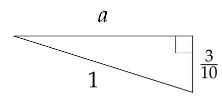
$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{-\sqrt{7}/4}{3/4} = -\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

b) Vi ritar in vinkeln v i enhetscirkeln, och det faktum att $\sin v = \frac{3}{10}$ betyder att dess y-koordinat är lika med $\frac{3}{10}$.



Med den information som är given kan vi definiera en rätvinklig triangel i den andra kvadranten som har hypotenusa 1 och vertikal katet $\frac{3}{10}$.





Triangelns kvarvarande katet, a, kan vi bestämma med Pythagoras sats,

$$a^2 + \left(\tfrac{3}{10}\right)^2 = 1^2,$$

som ger att

$$a = \sqrt{1 - \left(\tfrac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{1 - \tfrac{9}{100}} = \sqrt{\tfrac{91}{100}} = \tfrac{1}{10}\sqrt{91}.$$

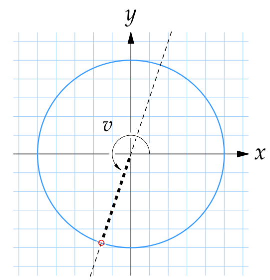
Detta betyder att vinkelns x-koordinat är $-a$, dvs. vi har att

$$\cos v = -\frac{\sqrt{91}}{10},$$

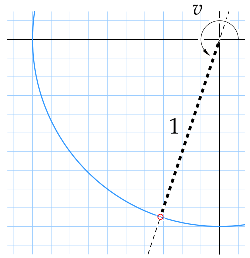
och därmed att

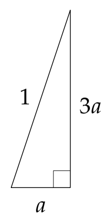
$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{3/10}{-\sqrt{91}/10} = -\frac{3}{\sqrt{91}}.$$

c) Eftersom vinkeln v uppfyller $\pi \le v \le 3\pi/2$ så tillhör v den tredje kvadranten i enhetscirkeln, och vidare ger $\tan v = 3$ att linjen som svarar mot vinkeln v har riktningskoefficient 3.



I den tredje kvadranten kan vi införa en rätvinklig triangel där hypotenusan är 1 och kateterna har förhållandet 3 : 1.





Utnyttjar vi nu Pythagoras sats på triangeln så ser vi att den horisontella kateten a uppfyller
$$a^2+(3a)^2=1^2,$$
vilket ger oss att
$$10a^2=1, \qquad \text{dvs.} \quad a=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$
Därmed är vinkeln v:s x-koordinat $-1/\sqrt{10}$ och y-koordinat $-3/\sqrt{10}$, dvs.
$$\cos v=-\frac{1}{\sqrt{10}},$$
$$\sin v=-\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

4.3:7 a) Uttrycket $\sin(x+y)$ kan vi skriva i termer av $\sin x$, $\cos x$, $\sin y$ och $\cos y$ om vi använder additionsformeln för sinus,
$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y.$$
Faktorerna $\cos x$ och $\cos y$ går i sin tur att uttrycka i $\sin x$ och $\sin y$ med hjälp av den trigonometriska ettan,
$$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}=\pm\sqrt{1-\left(\tfrac{2}{3}\right)^2}=\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{5},$$
$$\cos y=\pm\sqrt{1-\sin^2 y}=\pm\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{3}\right)^2}=\pm\tfrac{2}{3}\sqrt{2}.$$
Eftersom x och y är vinklar i den första kvadranten är $\cos x$ och $\cos y$ positiva, så vi har i själva verket att
$$\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{och} \quad \cos y=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$
Sammanlagt får vi
$$\sin(x+y)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}.$$

b) Vi skriver om $\sin(x+y)$ med additionsformeln,
$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y.$$
Om vi använder samma lösningsförfarande som i a-uppgiften använder vi sedan den trigonometriska ettan för att uttrycka de obekanta faktorerna $\sin x$ och $\sin y$ i termer av $\cos x$ och $\cos y$,
$$\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}=\pm\sqrt{1-\left(\tfrac{2}{5}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\tfrac{4}{25}}=\pm\tfrac{1}{5}\sqrt{21},$$
$$\sin y=\pm\sqrt{1-\cos^2 y}=\pm\sqrt{1-\left(\tfrac{3}{5}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\tfrac{9}{25}}=\pm\tfrac{4}{5}.$$
Vinklarna x och y ligger i den första kvadranten och därför är både $\sin x$ och $\sin y$ positiva, dvs.
$$\sin x=\frac{\sqrt{21}}{5} \quad \text{och} \quad \sin y=\frac{4}{5}.$$
Svaret blir således
$$\sin(x+y)=\frac{\sqrt{21}}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\sqrt{21}+8}{25}.$$

4.3:8 a) Vi skriver om $\tan v$ i vänsterledet som $\dfrac{\sin v}{\cos v}$, och får
$$\tan^2 v=\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}.$$
Om vi sedan använder den trigonometriska ettan,
$$\cos^2 v+\sin^2 v=1,$$
och skriver om $\cos^2 v$ i nämnaren som $1-\sin^2 v$ så får vi det eftersökta högerledet. Hela uträkningen blir
$$\tan^2 v=\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}=\frac{\sin^2 v}{1-\sin^2 v}.$$

b) Eftersom $\tan v=\sin v/\cos v$ kan vänsterledet skrivas med $\cos v$ som gemensam nämnare,
$$\frac{1}{\cos v}-\tan v=\frac{1}{\cos v}-\frac{\sin v}{\cos v}=\frac{1-\sin v}{\cos v}.$$
Nu observerar vi att om vi förlänger med $1+\sin v$ så kommer nämnaren innehålla högerledets nämnare som faktor och dessutom kan täljaren

förenklas med konjugatregeln till $1-\sin^2 v = \cos^2 v$, dvs.

$$\begin{aligned}\frac{1-\sin v}{\cos v} &= \frac{1-\sin v}{\cos v}\cdot\frac{1+\sin v}{1+\sin v}\\ &= \frac{1-\sin^2 v}{\cos v(1+\sin v)}\\ &= \frac{\cos^2 v}{\cos v(1+\sin v)}.\end{aligned}$$

Förkorta sedan bort $\cos v$ och vi får svaret

$$\frac{\cos^2 v}{\cos v(1+\sin v)} = \frac{\cos v}{1+\sin v}.$$

c) Man skulle kunna skriva $\tan(u/2)$ som en kvot mellan sinus och cosinus, och sedan fortsätta med formeln för halva vinkeln,

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{\sin\dfrac{u}{2}}{\cos\dfrac{u}{2}} = \cdots,$$

men eftersom detta leder till kvadratrötter och besvär med att hålla reda på rätt tecken framför rötterna så kanske det är enklare att istället gå baklänges och arbeta med högerledet.

Vi skriver u som $2\cdot(u/2)$ och använder formeln för dubbla vinkeln, (detta för att vi i slutänden vill nå högerledet som har $u/2$ som argument,)

$$\frac{\sin u}{1+\cos u} = \frac{\sin\Bigl(2\cdot\dfrac{u}{2}\Bigr)}{1+\cos\Bigl(2\cdot\dfrac{u}{2}\Bigr)} = \frac{2\cos\dfrac{u}{2}\sin\dfrac{u}{2}}{1+\cos^2\dfrac{u}{2}-\sin^2\dfrac{u}{2}}.$$

Skriv sedan talet 1 i nämnaren som $\cos^2(u/2)+\sin^2(u/2)$ med den trigonometriska ettan,

$$\begin{aligned}\frac{2\cos\dfrac{u}{2}\sin\dfrac{u}{2}}{1+\cos^2\dfrac{u}{2}-\sin^2\dfrac{u}{2}} &= \frac{2\cos\dfrac{u}{2}\sin\dfrac{u}{2}}{\cos^2\dfrac{u}{2}+\sin^2\dfrac{u}{2}+\cos^2\dfrac{u}{2}-\sin^2\dfrac{u}{2}}\\ &= \frac{2\cos\dfrac{u}{2}\sin\dfrac{u}{2}}{2\cos^2\dfrac{u}{2}} = \frac{\sin\dfrac{u}{2}}{\cos\dfrac{u}{2}} = \tan\frac{u}{2}.\end{aligned}$$

d) Det verkar naturligt att försöka använda additionsformeln på vänsterledets täljare,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(u+v)}{\cos u\,\cos v} &= \frac{\cos u\,\cos v-\sin u\,\sin v}{\cos u\,\cos v}\\ &= 1-\frac{\sin u\,\sin v}{\cos u\,\cos v}\\ &= 1-\tan u\,\tan v.\end{aligned}$$

4.3:9 Formeln för dubbla vinkeln på $\sin 160^\circ$ ger att

$$\sin 160^\circ = 2\cos 80^\circ \sin 80^\circ.$$

I högerledet ser vi att faktorn $\cos 80^\circ$ har dykt upp, och använder vi formeln för dubbla vinkeln på den andra faktorn $\sin 80^\circ$,

$$2\cos 80^\circ \sin 80^\circ = 2\cos 80^\circ\cdot 2\cos 40^\circ \sin 40^\circ,$$

så får vi fram ytterligare en faktor $\cos 40^\circ$. En sista användning av formeln för dubbla vinkeln på $\sin 40^\circ$ ger oss alla tre cosinusfaktorer,

$$4\cos 80^\circ \cos 40^\circ \sin 40^\circ = 4\cos 80^\circ \cos 40^\circ\cdot 2\cos 20^\circ \sin 20^\circ.$$

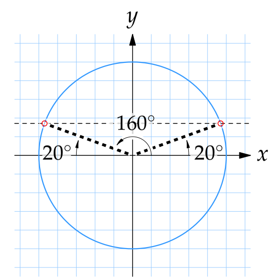
Alltså har vi lyckats visa att

$$\sin 160^\circ = 8\,\cos 80^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\sin 20^\circ,$$

vilket också kan skrivas som

$$\cos 80^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ = \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}.$$

Ritar vi upp enhetscirkeln ser vi att 160° bildar vinkeln 20° mot den negativa x-axeln och därför har vinklarna 20° och 160° samma y-koordinat i enhetscirkeln, dvs. det gäller att $\sin 20^\circ = \sin 160^\circ$.

