Förberedande kurs i matematik

Alexandersson, Bergkvist, Leander, Lundqvist

29 april 2010

b

Förord

Detta material är avsett att introducera matematik för nya universitets- och högskolestudenter och skrevs som kurslitteratur till Förberedande kurs i matematik, som är en distanskurs utvecklad av Stockholms universitet. Kursen riktar sig till nya studenter i ämnet samt till de som vill få en djupare bild av matematiken. Boken repeterar en viss del grundläggande gymnasiematematik på universitetsvis, men tar också upp en hel del nya saker som vi tror att läsaren kommer att ha stor nytta av vid eventuellt kommande matematikstudier vid universitet eller högskola. Läsaren förutsätts ha gymnasiekunskaper i ämnet motsvarande Matematik C.

Boken är organiserad i fyra stora kapitel.Vart och ett av dessa fyra kapitel är indelade i mindre avsnitt. Efter varje delavsnitt finns ett antal övningar som läsaren med fördel kan göra för att kontrollera att han eller hon förstått de olika begreppen och metoderna från avsnittet. Till övningarna finns korta svar i slutet av boken. Alla övningar är tänkta att göras utan hjälp av miniräknare.

Kapitel 1 består till stor del av en presentation av olika tal, samt regler för hur man räknar med dessa. Kapitlet utgår från de positiva heltalen och motiverar en rad utvidgningar av dessa för att till slut komma fram till de komplexa talen. Kapitlet är tänkt att ge en djupare förståelse för de olika talen och sättet att räkna med dessa.

I kapitel 2 behandlas Algebra och kombinatorik. Kapitlet avslutas med en diskussion av några logiska symboler.

I kapitel 3 introduceras mängdlära. Med hjälp av mängdlära definierar vi funktionsbegreppet. I slutet av kapitlet behandlas olikheter, absolutbelopp och trigonometri.

Kapitel 4 leder in på derivata genom gränsvärden samt vidare till integralbegreppet.

Vid skrivandet av en lärobok är det oundvikligt att låta sig inspireras av andra texter i ämnet. Det tidigare kursmaterialet *Förberedande kurs i matematik* av Clas Löfwall, Jan Nordin och Johan Thorbiörnson har givit betydande intryck. Vi vill tacka kollegor vid Stockholms universitet för ideer oh synpunkter på materialet. Ett speciellt tack till Rikard Bøgvad som kommit med mycket konstruktiv kritik på en tidig version.

Stockholm, Valborgsmässoafton 2010

Innehåll

Kapitel 1

Tal

1.1 De positiva heltalen och de naturliga talen

Vi börjar med de tal man stöter på dagligen, nämligen *positiva heltal*. Det är tal som räknar hela antal. Exempelvis kan man räkna antalet tavlor i ett rum eller ange ett telefonnummer. Mer precist så är de positiva heltalen talen $1, 2, 3, 4, \dots$ och följden fortsätter (det är så prickarna ska tolkas), så antalet heltal är oändligt. Mängden av de positiva heltalen betecknas $\mathbb{Z}_+$, så

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Om vi vill understryka att till exempel talet 2 är ett positivt heltal så skriver vi

$$2 \in \mathbb{Z}_+,$$

där symbolen $\in$ betyder tillhör. På motsvarande sätt betyder $-2 \notin \mathbb{Z}_+$ att -2 inte tillhör mängden $\mathbb{Z}_+$ d.v.s. -2 är inte ett positivt heltal.

Med de positiva heltalen saknar vi möjlighet att uttrycka "ingenting". Därför inför vi de *naturliga talen* $0, 1, 2, \dots$ som vi betecknar med $\mathbb{N}$. Observera att $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Z}_+$ bara skiljer sig åt på ett enda tal (nollan) och alla tal som finns i $\mathbb{Z}_+$ finns också i $\mathbb{N}$. Vi säger att $\mathbb{Z}_+$ är en *delmängd* till $\mathbb{N}$ och skriver

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N}.$$

De flesta vuxna människor känner sig väl förtrogna med addition av naturliga tal, men vad är det egentligen vi gör när vi adderar två naturliga tal? Varför är till exempel $4 + 1 = 5$? Det beror helt enkelt på att vi har definierat addition med ett som att röra oss till nästa tal i uppräkningen $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Betraktar vi talen som utplacerade på en linje kan vi tänka oss addition med ett som att gå ett steg till höger på den linjen. Varför är $4 + 4 = 8$? Här kan vi analogt säga att detta beror på att när vi flyttar oss fyra steg till höger från 4 så kommer vi att hamna på 8.

Eftersom vi hela tiden rör oss till höger på linjen när vi adderar naturliga tal så kommer vi alltid att få en nytt naturligt tal. Vi säger att de naturliga talen är *slutna* under addition.

Hur ska vi förklara vad som sker när vi multiplicerar två naturliga tal? Jo, vi betraktar multiplikation som upprepad addition och skriver

$$5 \cdot 4 = 5 + 5 + 5 + 5$$

och i allmänhet

$$a \cdot b = \underbrace{a + \cdots + a}_{b \text{ stycken}}.$$

Eftersom vi redan har argumenterat för att de naturliga talen är slutna under addition så följer det att de naturliga talen är slutna även under multiplikation.