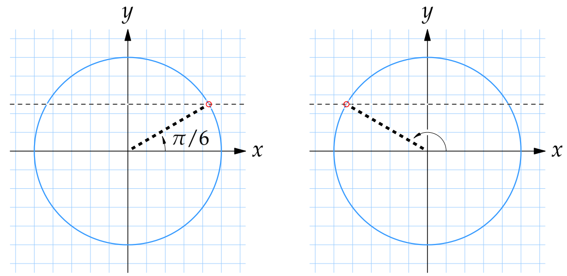


Detta visar att

$$\cos 80^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ = \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

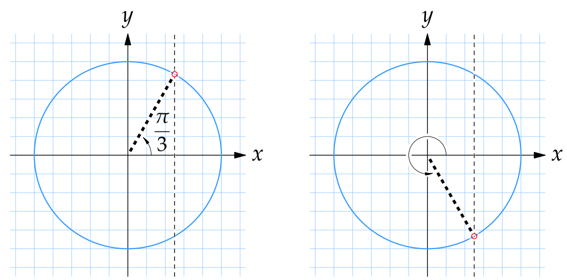
4.4 Trigonometriska ekvationer

4.4:1 a) I enhetscirkelns första kvadrant finns en vinkel med sinusvärdet $\frac{1}{2}$ och det är $v = \pi/6$.



Av figuren ser vi också att det finns ytterligare en vinkel med samma sinusvärde i den andra kvadranten. Den vinkeln bildar av symmetriskäl samma vinkel mot den negativa x-axeln som $v = \pi/6$ bildar mot den positiva x-axeln, dvs. den andra vinkeln är $v = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.

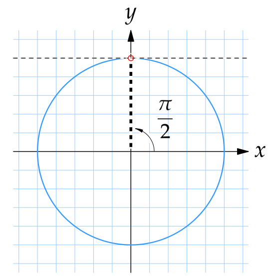
b) Den enklaste vinkeln att komma fram till är $v = \pi/3$ i den första kvadranten. När vi sedan ritar upp enhetscirkeln ser vi att vinkeln som bildar samma vinkel mot den positiva x-axeln som $v = \pi/3$ men är under x-axeln också har cosinusvärdet $\frac{1}{2}$ (samma x-koordinat).



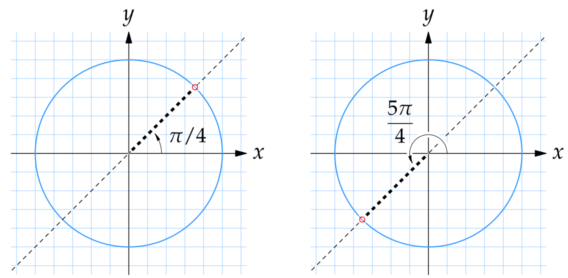
Det finns alltså två riktningar med vinklar $v = \pi/3$ resp. $v = -\pi/3$ i enhetscirkeln med cosinus lika med $\frac{1}{2}$. Eftersom vi ska svara med vinklar mellan 0 och 2π adderar vi 2π till den negativa vinkeln och får svaret $v = \pi/3$ och $v = -\pi/3 + 2\pi = 5\pi/3$.

c) Det finns bara en vinkel mellan 0 och 2π där sinusvärdet är lika med 1

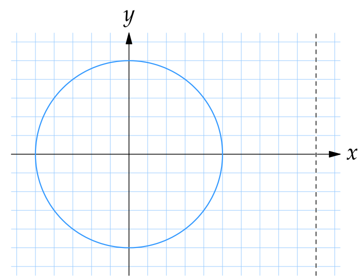
och det är när $v = \pi/2$.



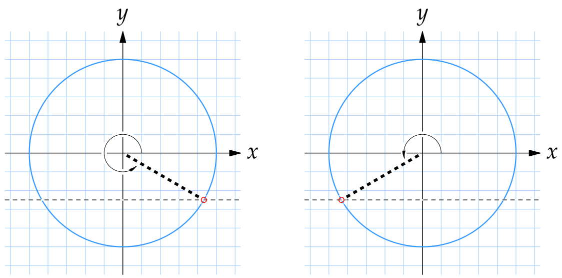
d) Eftersom $\tan v = \sin v/\cos v$ så ger villkoret $\tan v = 1$ att $\sin v = \cos v$, dvs. vi söker vinklar i enhetscirkeln där x- och y-koordinaterna är lika. Efter att ha ritat upp enhetscirkeln och linjen $y = x$ ser vi att det finns två vinklar som uppfyller detta villkor: $v = \pi/4$ och $v = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$.



e) Det finns ingen vinkel v som ger $\cos v = 2$ eftersom cosinusvärdet alltid är begränsat till mellan -1 och 1.

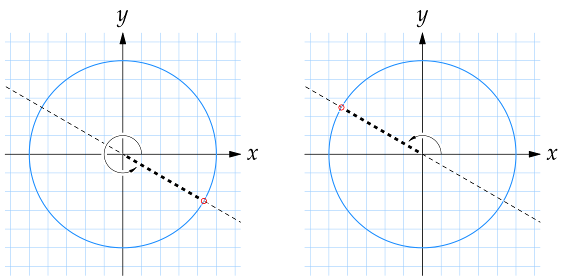


f) Ekvationen $\sin v = -\frac{1}{2}$ kan vi översätta till att vi söker de vinklar i enhetscirkeln med y-koordinat $-\frac{1}{2}$. Jämför vi detta med problemet vi hade i deluppgift a där vi sökte vinklar som uppfyller $\sin v = +\frac{1}{2}$ så är situationen densamma men nu ligger vinklarna spegelsymmetriskt under istället för över x-axeln.

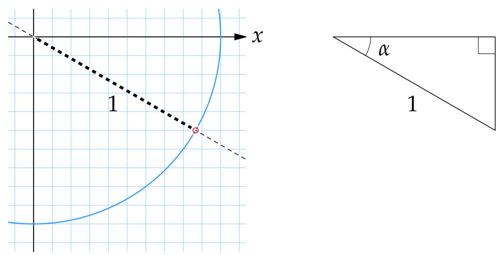


De två vinklar som uppfyller $\sin v = -\frac{1}{2}$ ligger i tredje och fjärde kvadranten och är $v = 2\pi - \pi/6 = 11\pi/6$ och $v = \pi + \pi/6 = 7\pi/6$.

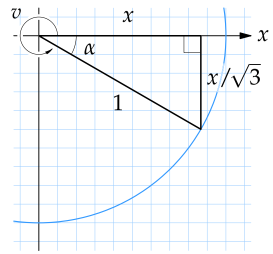
g) En snabb skiss av enhetscirkeln och linjen $y = -x/\sqrt{3}$, som motsvarar tangensvärdet $-1/\sqrt{3}$, visar att det finns två vinklar som uppfyller $\tan v = -1/\sqrt{3}$. En av vinklarna ligger i fjärde kvadranten och den andra vinkeln är den motsatta vinkeln i den andra kvadranten.



Vi kan därför begränsa oss till den fjärde kvadranten och rita in en hjälptriangel för att bestämma vinkeln där.



Om vi kallar den närliggande kateten till vinkeln α för x, då ger det faktum att $\tan v = -1/\sqrt{3}$ att den motstående kateten har längd $x/\sqrt{3}$.



Pythagoras sats ger att

$$x^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1^2,$$

och denna ekvation har lösningen $x = \sqrt{3}/2$, vilket betyder att

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

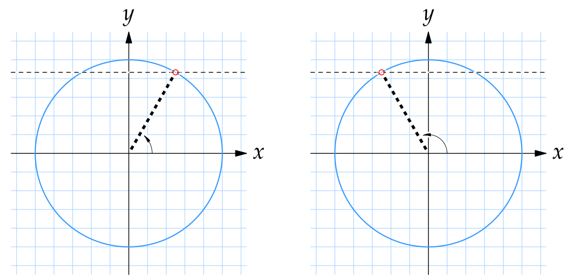
dvs. $\alpha = \pi/6$. Eftersom vinkeln v i fjärde kvadranten är komplementet till α är v lika med

$$v = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

Drar vi ifrån ett halvt varv, vinkeln π, får vi den andra vinkeln,

$$v = \frac{11\pi}{6} - \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

4.4:2 a) Vi ritar upp enhetscirkeln och markerar de vinklar som på cirkeln har y-koordinat $\sqrt{3}/2$ för att se vilka lösningar som finns mellan 0 och 2π.



I den första kvadranten känner vi igen $x = \pi/3$ som den vinkel som har sinusvärdet $\sqrt{3}/2$, och sedan har vi den spegelsymmetriska lösningen $x = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$ i den andra kvadranten.

Var och en av de två lösningarna återkommer sedan varje varv, så den fullständiga lösningen får vi om vi lägger till multiplar av 2π,

$$x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{och} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.

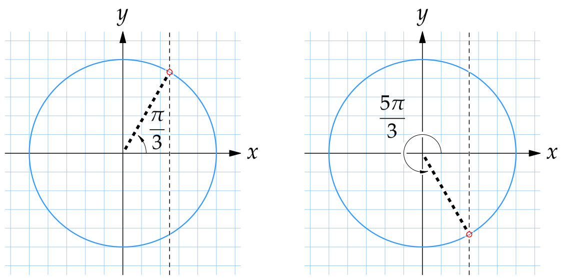
Anm. När vi skriver att den fullständiga lösningen ges av

$$x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{och} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$$

så betyder det att för varje heltalsvärde på n får vi en lösning till ekvationen.

$$\begin{array}{lll} n = \pm 0: & x = \pi/3, & x = 2\pi/3 \\ n = -1: & x = \pi/3 + (-1)\cdot 2\pi, & x = 2\pi/3 + (-1)\cdot 2\pi \\ n = +1: & x = \pi/3 + 1\cdot 2\pi, & x = 2\pi/3 + 1\cdot 2\pi \\ n = -2: & x = \pi/3 + (-2)\cdot 2\pi, & x = 2\pi/3 + (-2)\cdot 2\pi \\ n = +2: & x = \pi/3 + 2\cdot 2\pi, & x = 2\pi/3 + 2\cdot 2\pi \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

b) Ekvationen $\cos x = \frac{1}{2}$ har i första kvadranten lösningen $x = \pi/3$ och sedan den symmetriska lösningen $x = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3$ i den fjärde kvadranten.

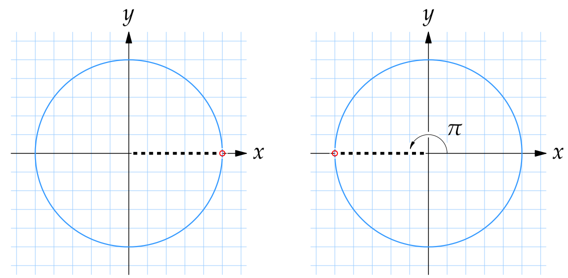


Lägger vi till multipler av 2π till dessa två lösningar så får vi alla lösningar,

$$x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{och} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.

c) Det finns två vinklar, $x = 0$ och $x = \pi$, i enhetscirkeln som har sinusvärdet 0.



Den fullständiga lösningen får vi när vi lägger till multipler av 2π,

$$x = 0 + 2n\pi \quad \text{och} \quad x = \pi + 2n\pi,$$

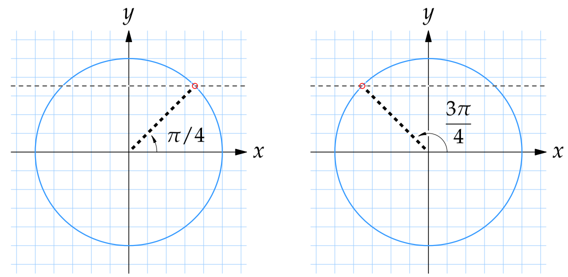
där n är ett godtyckligt heltal.

Anm. Eftersom skillnaden mellan 0 och π är ett halvt varv upprepas lösningarna varje halvvarv och de kan sammanfattas i ett uttryck

$$x = 0 + n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.

d) Förutom att det står $5x$ så har vi en vanlig trigonometrisk grundekvation av typen $\sin y = a$. Om vi bara intresserar oss för lösningar som uppfyller $0 \le 5x \le 2\pi$ så ger en skiss av enhetscirkeln att det finns två sådana lösningar: $5x = \pi/4$ och den spegelsymmetriska lösningen $5x = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$.



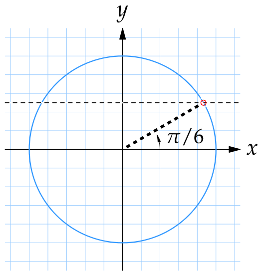
Ekvationens samtliga lösningar fås sedan av alla $5x$ som skiljer sig från någon av dessa två lösningar med en multipel av 2π,

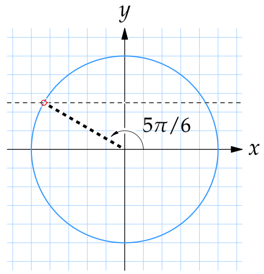
$$5x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{och} \quad 5x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal. Dividerar vi båda led med 5 så får vi lösningarna uttryckta för x ensamt,

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5} \quad \text{och} \quad x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5}, \quad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

e) Detta är nästan exakt samma ekvation som i deluppgift d. Vi bestämmer först lösningarna till ekvationen när $0 \le 5x \le 2\pi$, och enligt enhetscirkeln finns två sådana lösningar: $5x = \pi/6$ och $5x = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.





Resterande lösningar får vi fram genom att lägga till multipler av 2π till ovanstående två lösningar,

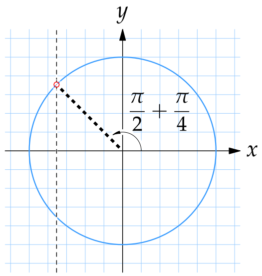
$$5x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{och} \quad 5x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,$$

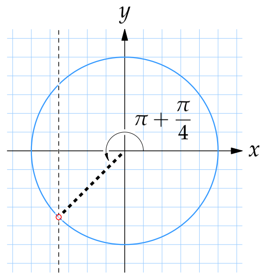
där n är ett godtyckligt heltal, eller om vi dividerar med 5,

$$x = \frac{\pi}{30} + \frac{2n\pi}{5} \quad \text{och} \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{5}, \quad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

f) Enligt enhetscirkeln har ekvationen $\cos 3x = -1/\sqrt{2}$ två lösningar som uppfyller $0 \le 3x \le 2\pi$,

$$3x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad \text{och} \quad 3x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$





De övriga lösningarna får vi genom att lägga till multipler av 2π,

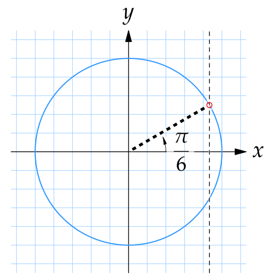
$$3x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{och} \quad 3x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi,$$

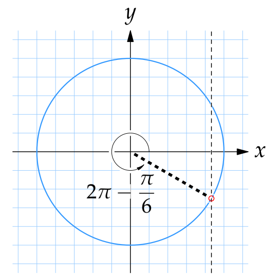
det vill säga

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2n\pi}{3} \quad \text{och} \quad x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3},$$

där n är ett godtyckligt heltal.

4.4:3 a) Högerledet i ekvationen är en konstant så ekvationen är faktiskt en vanlig trigonometrisk grundekvation av typen $\cos x = a$.
I detta fall kan vi direkt se att en lösning är $x = \pi/6$. Därefter följer från enhetscirkeln att $x = 2\pi - \pi/6 = 11\pi/6$ är den enda andra lösningen mellan 0 och 2π.



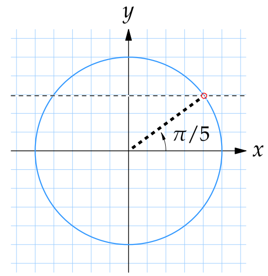


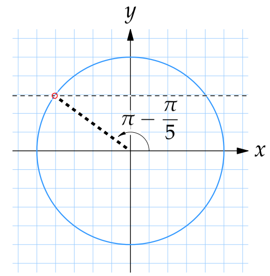
Alla lösningar till ekvationen får vi om vi lägger till multipler av 2π till de två lösningarna ovan,

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{och} \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.

b) Vi ser direkt att $x = \pi/5$ är en lösning till ekvationen, och med enhetscirkeln kan vi också dra slutsatsen att $x = \pi - \pi/5 = 4\pi/5$ är den enda ytterligare lösningen mellan 0 och 2π.