När vi subtraherar ett naturligt tal från ett annat rör vi oss till vänster på tallinjen. Om vi ska räkna ut $4 - 5$ så startar vi på position fyra och rör oss fem steg åt vänster. Men de naturliga talen ”slutar” vid noll. De naturliga talen är alltså *inte* slutna under subtraktion. Så vi utvidgar de naturliga talen till *heltalen* .

1.2 Heltalen

Med de hela talen menas mängden

$$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

och denna betecknas $\mathbb{Z}$. Vi har alltså att

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Vi säger att $\mathbb{Z}_+$ och N är *delmängder* till $\mathbb{Z}$. Med de hela talen löser vi problemet med subtraktionen $4 - 5$ eftersom vi nu kan röra oss till vänster om noll.

Men hur ska vi betrakta subtraktion med ett negativt tal, tex $5-(-3)$? Vi bestämmer att subtrahera med ett negativt tal $-a$ betyder att gå a steg till höger. $5-(-3)$ är alltså lika med $5+3$. När vi subtraherar ett heltal från ett annat heltal får vi alltså ett nytt heltal. De hela talen är alltså slutna under subtraktion.

Följande lagar gäller för addition av heltal. Det är mycket viktigt att behärska dessa lagar.

$(a+b)+c=a+(b+c)$	Associativa lagen
$a+b=b+a$	Kommutativa lagen
$-(-a)=a$	Negeringslagen

Det finns också två lagar som reglerar borttagandet av parateser, nämligen

$$\boxed{\begin{aligned} a+(-b)&=a-b \\ a-(-b)&=a+b \end{aligned}}$$

Exempel 1.1. $(5+4-3)+2=5+(4-3+2)$

Exempel 1.2. $1=4-3=4-(4-3+2)=4-4+3-2=1$

Exempel 1.3. $1=5-4=-4+5=-(4-5)=-(-1)=1$

Vi har sett att multiplikation av positiva heltal kan ses som en upprepad addition. På analogt vis kan vi tolka $(-4)\cdot 5$ som $-4-4-4-4-4=-20$.

Följande lagar gäller för multiplikation av heltal.

$a\cdot b=b\cdot a$	Kommutativa lagen för multiplikation
$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$	Associativa lagen för multiplikation
$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	Distributiva lagen

Exempel 1.4.

$$5=25-20=5\cdot 5-5\cdot 4=5\cdot(5-4)=5\cdot 1=5$$

Vad blir då $(-1)\cdot(-1)$? Här behöver vi en *definition* och vi definierar $(-1)\cdot(-1)$ som $-(-1)$. Det följer nu av negeringslagen att $(-1)\cdot(-1)=1$. I allmänhet gäller det att $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$.

För att lättare hantera uttryck av typen $x\cdot x\cdot x$ har man infört *potenser*. Vi skriver

$$x\cdot x\cdot x=x^3,$$

där x är potensens *bas* och 3 är potensens *exponent* .

Potenser är ett kompakt skrivsätt och vi kan på mycket litet utrymme ge en övre gräns för antalet elementarpartiklar i hela universum, nämligen 2^{300}. (Det är givetvis inte bevisat, utan enbart en hypotes. Naturvetenskapen är till skillnad från matematiken ingen exakt vetenskap.)

Kuriosa 1. *Det finns en sägen som säger att när uppfinnaren av det schackliknande spelet Shaturanja visade upp spelet för kungen av Indien blev denne så imponerad att han ville ge uppfinnaren en belöning. Uppfinnaren sa då att han önskade sig ett vetekorn för den första rutan på schackbrädet, två vetekorn för den andra rutan, fyra vetekorn för den tredje, åtta vetekorn för den fjärde, o.s.v.. Kungen tyckte att detta lät som en rimlig belöning och beviljade uppfinnarens önskning. Han insåg inte att summan* $1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{64}$ *med råge översteg samtliga vetekorn i hela världen.*

Vi kan notera att

$$x^3\cdot x^4=(x\cdot x\cdot x)\cdot(x\cdot x\cdot x\cdot x)=\underbrace{x\cdots x}_{\text{sju gånger}}=x^7$$

och att

$$(x^3)^2=x^3\cdot x^3=(x\cdot x\cdot x)\cdot(x\cdot x\cdot x)=x^6=x^{3\cdot 2}.$$

Allmänt gäller följande räkneregler:

$$\boxed{\begin{aligned} x^a \cdot x^b &= x^{b+c} \\ (x^a)^b &= x^{a \cdot b} \end{aligned}}$$

Exempel 1.5. $2^4 \cdot 2^5 = 2^{4+5} = 2^9$

Exempel 1.6. $(2^4)^5 = 2^{4 \cdot 5} = 2^{20}$

Exempel 1.7. $9^2 \cdot 3^5 = (3^2)^2 \cdot 3^5 = 3^{2 \cdot 2} \cdot 3^5 = 3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$

Exempel 1.8. $(-1)^4 = 1$

Exempel 1.9. *Förenkla uttrycket* $(-1)^3 + 3 \cdot ((4 - 2^3)^2 - 5)$.

Lösningsförslag: Vi får

$$\begin{aligned} (-1)^3 + 3 \cdot ((4 - 2^3)^2 - 5) = -1 + 3 \cdot ((4-8)^2 - 5) = -1 + 3 \cdot (4^2 - 5) = -1 + 3 \cdot (16 - 5) \\ = -1 + 3 \cdot 11 = -1 + 33 = 32. \end{aligned}$$

★

Övningar

1. Beräkna $(1 - (5 - 4)$
2. Beräkna $(-1)^{13}$
3. Beräkna $-(a - b - (a + b)) + (a + b)$
4. Ge ett exempel på när $(x^a)^b = x^{(a^b)}$ och ett exempel på när $(x^a)^b \neq x^{(a^b)}$.

1.3 Primtal

Antag att vi utgår från talen 3 och 5 och frågar oss vilka ytterligare naturliga tal vi kan bilda genom upprepad addition. De fem första talen som vi kan bilda är

$$3 + 3 = 6, \quad 3 + 5 = 8, \quad 3 + 3 + 3 = 9, \quad 5 + 5 = 10, \quad \text{och} \quad 3 + 3 + 5 = 11.$$

Om vi istället utgår från talet 1 så kan vi bilda $1 + 1$, $1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1$, d.v.s. hela $\mathbb{Z}_+$. Vi kan därför betrakta 1 som den additiva grundbulten för de naturliga talen.

Låt oss betrakta motsvarande situation för multiplikation. Vi utgår från talen 3 och 5 och frågar oss vilka ytterligare naturliga tal vi kan bilda genom upprepad multiplikation. De två första talen som vi kan bilda är

$$3 \cdot 3 = 9 \quad \text{och} \quad 3 \cdot 5 = 15.$$

Det är tydligt att mängden

$$\{3, 5, 9, 15, \ldots\}$$

som vi lyckats bilda innehåller "hål". Så om vi vill bilda alla positiva heltal så måste vi tydligen utgå från fler tal. Låt oss lägga till talet 2. Vi kan nu även bilda

$$2 \cdot 2 = 4, \quad 2 \cdot 3 = 6, \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad 2 \cdot 5 = 10, \quad 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12, \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Sammantaget har vi lyckats bilda

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, \ldots\}.$$

Mängden blir tätare, men vi saknar t.ex. talet 7. När vi lägger till detta tal så kan vi även bilda 14 och vi får

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, \ldots\}.$$

Vi kan fortsätta och lägga till 11 och sedan 13, men då kommer vi upptäcka att vi saknar talet 17. Talen $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ som vi utgått från är de sju första *primtalen* . Primtalen är den motsvarande multiplikativa grundbulten för de naturliga talen. Varje naturligt tal större än ett kan bildas genom upprepad multiplikation av primtal. Vi behöver förstås en mer precis beskrivning av vad som menas med ett primtal. För att göra det ska vi först berätta vad ett *sammansatt* tal är.

Ett positivt heltal $a > 1$, d.v.s. som är större än ett, är *sammansatt* om det kan skrivas som en produkt $a = b \cdot c$, där $b > 1$ och $c > 1$. Nu kan vi definiera begreppet primtal.

Ett positivt heltal som är större än ett och som *inte* är sammansatt kallas för primtal.

Exempel 1.10. *Talen* $4, 6, 8, 9$ *är sammansatta eftersom*

$$4 = 2 \cdot 2, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad 8 = 2 \cdot 4 \quad \textit{och} \quad 9 = 3 \cdot 3,$$

medan talen $2, 3, 5, 7$ *är primtal eftersom dessa inte kan skrivas som en produkt av mindre postiva heltal.*

Det finns oändligt många primtal. Detta brukar man bevisa genom ett så kallat *motsägelsebevis*. Man antar att det bara finns ändligt många primtal och visar att detta leder till en motsägelse, varpå man drar slutsatsen att antalet primtal är oändligt.

Följande är exempel på kända primtal.

2	Det enda jämna primtalet. Varför?
65537	Det hittills största funna Fermatprimtalet (per 2010 04 07).
1111111111111111111	Det näst minsta primtalet som bara är en upprepning av ettor.

För att lättare kunna tala om ett heltals uppbyggnad i primtal säger vi att ett positivt heltal b är en *delare* till ett positivt heltal a om $a = b \cdot c$ för något positivt heltal c.

Exempel 1.11. *Talet* 6 *har delarna* $1, 2, 3$ *och* 6. *Talet* 7 *har delarna* 1 *och* 7. *Talet* 8 *har delarna* $1, 2, 4, 8$.

Kuriosa 2. *Ett tal* a *kallas* perfekt *om summan av delarna är lika med* $2a$. *T.ex. är* 6 *ett perfekt tal eftersom* $1 + 2 + 3 + 6 = 12$. *Hur många perfekta tal som finns är en öppen fråga. Kan du hitta något annat perfekt tal än sex? Tips: Det finns ett som är mindre än 30.*

Med hjälp av definitionen av delare så kan vi definiera sammansatta tal och primtal på ett annat sätt. Ett positivt heltal som är större än ett är sammansatt om det har fler än två delare. Ett positivt heltal som endast har två delare, sig själv och ett, kallas för ett primtal.

Ibland talar man även om äkta delare. Man säger att b är en äkta delare till a om b är en delare till a och b är skilt från både ett och a. Ett primtal är alltså ett tal som saknar äkta delare.

Primtalsfaktorisering

Betrakta talet 520. Eftersom talet är jämnt så är det delbart med två och vi kan skriva

$$520 = 2 \cdot 260.$$

Även 260 är delbart med två och vi skriver

$$260 = 2 \cdot 130.$$

Återigen, 130 är jämt och vi får

$$130 = 2 \cdot 65.$$

Vi ser att fem är en delare till 65 och

$$65 = 5 \cdot 13.$$

Vi har alltså visat att

$$520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13.$$

Lägg märke till att $2, 5$ och 13 alla är primtal. Vi säger att vi har *primtalsfaktoriserat* 520. Primtalsfaktoriseringen av ett positivt heltal är unikt. Detta visas i Aritmetikens fundamentalsats som tas upp i högre kurser i algebra.