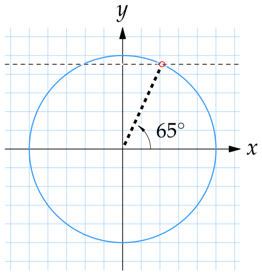


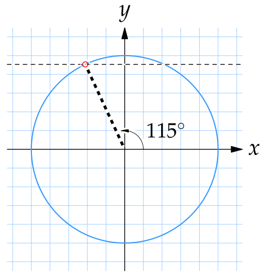
Samtliga lösningar till ekvationen får vi när vi adderar på heltalsmultipler av 2π,

$$x = \frac{\pi}{5} + 2n\pi \quad \text{och} \quad x = \frac{4\pi}{5} + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.

c) Om vi behandlar hela uttrycket $x + 40^\circ$ som en obekant så har vi en trigonometrisk grundekvation och kan med hjälp av enhetscirkeln se att det finns två lösningar till ekvationen för $0^\circ \le x + 40^\circ \le 360^\circ$, nämligen $x + 40^\circ = 65^\circ$ och den symmetriska lösningen $x + 40^\circ = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.





Sedan är det enkelt att ställa upp den allmänna lösningen genom att lägga till multipler av 360°,

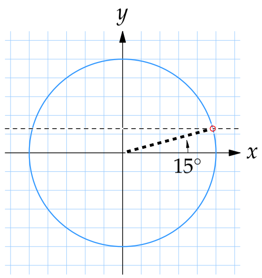
$$x + 40^\circ = 65^\circ + n\cdot 360^\circ \quad \text{och} \quad x + 40^\circ = 115^\circ + n\cdot 360^\circ,$$

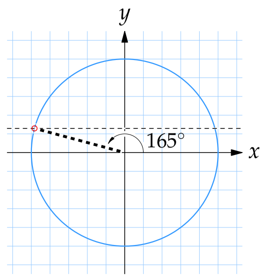
för alla heltal n, vilket ger att

$$x = 25^\circ + n\cdot 360^\circ \quad \text{och} \quad x = 75^\circ + n\cdot 360^\circ.$$

d) Först observerar vi från enhetscirkeln att ekvationen har två lösningar för $0^\circ \le 3x \le 360^\circ$,

$$3x = 15^\circ \quad \text{och} \quad 3x = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ.$$





Detta betyder att ekvationens samtliga lösningar är

$$3x = 15^\circ + n\cdot 360^\circ \quad \text{och} \quad 3x = 165^\circ + n\cdot 360^\circ,$$

för alla heltal n, dvs.

$$x = 5^\circ + n\cdot 120^\circ \quad \text{och} \quad x = 55^\circ + n\cdot 120^\circ.$$

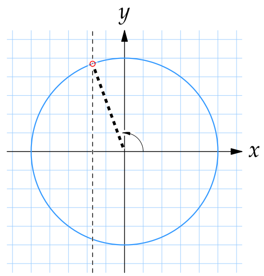
4.4:4 Planen är att vi först tar fram den allmänna lösningen till ekvationen och sedan ser vilka vinklar som ligger mellan 0° och 360°.

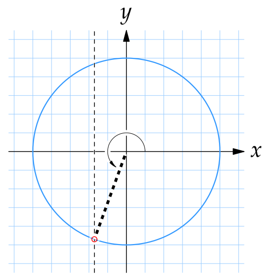
Börjar vi med att betrakta uttrycket $2v + 10^\circ$ som en obekant så har vi en vanlig trigonometrisk grundekvation. En lösning som vi kan se direkt är

$$2v + 10^\circ = 110^\circ.$$

Det finns sedan ytterligare en lösning som uppfyller $0^\circ \le 2v + 10^\circ \le 360^\circ$, nämligen när $2v + 10^\circ$ ligger i den tredje kvadranten och bildar samma vinkel mot den negativa y-axeln som 110° bildar mot den positiva y-axeln, dvs. $2v + 10^\circ$ bildar vinkeln $110^\circ - 90^\circ = 20^\circ$ mot den negativa y-axeln och är följdaktligen

$$2v + 10^\circ = 270^\circ - 20^\circ = 250^\circ.$$





Nu är det enkelt att ställa upp den allmänna lösningen,

$$\begin{cases} 2v + 10^\circ = 110^\circ + n\cdot 360^\circ, \\ 2v + 10^\circ = 250^\circ + n\cdot 360^\circ, \end{cases}$$

där n är ett godtyckligt heltal, och löser vi ut v fås

$$\begin{cases} v = 50^\circ + n\cdot 180^\circ, \\ v = 120^\circ + n\cdot 180^\circ. \end{cases}$$

För lite olika värden på heltalet n ser vi att motsvarande lösningar är:

$$\begin{array}{lll}
\vdots & \vdots & \vdots \\
n=-2: & v = 50^\circ - 2\cdot 180^\circ = -310^\circ, & v = 120^\circ - 2\cdot 180^\circ = -240^\circ \\
n=-1: & v = 50^\circ - 1\cdot 180^\circ = -130^\circ, & v = 120^\circ - 1\cdot 180^\circ = -60^\circ \\
n=\pm 0: & v = 50^\circ + 0\cdot 180^\circ = 50^\circ, & v = 120^\circ + 0\cdot 180^\circ = 120^\circ \\
n=+1: & v = 50^\circ + 1\cdot 180^\circ = 230^\circ, & v = 120^\circ + 1\cdot 180^\circ = 300^\circ \\
n=+2: & v = 50^\circ + 2\cdot 180^\circ = 410^\circ, & v = 120^\circ + 2\cdot 180^\circ = 480^\circ \\
n=+3: & v = 50^\circ + 3\cdot 180^\circ = 590^\circ, & v = 120^\circ + 3\cdot 180^\circ = 660^\circ \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Från tabellen ser vi att de lösningar som finns mellan 0° och 360° är

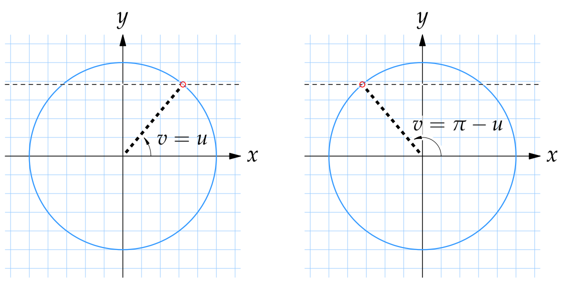
$$v = 50^\circ, \quad v = 120^\circ, \quad v = 230^\circ \quad \text{och} \quad v = 300^\circ.$$

4.4:5 a) Om vi för en stund betraktar likheten

$$\sin u = \sin v, \tag{$*$}$$

där u har ett fixt värde, så finns vanligtvis två vinklar v i enhetscirkeln som gör att likheten är uppfylld,

$$v = u \quad \text{och} \quad v = \pi - u.$$



(De enda undantagen är när $u = \pi/2$ eller $u = 3\pi/2$ då u och $\pi - u$ svarar mot samma riktning och det bara finns en vinkel v som uppfyller likheten.)
Alla vinklar v som uppfyller $(*)$ får vi genom att lägga till multipler av 2π,

$$v = u + 2n\pi \quad \text{och} \quad v = \pi - u + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.
Går vi nu över till vår ekvation,

$$\sin 3x = \sin x,$$

så visar resonemanget ovan att ekvationen bara är uppfylld när

$$3x = x + 2n\pi \quad \text{eller} \quad 3x = \pi - x + 2n\pi.$$

Löser vi ut x ur respektive likhet fås den fullständiga lösningen till ekvationen,

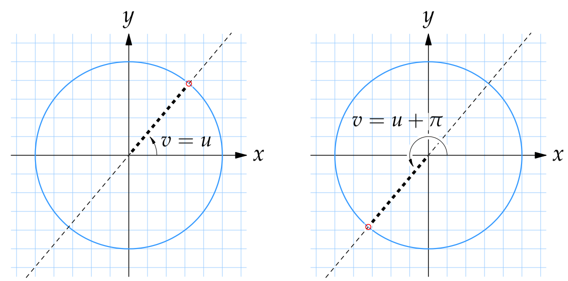
$$\begin{cases} x = 0 + n\pi, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n\pi}{2}, \end{cases} \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

b) Låt oss först undersöka när likheten

$$\tan u = \tan v$$

är uppfylld. Eftersom $\tan u$ kan tolkas som lutningen (riktningskoefficienten) av linjen som bildar vinkeln u med den positiva x-axeln ser vi att för ett fixt värde på $\tan u$ finns två vinklar v i enhetscirkeln med denna lutning,

$$v = u \quad \text{och} \quad v = u + \pi.$$



Vinkeln v upprepar sedan denna lutning varje halvt varv, så om vi lägger till multipler av π till u får vi alla vinklar v som uppfyller likheten,

$$v = u + n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.
Applicerar vi detta resultat på ekvationen

$$\tan x = \tan 4x$$

så ser vi att lösningarna ges av

$$4x = x + n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal, och löser vi ut x ur detta samband fås

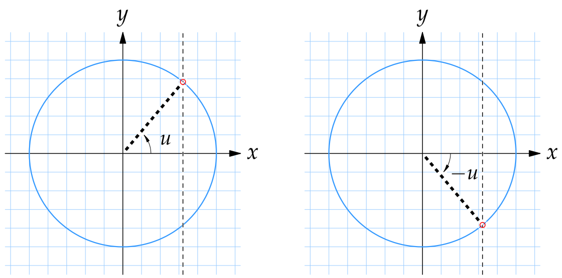
$$x = \frac{n\pi}{3}, \quad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

c) En likhet av typen

$$\cos u = \cos v$$

är för ett fixt värde på u uppfyllt av två vinklar v i enhetscirkeln,

$$v = u \quad \text{och} \quad v = -u.$$



Detta betyder att alla vinklar v som uppfyller likheten är

$$v = u + 2n\pi \quad \text{och} \quad v = -u + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.
Ekvationen $\cos 5x = \cos(x + \pi/5)$ har därför lösningarna

$$\begin{cases} 5x = x + \dfrac{\pi}{5} + 2n\pi, \\ 5x = -x - \dfrac{\pi}{5} + 2n\pi. \end{cases}$$

Samlar vi x ensamt i ena ledet får vi till slut

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{n\pi}{2}, \\ x = -\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{n\pi}{3}, \end{cases} \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

4.4:6 a) Flyttar vi över allt till vänsterledet,

$$\sin x \cos 3x - 2\sin x = 0,$$

så ser vi att båda termerna har $\sin x$ som en gemensam faktor som vi kan bryta ut,

$$\sin x(\cos 3x - 2) = 0.$$

I denna faktoriserade variant av ekvationen ser vi att ekvationen har en lösning endast när någon av faktorerna $\sin x$ eller $\cos 3x - 2$ är noll. Faktorn $\sin x$ är noll för alla x som ges av

$$x = n\pi, \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}),$$

(se uppgift 4.4:2c). Den andra faktorn $\cos 3x - 2$ kan aldrig vara noll eftersom cosinusvärdet alltid ligger mellan -1 och 1, vilket ger att $\cos 3x - 2$ som störst är lika med -1.
Alltså är lösningarna $x = n\pi$.

b) Efter att ha flyttat över termerna i vänsterledet,

$$\sqrt{2}\sin x \cos x - \cos x = 0,$$

ser vi att den gemensamma faktorn $\cos x$ kan brytas ut,

$$\cos x(\sqrt{2}\sin x - 1) = 0,$$

och att ekvationen bara är uppfylld om åtminstone en av faktorerna $\cos x$ eller $\sqrt{2}\sin x - 1$ är noll. Vi har alltså två fall:

$\cos x = 0$: Denna grundekvationen har lösningarna $x = \pi/2$ och $x = 3\pi/2$ i enhetscirkeln och från detta har vi att den allmänna lösningen är

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{och} \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal. Eftersom det skiljer π mellan vinklarna $\pi/2$ och $3\pi/2$ kan lösningarna också sammanfattas som

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

$\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$: Möblerar vi om i ekvationen så får vi grundekvationen $\sin x = 1/\sqrt{2}$ som har lösningarna $x = \pi/4$ och $x = 3\pi/4$ i enhetscirkeln och därmed är den allmänna lösningen

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{och} \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.

Sammantaget har den ursprungliga ekvationen lösningarna

$$\begin{cases} x = \pi/4 + 2n\pi, \\ x = \pi/2 + n\pi, \\ x = 3\pi/4 + 2n\pi, \end{cases} \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

c) Om vi använder det trigonometriska sambandet $\sin(-x) = -\sin x$ så kan ekvationen skrivas som

$$\sin 2x = \sin(-x).$$

I a-uppgiften såg vi att en likhet av typen $\sin u = \sin v$ är uppfylld om

$$u = v + 2n\pi \quad \text{eller} \quad u = \pi - v + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal. Detta får som konsekvens att lösningarna till ekvationen uppfyller

$$2x = -x + 2n\pi \quad \text{eller} \quad 2x = \pi - (-x) + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal, dvs.

$$3x = 2n\pi \quad \text{eller} \quad x = \pi + 2n\pi.$$

Lösningarna till ekvationen är alltså

$$\begin{cases} x = 2n\pi/3, \\ x = \pi + 2n\pi, \end{cases} \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

4.4:7 a) Skärskådar vi ekvationen ser vi att x bara förekommer som $\sin x$ och då kan det vara lämpligt att istället för att försöka lösa ekvationen direkt för x göra ett mellansteg och lösa den för $\sin x$.

Skriver vi $t = \sin x$ och betraktar t som en ny obekant så blir ekvationen

$$2t^2 + t = 1$$

när den uttrycks helt i t. Detta är en vanlig andragradsekvation där vi, efter division med 2, kvadratkompletterar vänsterledet,

$$\begin{aligned} t^2 + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2} &= \left(t + \tfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 - \tfrac{1}{2} \\ &= \left(t + \tfrac{1}{4}\right)^2 - \tfrac{9}{16}, \end{aligned}$$

och då får ekvationen

$$\left(t + \tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{9}{16}$$

som har lösningarna $t = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$, dvs. $t = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ och $t = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$.

Eftersom $t = \sin x$ betyder detta att de x som uppfyller ekvationen i uppgiftstexten nödvändigtvis uppfyller någon av grundekvationerna $\sin x = \frac{1}{2}$ eller $\sin x = -1$.

$\sin x = \frac{1}{2}$: Denna ekvation har lösningarna $x = \pi/6$ och $x = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$ i enhetscirkeln och den allmänna lösningen är

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{och} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.

$\sin x = -1$: Ekvationen har bara en lösning $x = 3\pi/2$ i enhetscirkeln och därför är den allmänna lösningen

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.

Samtliga lösningar till ekvationen är

$$\begin{cases} x = \pi/6 + 2n\pi, \\ x = 5\pi/6 + 2n\pi, \\ x = 3\pi/2 + 2n\pi, \end{cases} \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

b) Om vi använder den trigonometriska ettan och skriver $\sin^2 x$ som $1 - \cos^2 x$ så blir hela ekvationen skriven i termer av $\cos x$,

$$2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 0,$$

eller lite omstuvad,

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0.$$

När vi väl har ekvationen helt uttryckt i $\cos x$ kan vi införa en ny obekant $t = \cos x$ och lösa ekvationen med avseende på t. Uttryckt i t är ekvationen

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

och denna andragradsekvation har lösningarna $t = \frac{1}{2}$ och $t = -2$.

I termer av x betyder detta att antingen är $\cos x = \frac{1}{2}$ eller så är $\cos x = -2$. Det första fallet inträffar när

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}),$$

medan ekvationen $\cos x = -2$ saknar helt lösningar (cosinusvärden ligger alltid mellan -1 och 1).

Svaret är alltså att ekvationen har lösningarna

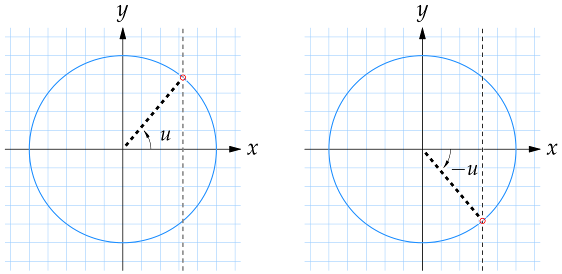
$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

c) Vill vi lösa ekvationen $\cos 3x = \sin 4x$ så behöver vi ett hjälpresultat som säger för vilka u och v som likheten $\cos u = \sin v$ gäller, men för att komma dit måste vi utgå från likheten $\cos u = \cos v$.

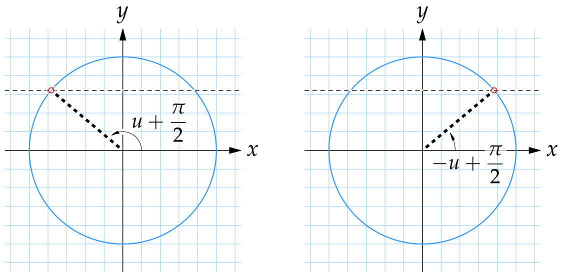
Allt börjar alltså med att vi tittar på likheten

$$\cos u = \cos v.$$

I enhetscirkeln vet vi att för ett fixt u så finns det två vinklar $v = u$ och $v = -u$ som har cosinusvärdet $\cos u$, dvs. x-koordinat lika med $\cos u$.



Tänk nu att hela enhetscirkeln roteras motsols vinkeln $\pi/2$. Då kommer linjen $x = \cos u$ övergå till linjen $y = \cos u$ och vinklar u och $-u$ roteras till $u + \pi/2$ resp. $-u + \pi/2$.



Vinklarna $u + \pi/2$ och $-u + \pi/2$ har alltså y-koordinat, och därmed sinusvärde, lika med $\cos u$. Med andra ord gäller likheten

$$\cos u = \sin v$$

för fixt värde på u exakt när $v = \pm u + \pi/2$, och mer allmänt när

$$v = \pm u + \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

För vår ekvation $\cos 3x = \sin 4x$ medför detta resultat att x måste uppfylla

$$4x = \pm 3x + \frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

Detta betyder att lösningarna till ekvationen är

$$\begin{cases} x = \pi/2 + 2n\pi, \\ x = \pi/14 + 2n\pi/7, \end{cases} \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

4.4:8 a) Använder vi formeln för dubbla vinkeln, $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, och flyttar över alla termer i vänsterledet så blir ekvationen

$$2\sin x \cos x - \sqrt{2}\cos x = 0.$$

Då ser vi att vi kan bryta ut faktorn $\cos x$ ur båda termerna,

$$\cos x(2\sin x - \sqrt{2}\,) = 0,$$

och på så sätt dela upp ekvationen i två fall. Ekvationen är uppfylld antingen om $\cos x = 0$ eller om $2\sin x - \sqrt{2} = 0$.