Om man vill ta reda på om ett tal a är ett primtal så kan undersöka om a delas av primtalen $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$. Har man gått igenom alla primtal som är mindre än a och inte funnit någon delare så vet man att a självt måste vara ett primtal. Men man behöver i själva verket inte testa alla primtal fram till talet a utan det räcker att testa alla primtal som är mindre än $\sqrt{a}$, där $\sqrt{a}$ är ett tal b så att $a^2 = b$. Kan du fundera ut varför det är så?

Exempel 1.12. *Är 257 ett primtal?*

Lösningsförslag: Vi börjar med att uppskatta hur stort $\sqrt{257}$ är. Eftersom $20^2 = 400$ så gäller det att $\sqrt{400} = 20$. Alltså måste $\sqrt{257}$ vara mindre än 20. Vi har att $17^2 = 289$, alltså måste $\sqrt{257}$ även vara mindre än 17. Men $16^2 = 256$, så $\sqrt{257}$ är större än 16. Primtalen som är mindre än 17 är $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

Eftersom 257 är udda så kan det inte vara delbart med 2. Det gäller att $3 \cdot 85 = 255$ och $3 \cdot 86 = 258$, så 257 är inte delbart med tre. Vi har att $5 \cdot 51 = 255$ och $5 \cdot 52 = 260$, alltså är inte 257 inte delbart med fem. Eftersom $7 \cdot 36 = 252$, $7 \cdot 37 = 259$, $11 \cdot 23 = 253$, $11 \cdot 24 = 264$, $13 \cdot 19 = 247$ och $13 \cdot 20 = 260$ så är inte heller $7, 11$ och 13 delare till 257. Alltså är 257 ett primtal. ★

Observera att primtalsfaktoriseringen av ett primtal är primtalet självt.

Övningar

1. Avgör om talen 661, 133 och 85 är primtal. Om något tal inte är ett primtal så primtalsfaktorisera det.

2. Försök att primtalsfaktorisera ditt personnummer eller telefonnummer med hjälp av en miniräknare.

1.4 Moduloräkning

Moduloräkning är något vi använder oss av ofta utan att reflektera över det. Moduloräkning har en mycket viktig tillämpning inom kryptering, på vilket sätt ska vi inte gå in på här men för det intresserade finns det information om detta på bland annat Wikipedia. Låt oss börja med ett exempel.

Exempel 1.13. *Niklas går och lägger sig klockan 23.00 och vill sova åtta timmar för att vara pigg dagen efter. Vad ska han ställa klockan på (förutsatt att han somnar direkt när han lägger sig)?*

Lösningsförslag: För att ta reda på detta skulle man kunna tänka sig att man lägger till 8 till 23:

$$23 + 8 = 31.$$

Men försök ställa klockan på 31! Det vi istället gör då är att vi drar bort ett dygn, det vill säga 24 timmar. Att dra bort 24 timmar är detsamma som att börja om på noll när vi kommer till 24. Vi får nu

$$23 + 8 - 24 = 31 - 24 = 7.$$

Niklas borde alltså ställa klockan på 07.00. ★

Det vi gjorde i exemplet ovan var att vi räknade *modulo* 24. Det digitala klockor visar är egentligen resten vid heltalsdivision med 24. Från exemplet ovan får vi

$$23 + 8 = 24 + 7.$$

När man är intresserad av resten vid division med ett heltal n säger man att man räknar modulo n. Om två tal a och b har samma rest modulo n säger man att a och b är kongruenta (eller ekvivalenta) modulo n. Detta skrivs

$$\boxed{a \equiv b \text{ (mod } n\text{) eller } a \equiv_n b}$$

Vi kommer använda båda skrivsätten. Från exempel 1.13 har vi att $31 \equiv_{24} 7$. I fallet med klockan vill vi ange klockslaget mellan 0 och 24, vi säger att vi anger värdet med minsta möjliga icke-negativa tal. Man behöver inte alltid göra så. Det man ska tänka på när man räknar modulo k för något heltal k är att ett heltal n är ekvivalent med $n + k, n + 2k$ och så vidare.

Exempel 1.14.

$$18 \equiv_4 14 \equiv_4 10 \equiv_4 6 \equiv_4 2 \equiv_4 -2 \textit{ och så vidare.}$$

Exempel 1.15. *Idag är det tisdag, vad är det för veckodag om 37 dagar?*

Lösningsförslag: Eftersom det går 7 dagar på en vecka söker vi det minsta icke-negativa heltalet som är ekvivalent med 37 modulo 7. Det gäller att

$$37 \equiv_7 2$$

eftersom $37 = 7 \cdot 5 + 2$. 37 dagar är alltså detsamma som fem veckor och två dagar. Är vi bara intresserade av vilken veckodag det är efter 37 dagar kan vi lika gärna undersöka vilken veckodag det är efter två dagar. Om det är tisdag idag är det alltså torsdag om 37 dagar. ★

Vid moduloräkning kan kan man använda de tre räknesätten addition, subtraktion och multiplikation precis som vanligt. Division är däremot inte definierat i allmänhet.