$\cos x = 0$: Denna ekvation har den allmänna lösningen

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

$2\sin x - \sqrt{2} = 0$: Samlar vi $\sin x$ i vänsterledet får vi grundekvationen $\sin x = 1/\sqrt{2}$ som har den allmänna lösningen

$$\begin{cases} x = \pi/4 + 2n\pi, \\ x = 3\pi/4 + 2n\pi, \end{cases} \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

Hela ekvationen har den fullständiga lösningen

$$\begin{cases} x = \pi/4 + 2n\pi, \\ x = \pi/2 + 2n\pi, \\ x = 3\pi/4 + 2n\pi, \end{cases} \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

b) Förutsatt att $\cos x \neq 0$ så kan vi dela båda led med $\cos x$ och få

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}, \quad \text{dvs.} \quad \tan x = \sqrt{3}.$$

Denna grundekvation har lösningarna $x = \pi/3 + n\pi$ för alla heltal n.

Om däremot $\cos x = 0$ så är $\sin x = \pm 1$ (rita upp enhetscirkeln) och ekvationen kan inte ha någon sådan lösning.

Ekvationen har alltså lösningarna

$$x = \pi/3 + n\pi, \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

c) När man har en trigonometrisk ekvation som innehåller en blandning av olika trigonometriska funktioner så kan en användbar strategi vara att skriva om ekvationen så att den bara är uttryckt i en av funktionerna. Ibland är en sådan omskrivning inte helt lätt att komma på, men i detta fall är en framkomlig väg att vi ersätter talet 1 i vänsterledets täljare med $\cos^2 x + \sin^2 x$ enligt den trigonometriska ettan. Detta gör att ekvationens vänsterled kan skrivas som

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

och ekvationen är då helt uttryckt i termer av $\tan x$,

$$1 + \tan^2 x = 1 - \tan x.$$

Sätter vi $t = \tan x$ så ser vi att ekvationen är en andragradsekvation i t som efter förenkling är $t^2 + t = 0$ och har rötterna $t = 0$ och $t = -1$. Det finns alltså två möjliga värden på $\tan x$: $\tan x = 0$ eller $\tan x = -1$. Den första likheten är uppfylld när $x = n\pi$ för alla heltal n och den andra likheten när $x = 3\pi/4 + n\pi$.

Samtliga lösningar till ekvationen är

$$\begin{cases} x = n\pi, \\ x = 3\pi/4 + n\pi, \end{cases} \qquad (n \text{ godtyckligt heltal}).$$

5.1 Matematiska formler i LaTeX

5.1:1 Dessa enkla matematiska uttryck skriver vi i LaTeX på samma sätt som de står.

a) `2-3+4`

b) `-1+0,3`

c) `-5-(-3)=-5+3`

d) `5/2+1>5/(2+1)`

5.1:2 a) Det finns två specialtecken $\cdot$ och $\pm$ i uttrycket $3 \cdot 4 \pm 4$ och dessa två tecken skrivs med LaTeX-kommandona `\cdot` resp. `\pm`. Kodningen av hela uttrycket blir därför

```
3\cdot 4\pm 4.
```

b) Exponenter skrivs i LaTeX genom att använda `^` framför exponenten. Därför blir den första termen `4x^2` i LaTeX-syntax. Kvadratroten skrivs med kommandot `\sqrt` följt av det som ska stå under rottecknet inom klammerparenteser. Den andra termen ges därför av `\sqrt{x}`. Sammantaget har vi

```
4x^2-\sqrt{x}.
```

c) Specialtecknen $\geq$ och $\cdot$ får vi fram med kommandona `\ge` resp. `\cdot`, och exponenterna med tecknet `^` framför exponenten. Detta betyder att hela uttrycket blir

```
4\cdot 3^n\ge n^3.
```

d) Det finns inga konstigheter i detta uttryck utan vi skriver det direkt som

```
3-(5-2)=-(-3+5-2).
```

5.1:3 a) För att få ett (stort) byggt bråk i LaTeX använder vi kommandot `\dfrac{}{}` där vi fyller i täljaren inuti den första paret av klammerparenteser (i LaTeX-syntax) och nämnaren inuti det andra paret av klammerparenteser. Uttrycket kan därför skrivas som

```
\dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1}.
```

b) Deluttrycket $\dfrac{5}{x}$ i den första parentesen tar vi hand om genom att skriva `\dfrac{5}{x}`. Ett första försök till LaTeX-kod är därför

```
(\dfrac{5}{x}-1)(1-x),
```

men det ger ett resultat där det första parentesparet inte är lika stort som uttrycket det innesluter,

$$(\frac{5}{x} - 1)(1 - x).$$

Vi åtgärdar detta genom att lägga till `\left` och `\right` framför vänster- resp. högerparentesen som vi vill ha skalbara, dvs.

`\left(\dfrac{5}{x}-1\right)(1-x).`

c) Uttrycket består av ett huvudbråk där $\frac{1}{2}$ är täljare och $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ är nämnare. Vår första ansats är därför utgå från

`\dfrac{}{}.`

I det första argumentet (inuti det första paret av klamrar) ska vi fylla i täljaren och eftersom det är ett sifferbråk skriver vi det som ett litet byggt bråk med kommandot `\frac{1}{2}` (1 är täljare och 2 är nämnare). Alltså

`\dfrac{\frac{1}{2}}{}.`

Notera hur vi alltså har ett bråk inuti ett bråk. Det återstår att fylla i nämnaren i huvudbråket och den får vi fram på liknande sätt med `\frac`, nämligen `\frac{1}{3}+\frac{1}{4}`. Svaret blir

`\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}.`

d) Detta uttryck är ganska komplicerat och kräver att vi tänker i steg. Till att börja med består uttrycket av ett huvudbråk,

$$\frac{1}{\text{någonting}}.$$

En början är därför att vi skriver

`\dfrac{1}{}.`

Nämnaren består i sin tur av ett bråk som kan skrivas som

`1+\dfrac{1}{1+x}.`

Stoppar vi in detta uttryck som nämnarargument till huvudbråket får vi hela uttrycket,

`\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}.`

5.1:4 a) De trigonometriska funktionerna sin och cos skrivs med kommandona `\sin` resp. `\cos`. Vi kan därför koda uttrycket i LaTeX som

`\sin^2 x + \cos x.`

Observera att det är nödvändigt med ett mellanslag efter kommandot `\cos`.

b) Argumentet till cosinus i högerledet är ett stort byggt bråk som vi ges av `\dfrac{3\pi}{2}`, där `\pi` ger den grekiska bokstaven π. Därmed kan hela uttrycket skrivas som

`\cos v = \cos\dfrac{3\pi}{2}.`

c) Kommandona `\cot` och `\tan` ger de trigonometriska funktionerna cot och tan. Vi har ett bråk i högerledet och använder `\dfrac` där. Vi får

`\cot 2x = \dfrac{1}{\tan 2x}.`

d) Börjar vi med vänsterledet så består det dels av den trigonometriska funktionen tan, dels av argumentet $\dfrac{u}{2}$. Funktionen tan skrivs som `\tan` och argumentet, som är ett bråk, som `\dfrac{u}{2}`. Vänsterledet är därför `\tan\dfrac{u}{2}` i LaTeX-syntax.

Fortsätter vi med högerledet så har vi ett huvudbråk där $\sin u$ är täljare och $1+\cos u$ är nämnare. Täljaren kan vi skriva som `\sin u` och nämnaren som `1+\cos u`. Hela högerledet blir

`\dfrac{\sin u}{1+\cos u}.`

Totalt får vi

`\tan\dfrac{u}{2} = \dfrac{\sin u}{1+\cos u}.`

5.1:5 a) Rottecknet ($\sqrt{\ }$) får vi fram genom att skriva `\sqrt{}` där det som ska stå under rottecknet ska stå innanför klammerparenteserna. Eftersom argumentet till kvadratroten är $4+x^2$, som skrivs som `4+x^2`, blir hela uttrycket `\sqrt{4+x^2}`.

b) Den n:te roten ur x skriver man som `\sqrt[n]{x}` och därför blir hela uttrycket

`\sqrt[n]{x+y} \ne \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y},`

där `\ne` är tecknet $\neq$.

c) Vänsterledet är ”roten ur roten ur 3”. Som argument till det yttre rottecknet har vi alltså $\sqrt{3}$ som vi skriver som `\sqrt{3}`. Vi skriver därför vänsterledet som `\sqrt{\sqrt{3}}` och hela uttrycket som

`\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}.`

d) Delar vi upp uttrycket i mindre delar så får vi deluttryck som är enklare att översätta till LaTeX. Vi har att

- $\sqrt[4]{3}$ ges av `\sqrt[4]{3}`,

- $2+\sqrt{2}$ ges av `2+\sqrt{2}`.