Exempel 1.16. *Beräkna* $18 + 11$ *(mod 5). Ange svaret med ett så litet icke-negativt tal som möjligt, alltså mellan 0 och 4.*

Lösningsförslag 1: Vi lägger först ihop talen och tar reda på resten modulo 5.

$$18 + 11 = 29 \equiv 4 \text{ (mod 5)}$$

eftersom $29 = 5 \cdot 5 + 4$. ★

Ett annat sätt är att först ta reda på resten modulo 5 för de båda talen 4 och 18 och sedan addera dem.

Lösningsförslag 2:

$$18 + 11 \equiv_5 3 + 1 = 4.$$

★

Vid multiplikation och subtraktion kan man göra på samma sätt. Låt oss visa exempel på det också.

Exempel 1.17. *Beräkna* $12 - 7$ *(mod 3). Ange svaret med ett så litet icke-negativt tal som möjligt.*

Lösningsförslag: Vi har att $12 \equiv_3 0$ och $7 \equiv_3 1$ och kan därför lösa uppgiften enligt nedan.

$$12 - 7 \equiv_3 0 - 1 \equiv_3 -1 + 3 \equiv_3 2$$

Observera att vi i sista steget adderade tre eftersom -1 är ett negativt tal. ★

Exempel 1.18. *Beräkna* $6 \cdot 7$ *(mod 5). Ange svaret med ett så litet icke-negativt tal som möjligt.*

Lösningsförslag: Vi kan antingen först beräkna $6 \cdot 7 = 42$ och sedan ta reda på vilken om är det minsta icke-negativa heltalet kongruent med 42 modulo 5. Vi ser att $42 \equiv 2$ (mod 5). Eller så kan vi först betrakta sjuan, vi ser att $7 \equiv 2$(mod 5), och sedan sexan, $6 \equiv 1$(mod 5). Vi får

$$6 \cdot 7 \equiv_5 1 \cdot 2 \equiv_5 2.$$

★

För att se fördelen med att angripa faktorerna i en produkt innan vi utför multiplikationen, betrakta följande exempel.

Exempel 1.19. *Beräkna* $38 \cdot 41 + 43 \cdot 36$ *modulo* 3.

Lösningsförslag: Vi har att

$$38 = 12 \cdot 3 + 2, \quad 41 = 13 \cdot 3 + 2, \quad 43 = 14 \cdot 3 + 1 \quad \text{och } 36 = 12 \cdot 3 + 0.$$

Alltså är

$$38 \cdot 41 + 43 \cdot 36 \equiv_3 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \equiv_3 1 + 0 \equiv_3 1.$$

★

Låt oss sammanfatta det vi gjort i exemplen ovan.

Låt a vara ett heltal och låt m, m', n, n' vara hela tal sådana att $m \equiv m'$ (mod a) och $n \equiv n'$ (mod a). Då gäller följande

i) $m + n \equiv_a m' + n'$

ii) $m - n \equiv_a m' - n'$

iii) $m \cdot n \equiv_a m' \cdot n'$

Exempel 1.20. *Vilken rest erhålls då 231 divideras med 4?*

Lösningsförslag: Notera att vi kan skriva 211 som $211 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1$. Vi ser att $10 \equiv_4 2$ och $100 = 10 \cdot 10 \equiv_4 2 \cdot 2 = 4$. Om vi lägger samman detta får vi att

$$211 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1 \equiv_4 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \equiv_4 1.$$

★

Exempel 1.21. *Vad får jämna respektive udda tal för rest vid division med 2? Varför?*

Lösningsförslag: Vi börjar med att ta några exempel för att få en uppfattning om vad svaret bör vara.

$$1 \equiv_2 1, \quad 2 \equiv_2 0, \quad 3 \equiv_2 1, \quad 4 \equiv_2 0, \quad 5 \equiv_2 1$$

Vi ser att jämna tal får rest 0 vid division med 2, detta beror på att alla jämna tal kan skrivas som $2 \cdot n$ för något heltal n. De udda talen får rest 1 vid division med två eftersom de kan skrivas på formen $2 \cdot n + 1$ för något heltal n. ★

Övningar

1. Vilken rest erhålls då $18 + 7$ divideras med 5?
2. Vilken rest ger 64 vid division med 3?
3. Idag är det fredag. Vilken veckodag är det om 101 dagar?
4. Lars tar flyget till Grekland klockan 13.00 en fredag. Han landar i Sverige igen 233 timmar senare. Vilken tid landar han?

1.5 Representation av heltal

Vi är såpass vana med hur vi skriver tal att vi knappast lägger märkte till tanken bakom. Tio kronor skriver vi som 10 kr, och nittiofem kronor som 95 kr. Men det finns många andra sätt att skriva, eller med ett finare ord, *representera* tal på. Du har antagligen stött på romersk representation av tal, där ett, fem och tio skrivs som I, V respektive X. Det här avsnittet kommer att handla om hur man kan representera tal i olika *talbaser*.

Varför är detta intressant? Låt säga att du vill beskriva hur många femtio stenar är. Du kan givetvis rita femtio streck och säga att du ser en sten för varje streck. Denna metod fungerar inte så bra i praktiken, varför vi uppfann *positionssystemet*, som ett sätt att representera olika antal.

Låt oss titta på uttrycket 3526. Vilket antal representerar detta? Skulle vi gå till banken och ta ut denna summan pengar så skulle vi få precis tre stycken tusenlappar, fem hundralappar, två tiokronor och sex enkronor. Här ser vi ett tydligt mönster, varje mynt eller sedel motsvarar en viss potens av tio. Vi har alltså att $3526 = 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$. Att vi använder just talet tio härstammar från att vi har tio fingrar. Naturligtvis är 3526 inte alls samma som 5362, siffrornas position är betydande för talets värde och varje position motsvarar en viss potens av talet tio. Därför kallas vårt sätt att representera tal för positionssystemet med bas 10.

Men förutom att tio är antalet fingrar vi har på händerna så är det inget speciellt med detta tal. I det här avsnittet ska vi gå igenom hur vi kan representera tal i positionssystemet med bas 2.

En dator lagrar sin data i positionssystemet med bas 2. Positionssystemet med bas 2 kallas oftast för det *binära talsystemet*.

Allmänt så representerar vi heltal i bas tio enligt följande:

$$s_n s_{n-1} \dots s_1 s_0 = s_n \cdot 10^n + s_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + s_1 \cdot 10^1 + s_0 \cdot 10^0$$

Här är $s_n, s_{n-1}, \dots, s_1, s_0$ siffrorna i talet.

Exempel 1.22. *För talet* 3526 *är* $s_3 = 3$, $s_2 = 5$, $s_1 = 2$ *och* $s_0 = 6$.

Tanken är att representationen ska vara unik, varje tal ska bara kunna skrivas på ett enda sätt. Detta för att helt enkelt undvika förvirring. Därför måste det gälla för siffrorna s_i att $0 \leq s_i \leq 9$.

Heltal i det binära talsystemet

Om vi använder basen två i vårt talsystem så skulle talet 28 representeras på följande sätt.

Representation i bas 2:	1	1	1	0	0
Positionsvärde:	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Talets värde:	$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 28$				

Vi skriver detta som att $28_{10} = 11100_2$. I fortsättningen kommer vi inte att skriva ut 10:an för att markera att vi använder det decimala talsystemet, utan nöjer oss med att skriva $28 = 11100_2$.

Observera att i bas 2 använder vi bara två siffror, 0 och 1. Vi kan se det som att vi har 28 enkronor och växlar dessa till mynt med valörerna $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ och sedan anger hur många vi har av varje myntsort.

I allmänhet så representeras tal i bas 2 som följer.

Hur ett heltal skrivs i bas 2	
Representation i bas 2:	$\dots \quad s_4 \quad s_3 \quad s_2 \quad s_1 \quad s_0$
Positionsvärde:	$\dots \quad 2^4 \quad 2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0$
Talets värde:	$\dots + s_4 \cdot 2^4 + s_3 \cdot 2^3 + s_2 \cdot 2^2 + s_1 \cdot 2^1 + s_0 \cdot 2^0$

Exempel 1.23. *Skriv 18 i bas 2.*

Lösningsförslag: Vi börjar med att se efter vilken tvåpotens som är den största som är mindre (eller lika med) 18. Vi ser att $2^5 = 32$ är för stort $(32 > 18)$. Däremot funkar $2^4 = 16$ alldeles utmärkt. Vi har nu bara en tvåa kvar att konvertera eftersom $18 - 16 = 2$. Vi använder då att $2^1 = 2$ och ser att vi kan skriva 18 i bas 2. Vi får

$$18 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 10010_2.$$

★

Om man har ett tal skrivet i bas 2 kan man så klart också skriva om det i bas 10. Man använder helt enkelt samma metod fast baklänges. Låt oss illustrera detta med ett exempel.

Exempel 1.24. *Konvertera* 110_2 *till bas* 10.

Lösningsförslag: Vi skriver först om 110_2 i tvåpotenser och beräknar sedan

$$110_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6.$$

★

Övningar

1. Konvertera 34 till bas 2.
2. Konvertera 1101_2 till bas 10.

1.6 Rationella tal

Vi har nu tagit upp de positiva heltalen $\mathbb{Z}_+$, de naturliga talen $\mathbb{N}$ och heltalen $\mathbb{Z}$. Vi har även studerat moduloräkning och talrepresentationer. Nästa steg på vägen är de *rationella talen*.

Om a och b är två heltal så kommer lösningen till ekvationen

$$a + x = b$$

alltid att vara ett heltal eftersom

$$x = b - a$$

och heltalen ju är slutna under subtraktion. Men vad händer om vi vill lösa ekvationen

$$a \cdot x = b$$

där a och b är heltal? Är x ett heltal? Givetvis kan x vara ett heltal, exempelvis om $a = 4$ och $b = 12$ så är $x = 12/4 = 3$. Men om $a = 12$ och $b = 4$ så erhåller vi x genom att dividera båda leden i ekvationen

$$12 \cdot x = 4$$

med 4, så

$$x = 4/12 = 1/3.$$

Detta är ett bråktal, eller ett rationellt tal som man oftast kallar det och är ett tal som kan uttryckas som en kvot mellan två heltal, där nämnaren givetvis måste vara nollskild.

Bland de rationella talen kan man alltid hitta lösningen till ekvationen $a \cdot x = b$ för två heltal a och b där $a \neq 0$.

Namnet *rationella tal* kommer från den engelska termen *ratio* som betyder *förhållande*.