Uttrycket $\sqrt[4]{3}$ ska vi ha skalbara parenteser kring och upphöja till 3 så det deluttrycket blir

```
\left(\sqrt[4]{3}\right)^3.
```

Uttrycket $2+\sqrt{2}$ ska stå under $\sqrt[3]{}$ som skrivs som `\sqrt[3]{}` och därför är $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$ i LaTeX-form:

```
\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}.
```

Allt som allt får vi

```
\left(\sqrt[4]{3}\right)^3\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}.
```

5.1:6 a) Den naturliga logaritmen ln skrivs som `\ln` och med specialtecknet $\cdot$ (`\cdot`) blir kodningen rättfram,

```
\ln (4\cdot 3) = \ln 4 + \ln 3.
```

b) Genom att ln skrivs som `\ln` och $\neq$ som `\ne` så kan hela uttrycket skrivas som

```
\ln (4-3)\ne \ln 4 - \ln 3.
```

c) Tvålogaritmen $\log_2$ får vi fram genom att använda kommandot `\log` för den allmänna logaritmen log, och sedan hänga på ett index 2 med `_2`, dvs. $\log_2$ skriver vi som `\log_2`.

Högerledet är ett bråk (`\dfrac`) mellan $\ln 4$ (`\ln 4`) och $\ln 2$ (`\ln 2`), dvs. det kan skrivas som `\dfrac{\ln 4}{\ln 2}`.

Svaret blir

```
\log_2 4 = \dfrac{\ln 4}{\ln 2}.
```

d) Genom att använda indexet 2 på den allmänna logaritmen log (`\log`) kan exponenten i vänsterledet skrivas som `\log_2 4` och allting som

```
2^{\log_2 4} = 4.
```

Vi måste omge exponenten med klamrar eftersom den består av fler än en symbol.

5.1:7 a) Om vi går igenom uttrycket från vänster till höger ser vi först att exponenten till 4 är ett byggt bråk $\frac{3}{4}$ och det är bättre om det bråket skrivs med ett snedstreck, dvs. vi börjar med `4^{3/4}`. Vidare saknar nästa deluttryck en avslutande högerparentes. Vi borde alltså skriva

```
4^{3/4}(1-(3-4)).
```


b) Ett klassiskt fel är att använda `*` som multiplikationstecken. Vanligtvis använder man $\cdot$ (`\cdot`) men i detta fall kan vi utelämna tecknet helt och hållet. Nästa fel är att kommandot `\sqrt` saknar det inledande omvända snedstrecket och att vanliga parenteser används för argumentet (det ska vara klammerparenteser). Ett bättre sätt att skriva uttrycket på är

```
2\sqrt{a+b}.
```

c) Kommandon föregås alltid av omvända snedstreck (\ ) i LaTeX. Därför ska `cotx` skrivas som `\cot x`, och observera mellanslaget efter `\cot`.

Därefter har vi i högerledet ett sifferbråk som normalt sett ska vara litet och därför skrivas med `\frac`, dvs. `\frac{1}{2}`. Den trigonometriska funktionen sin skrivs inte som `Sin` utan som `\sin`. Till sist ska gradtecknet ($^\circ$) skrivas som `^{\circ}`.

Med dessa korrektioner blir koden

```
\cot x = \frac{1}{2}\sin 20^{\circ}.
```

5.2 Matematisk text

5.2:1 a) När man förkortar bort $\tan x$ från båda led i ekvationen finns risken att lösningarna som uppfyller $\tan x = 0$ försvinner. Ekvationen till höger kan därmed ha färre lösningar än den till vänster. Du ska därför använda pilen $\Leftarrow$.

Anm. Det spelar ingen roll att det senare visar sig att båda ekvationerna har exakt samma lösningar. Det är vad du vet när du förkortar båda led som avgör vilken pil som används.

b) Kvadrering av båda led i en ekvation kan introducera nya s.k. falska rötter. Ekvationen till höger kan därför ha lösningar som ekvationen till vänster saknar. Använd pilen $\Rightarrow$ för att indikera detta.

c) Omskrivningen av $x^2 - 6x$ som $(x-3)^2 - 9$ är fullt korrekt och ändrar inte ekvationens lösningsmängd. Därför ska pilen $\Leftrightarrow$ stoppas in mellan ekvationerna.

5.2:2 Kommentarer:

1 Till att börja med visas att Monikas (den fiktiva personens) räkning är korrekt ner till sista steget där hon gjort fel. 2

3 $$cosxtan\frac{3x}{2} = \frac{1}{tanx + cot2x}$$

4 VLs nämnare multiplicerat till båda led.

$$cosxtan\frac{3x}{2}(tanx + cot2x) = 1$$

(Vi anmärker bara på fel första gången de förekommer.)

0. Alla fristående formler ska ha en viss indragning.
1. Hänvisa inte till den fiktiva personen i uppgiftstexten utan skriv en självständig lösning.
2. Ta bort punkten på slutet. Formeln som följer efter texten ska ingå i meningen (vilket betyder att meningen behöver skrivas om).
3. Glöm inte att kommandon startar med ett omvänt snedstreck (\ ) i LaTeX. Skriv t.ex. \cos istället för cos.
4. Undvik ovanliga förkortningar. Dessutom är det högerledets nämnare som multipliceras till båda led.

En förbättrad lösning skulle kunna vara:

Vi börjar lösa ekvationen

$$\cos x \tan\frac{3x}{2} = \frac{1}{\tan x + \cot 2x}$$

genom att multiplicera båda led med högerledets nämnare

$$\cos x \tan\frac{3x}{2}(\tan x + \cot 2x) = 1\,.$$

5.2:3 Kommentarer:

$$1\ 2\ \frac{1}{2}\cdot(\sin 4x + \sin 2x)\cdot \cos x^2\ 3 + \frac{1}{2}\cdot(\sin 4x + \sin 2x)\sin x^2 - \sin 2x\cdot \sin x^2 = \frac{3}{4}$$

4 ---Nu kan vi faktorisera parenteserna då dom är likadana till $(\frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x)\cdot(\cos x^2 + \sin x^2)$ och i och med trigonometriska ettan får vi $(\cos x^2 + \sin x^2) = 1$ så då ser ekvationen ut så här: 6

5 $$\frac{1}{2}\cdot(\sin 4x + \sin 2x) - \sin 2x\cdot \sin x^2 = \frac{3}{4}\ 7$$

(Vi anmärker bara på fel första gången de förekommer.)

0. Alla fristående formler ska ha en viss indragning.
1. Numeriska bråk såsom 1/2 ska normalt sett skrivas som ett litet byggt bråk $\tfrac{1}{2}$ och inte som ett stort byggt bråk $\dfrac{1}{2}$.
2. Ta bort onödiga multiplikationstecken.
3. Det är matematiskt fel att skriva $\cos x^2$ när man egentligen menar $\cos^2 x$.
4. Ta bort de inledande "---". De används troligen för att framhäva texten men det görs bättre genom att skriva fristående formler med en viss indragning.
5. Ta bort onödiga parenteser.
6. Ta bort onödigt kolon.
7. Avsluta meningen med en punkt efter den fristående formeln.

En förbättrad lösning skulle kunna vara:

$\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)\cos^2 x + \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)\sin^2 x - \sin 2x \sin^2 x = \frac{3}{4}$.

Nu kan vi faktorisera ut parentesen från de två första termerna i vänsterledet och vi får då $\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$. Med hjälp av den trigonometriska ettan $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ kan ekvationen därefter skrivas som

$\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) - \sin 2x \sin^2 x = \frac{3}{4}$.

5.2:4 Kommentarer:

hade lite bråttom när jag gjorde uppgiften första gången... här är den uppdaterade versionen: ①

$3 \cdot 2^x = 4 \cdot \sqrt[x]{9}$ ②

$3 \cdot 2^x = 2^2 \cdot \sqrt[x]{2^2}$

$3 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 3^{\frac{2}{x}}, x \neq 0$ ③ ④ ($x = 0$ är ändå ingen rot till ekvationen) ⑥

⑤ utbrytning av x ur potensen ur VL och 2 ur HL

$(3^{\frac{1}{x}} \cdot 2)^x = (2 \cdot 3^{\frac{1}{x}})^2$ ⑦

(Vi anmärker bara på fel första gången de förekommer.)

0. Alla fristående formler ska ha en viss indragning.
1. Skriv inte kommentarer till läraren i lösningen. Använd istället kommentarsrutan när lösningen skickas in.
2. Detta kan troligtvis utföras i ett steg om man förklarar förenklingen. (Det finns också ett litet skrivfel i en av ekvationerna; 2^2 borde vara 3^2.)
3. Ett bråk i en exponent bör skrivas snedställd, dvs. $3^{2/x}$.
4. Inte bara är x skild från noll, utan den måste dessutom vara ett positivt heltal för att $\sqrt[x]{3^2}$ ska vara definierad och lika med $3^{2/x}$.
5. Börja meningen med en stor bokstav.
6. Undvik ovanliga förkortningar såsom VL och HL.
7. Avsluta meningen med en punkt efter ekvationen.