Kanske är du redan av uppfattningen att heltal i själva verket är specialfall av rationella tal, och så är det ju, eftersom varje heltal a kan skrivas som $a/1$.

Man betecknar mängden av alla rationella tal med $\mathbb{Q}$, efter det engelska ordet *quotient* som betyder *kvot*. Det gäller därför att mängden av heltal är en delmängd till mängden av rationella tal, vilket vi ju som bekant uttrycker som $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

När vi löste ekvationen $12x = 4$ så utnyttjade vi att

$$\frac{4}{12} = \frac{4}{3 \cdot 4} = \frac{\cancel{4}}{3 \cdot \cancel{4}} = \frac{1}{3}.$$

Vi säger att $1/3$ är skrivet på *förkortad form*. Att vi inte kan förkorta bråket $1/3$ mer beror på att 1 och 3 saknar gemensamma delare (förutom 1). Så för att hitta den förkortade formen av ett bråk a/b kan vi primtalsfaktorisera både a och b. När vi väl har funnit primtalsfaktoriseringen kan vi förkorta bråket så att de inte längre har gemensamma delare.

Exempel 1.25. *Förkorta* $90/105$.

Lösningsförslag 1: Vi har att $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ och att $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, så

$$\frac{90}{105} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{6}{7}.$$

★

Ibland kan det vara lätt att se att se att två bråk har en gemensam delare. Isåfall kan vi utföra förkortningen direkt. Låt oss därför titta på ett annat lösningsförslag.

Lösningsförslag 2: Vi ser att både 90 och 105 är delbara med 5, vi har nämligen att $90 = 5 \cdot 18$ och $105 = 5 \cdot 21$, så $90/105 = 18/21$. Vi har att $18 = 3 \cdot 6$ och $21 = 3 \cdot 7$, alltså är $90/105 = 18/21 = 6/7$.
★

Hur gör vi för att i allmänhet avgöra om två rationella tal a/b och c/d (där a, b, c, d är heltal och b och d är nollskilda) är lika? Det finns ett enkelt sätt av avgöra detta.

De rationella talen a/b och c/d är lika precis då $ad = bc$.

Exempel 1.26. $2/4 = 1/2$ *eftersom* $2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$.

Exempel 1.27. $3/5 = 9/15$ *eftersom* $3 \cdot 15 = 9 \cdot 5$.

Exempel 1.28. $\frac{-1}{4} = \frac{1}{-4}$ *eftersom* $(-1) \cdot (-4) = 4 \cdot 1$.

Observera att man ibland skriver sneda bråkstreck och ibland raka. Men det är ingen skillnad i betydelse, alltså gäller det att

$$a/b = \frac{a}{b}.$$

Följande räkneregler gäller för de rationella talen och följer från räknelagarna för heltalen.

$$\boxed{\begin{gathered} a/b + c/d = (ad + bc)/bd \\ (a/b) \cdot (c/d) = (a \cdot c)/(b \cdot d) \\ \tfrac{a}{b} / \tfrac{c}{d} = (a \cdot d)/(b \cdot c) \\ \tfrac{-a}{-b} = \tfrac{a}{b} \\ \tfrac{-a}{b} = \tfrac{a}{-b} = -\tfrac{a}{b} \end{gathered}}$$

Exempel 1.29. *Förenkla* $\frac{3}{4} + \frac{-4}{5}$.

Lösningsförslag:

$$\frac{3}{4} + \frac{-4}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot (-4)}{4 \cdot 5} = \frac{-1}{20} = -\frac{1}{20}$$

★

Exempel 1.30. *Förenkla* $\frac{3}{4} \cdot \frac{-4}{5}$.

Lösningsförslag 1:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{-4}{5} = \frac{3 \cdot (-4)}{4 \cdot 5} = \frac{-12}{20} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

★

Givetvis kan vi förkora bråket i det andra steget direkt. **Lösningsförslag** :2

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{-4}{5} = \frac{3 \cdot (-\cancel{4})}{\cancel{4} \cdot 5} = \frac{3 \cdot (-1) \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 5} \frac{3 \cdot -1}{1 \cdot 5} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

★

Exempel 1.31. *Förenkla* $\frac{\frac{-3}{4}}{\frac{5}{4}}$.

Lösningsförslag:

$$\frac{\frac{-3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{-3 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 5} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

★

Säkert tänker du nu att mängden $\mathbb{Q}$ är sluten under division. Detta skulle betyda att om $p, q \in \mathbb{Q}$ så gäller att $p/q \in \mathbb{Q}$ för två godtyckliga rationella tal p, q. Men detta kan inte stämma i det allmänna fallet. För även talet 0 är ju ett rationellt tal och $p/0$ är inte definierat. För att slutenhet ska gälla vid division måste vi alltså betrakta mängden av rationella tal minus (d.v.s. utan) talet 0, alltså mängden $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Inom denna mängd gäller att division av två godtyckliga element (nollskilda rationella tal) ger oss ett element i samma mängd. Givetvis är mängden av alla rationella tal $\mathbb{Q}$ sluten under addition, subtraktion och multiplikation då alla dessa operationer med rationella tal resulterar i rationella tal.

1.7 Reella tal

Om ett rationellt tal är ett tal som kan uttryckas som en kvot mellan två heltal, så är ett *irrationellt* tal ett tal som *inte* kan uttryckas som en sådan kvot.