En förbättrad lösning skulle kunna vara:

Först skrivs ekvationen

$3 \cdot 2^x = 4\sqrt[x]{9}$

om genom att använda sambanden $4 = 2^2$ och $\sqrt[x]{9} = \sqrt[x]{3^2} = 3^{2/x}$ till

$3 \cdot 2^x = 2^2 3^{2/x}$.

Lägg märke till att vi underförstått antar att x är ett positivt heltal eftersom annars är uttrycket $\sqrt[x]{9}$ inte definierat.

Från exponenten i vänsterledet bryter vi ut x och vi bryter ut 2 från exponenten i högerledet,

$(3^{1/x} 2)^x = (2 \cdot 3^{2/x})^2$.

5.2:5 Kommentarer:

Multiplicera båda led med 1-3tan²x: ①

② $tan(x)(3tan(x) - tan^3(x) + 2sin^2(x) - 2sin^2(x)3tan^2(x) = 0$ ③ <=> $\frac{sin(x)}{cos(x)}(\frac{3sin(x)}{cos(x)}$ ④

Förkorta med $sin^2(x)$ ⑤

$\frac{3}{cos^2(x)} - \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} + 2 - 6\frac{sin^2(x)}{cos^2(x)}$ ⑥

(Vi anmärker bara på fel första gången de förekommer.)

0. Alla fristående formler ska ha en viss indragning.
1. Skriv formler med matematiktaggen `<math>`.
2. Kommandon startar med omvänt snedstreck (\ ) i LaTeX. Skriv därför `\tan` och inte `tan`. Argument till de trigonometriska funktionerna skrivs utan parenteser, dvs. `\tan x` och inte `\tan(x)`.
3. Försök inte skapa egna tecken. Använd $\Leftrightarrow$ (`\Leftrightarrow` i LaTeX).
4. Denna rad är för lång. Dela upp den i två rader (och lägg till lite förklarande text mellan raderna).
5. Om man förkortar bort $\sin^2 x$ så måste man anta att $\sin x \neq 0$ eftersom annars kan man förlora lösningar. Var tydlig med detta antagande (och glöm inte att specialbehandla fallet $\sin x = 0$ senare.)
6. Vart tog högerledet vägen? Avsluta dessutom meningen med en punkt efter ekvationen.

En förbättrad lösning skulle kunna vara:

Multiplicera båda led $1 - 3\tan^2 x$,

$$\tan x\, 3\tan x - \tan^3 x + 2\sin^2 x - 2\sin^2 x\, 3\tan^2 x = 0,$$

och ersätt $\tan x$ med $\sin x/\cos x$,

$$\frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{3\sin x}{\cos x} - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2\right) + 2\sin^2 x - 2\sin^2 x\, 3\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 0.$$

Om vi antar att $\sin x \neq 0$ och förkortar bort $\sin^2 x$ från båda led får vi

$$\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2 - 6\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0.$$

5.2:6 Kommentarer:

Komplettera var det. Jag antar att jag ska uppdatera i fönstret med gruppens lösning. 1

Min ursprungliga lösning var: 2

Problemet är alltså 3

4 $Sinx + Cosx = \sqrt{2} * Sin2x$ 5 6

Trigonometri har nästan lika många formler som det är stjärnor på himlen så man kan plotta ett par linjer för att få ett grep på vad man letar efter. 7

(Vi anmärker bara på fel första gången de förekommer.)

0. Alla fristående formler ska ha en viss indragning.
1. Ta bort dessa rader.
2. Det är en dålig presentation av den nya lösningen att behålla den gamla versionen och sedan på slutet skriva vilka ändringar man vill göra. Ändra istället direkt i lösningen.
3. Formulera problemet tydligare. Är det att bevisa likheten som en identitet eller att lösa den som en ekvation?
4. I LaTeX skrivs $\sin x$ som `\sin x` och inte som `Sin x`.
5. Använd inte $*$ som ett multiplikationstecken. I detta fall behövs inget tecken överhuvudtaget.
6. Lägg till en punkt efter ekvationen för att avsluta meningen.
7. Var mer fokuserad. Man ska förklara sin lösning men gå inte till överdrift. Det finns ingen anledning att gå in på alla detaljer i hur man nådde fram till lösningen.

En förbättrad lösning skulle kunna vara:

Problemet består av att lösa ekvationen

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 2x.$$

5.2:7 Kommentarer:

Ska vi nu lösa ut x ur $\sin 2x$ byter vi ut 2x mot V. 1 På en enhetscirkel kan man se att när $V = \frac{\pi}{2}$ 2 blir $\sin V = 1$

3

Här måste vi komma ihåg att vi kan lägga till hur många hela varv som helst till $\frac{\pi}{2}$ 4 och endast få samma svar! 5

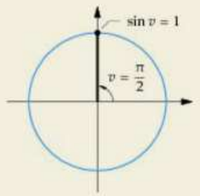
Alltså: $V = \frac{\pi}{2} + 2\pi * n$ 6 7

(Vi anmärker bara på fel första gången de förekommer.)

0. Alla fristående formler ska ha en viss indragning.
1. Varför använda ett stort V?
2. I texten ska bråket $\dfrac{\pi}{2}$ skrivas snedställt $\pi/2$ så att det smälter in bättre.
3. Att inkludera en figur är ofta en bra idé, men var inte slarvig.
4. Ett icke-numeriskt bråk skrivs inte som ett litet byggt bråk $\frac{\pi}{2}$. I en fristående formel ska bråket istället skrivas som ett stort byggt bråk $\dfrac{\pi}{2}$ medan i texten skrivs det snedställt $\pi/2$.
5. Läs igenom texten ytterligare en gång. Denna mening blev inte helt rätt.
6. Använd inte $*$ som ett multiplikationstecken. I detta fall kan tecknet utelämnas.
7. Detta är den fullständiga lösningen. Varför inte skriva det. Förklara också parametern n.

En förbättrad lösning skulle kunna vara:

Vi ska nu lösa ekvationen $\sin 2x = 0$, och byter därför ut $2x$ mot v. På enhetscirkeln ser vi att den enda lösningen till $\sin v = 1$ är $v = \pi/2$.



För att få den fullständiga lösningen adderar vi på ett godtyckligt antal varv till $\pi/2$,

$$v = \frac{\pi}{2} + 2n\pi\,,$$

där n är ett godtyckligt heltal.

5.2:8 Kommentarer:

1
1. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \dfrac{3}{2}$ 2

Med formeln för dubbla vinkeln $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ **får man att** 3

$\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$ och $\cos^2 3x = \dfrac{\cos 6x + 1}{2}$ 4

Insättning i 1 ger: 5

2. $\dfrac{\cos 2x + 1}{2} + \cos^2 2x + \dfrac{\cos 6x + 1}{2} = \dfrac{3}{2}$

(Vi anmärker bara på fel första gången de förekommer.)

0. Alla fristående formler ska ha en viss indragning.
1. Standardsättet att numrera fristående formler är att skriva siffran innanför parenteser.
2. Bråket bör vara ett litet byggt bråk $\frac{3}{2}$.
3. Texten borde inte vara i fet stil. Spara fet stil till tillfällen när något behöver betonas.
4. Avsluta meningen med en punkt.
5. Ta bort kolonet.

En förbättrad lösning skulle kunna vara:

(1) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$.

Med formeln för dubbla vinkeln $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ får man att

$$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2} \text{ och } \cos^2 3x = \frac{\cos 6x + 1}{2}\,,$$

och dessa samband insatta i (1) ger att

(2) $\dfrac{\cos 2x + 1}{2} + \cos^2 2x + \dfrac{\cos 6x + 1}{2} = \frac{3}{2}$.

5.2:9 Kommentarer:

1
$\cos x \tan(3x/2) = 1/(\tan x + \cot 2x)$

2
Jag byter ut tan och cot mot deras motsvarigheter i cossinus och sinus. 3

4 5
$\cos x * (\sin(3x/2)/\cos(3x/2)) = 1/((\sin x/\cos x) + (\cos 2x/\sin 2x)$ --> 6

$\cos x * (\sin(3x/2)/\cos(3x/2)) * ((\sin x/\cos x) + (\cos 2x/\sin 2x)) = 1$

(Vi anmärker bara på fel första gången de förekommer.)

0. Alla fristående formler ska ha en viss indragning.
1. I en fristående formel behöver man inte skriva bråk snedställda. Det finns gott om vertikalt utrymme.
2. Kontrollera stavningen.
3. Meningen ska inte avslutas här. Formeln ska vara del av meningen.
4. Använd inte $*$ som multiplikationstecken. I detta fall kan tecknet utelämnas helt.
5. Ta bort: -->.
6. Försök att förklara bättre vad som görs.

En förbättrad lösning skulle kunna vara:

$$\cos x \tan\frac{3x}{2} = \frac{1}{\tan x + \cot 2x}\,.$$

Jag uttrycker tangens och cotangens i cosinus och sinus,

$$\cos x \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}} = \frac{1}{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}}\,,$$

och multiplicerar båda led med högerledets nämnare,

$$\cos x \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right) = 1\,.$$