Att det finns tal som inte är rationella upptäcktes av Pythagoras (500-talet f kr). Du känner säkert till Pythagoras sats för en rätvinklig triangel:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

där a, b betecknar kateterna och c hypotenusan. Mer om rätvinkliga trianglar och Pythagoras sats finns att läsa i kapitel 3. Om $a = b = 1$ så ger Pythagoras sats $1^2 + 1^2 = c^2$ vilket ger oss $c^2 = 2$, och då c betecknar en längd är den ett positivt tal, nämligen $\sqrt{2}$. Vi kallar $\sqrt{2}$ för ett irrationellt tal. Att detta tal inte kan uttryckas som en kvot av två heltal är ganska enkelt att visa. Man antar att $\sqrt{2} = a/b$ för två heltal a och b och visar att detta leder till en motsägelse. Detta bevis, utfördes av Aristoteles (300-talet f kr) och är ett utmärkt exempel på ett motsägelsebevis. Ett annat exempel på ett irrationellt tal är π.

De irrationella talen utgör tillsammans med de rationella talen de *reella talen*. De reella talen utgörs av alla punkter på en kontinuerlig linje som brukar kallas den reella tallinjen. Varje punkt på tallinjen svarar alltså mot ett reellt tal. De reella talen betecknas med $\mathbb{R}$. Som bekant betecknas de rationella talen med $\mathbb{Q}$ men det finns ingen särskild beteckning för de irrationella talen. Då de utgörs av alla tal som är reella men inte rationella så ligger de i mängden $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, där $\setminus$-tecknet kallas mängdminus. Du kan läsa mer om mängder i kapitel 3.

Även om de rationella talen ligger oändligt tätt längs tallinjen, så finns även ett oändligt antal hål på tallinjen och det är dessa som utgörs av de irrationella talen. Att de rationella talen ligger oändligt tätt ska tolkas som att det mellan två godtyckliga rationella tal alltid finns oändligt många rationella tal. Men för att få med alla tal på tallinjen måste vi alltså ta med både de rationella och de irrationella talen.

Mer om potenser

I heltalskapitlet stötte vi på potensbegreppet. Vi ska nu generalisera begreppet till de reella talen, men vi måste vara lite försiktiga. Vi kommer att titta på två olika fall.

1. Basen är ett reellt tal och exponenten är ett heltal, t.ex. $(-\sqrt{2})^2$ eller 2^{-3}.
2. Basen är ett positivt reellt tal och exponenten är ett rationellt tal, t.ex. $4^{1/2}$ eller $\sqrt{2}^{-2/3}$.

Vi börjar med fall 1. Först låter vi exponenten vara ett positivt heltal. Det är naturligt att låta

$$r^a = \underbrace{r \cdots r}_{a \text{ gånger}}.$$

Exempel 1.32. *Vi räknar det första exemplet från ovan. Vi får*

$$(-\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Låt nu exponenten vara ett icke-positivt heltal. Vi definierar

$$r^0 = 1 \text{ når} r \neq 0 \quad \text{ och } r^{-a} = \frac{1}{r^a}.$$

Observer alltså att $4^0 = (-13)^0 = (\sqrt{2})^0 = (\frac{1}{4})^0 = 1$, men att 0^0 inte är definierat.

Exempel 1.33. *Vi räknar det andra exemplet från ovan och får.*

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Vi fortsätter med fall 2, där exponenten alltså är ett rationellt tal och basen ett icke-negativt heltal. När a är ett icke-negativt heltal definierar vi $a^{1/2}$ som det positiva tal b vars kvadrat är lika med a, alltså det positiva tal för vilket det gäller att $b^2 = a$. På liknande sätt definierar vi, då a är ett icke-negativt heltal, $a^{1/n}$ som det positiva tal b som upphöjt till n är lika med a, d.v.s. $b^n = a$.

Istället för $a^{1/2}$ kan man skriva $\sqrt{a}$ vilket vi utläser "kvadratroten av a". Man kan även skriva $a^{1/n}$ som $\sqrt[n]{a}$, vilket utläses "n:te roten av a".

Exempel 1.34.

$$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2, \quad 27^{1/3} = (3^3)^{1/3} = 3^{3\cdot(1/3)} = 3^1 = 3, \quad (2^{10})^{1/10} = 2$$

Observera att $2^2 = (-2)^2 = 4$, men att $\sqrt{4} = 2$, eftersom vi kräver att $\sqrt{4}$ ska vara positivt.

Slutligen, om a är är ett icke-negativt heltal så definierar vi

$$a^{c/d} = (a^c)^{1/d}.$$

Exempel 1.35. *Förenkla* $4^{3/2}$.

Lösningsförslag 1: Vi använder definitionen och skriver $4^{3/2} = (4^3)^{1/2}$. Vi fortsätter och får $(4^3)^{1/2} = 64^{1/2} = 8$ eftersom $8^2 = 64$. ★

Lösningsförslag 2: Man kan också utnyttja potenslagen $(a^b)^c = a^{bc}$ och omskrivningen $4 = 2^2$ för att få

$$4^{3/2} = (2^2)^{3/2} = 2^{2 \cdot 3/2} = 2^3 = 8.$$

★

För att se fördelen med det senare sättet, betrakta $128^{4/7}$. Att beräkna 128^4 och sedan försöka finna sjunderoten av det talet är givetvis inte att föredra framför omskrivningen $128 = 2^7$ och räkningen $2^{7 \cdot 4/7} = 2^4 = 16$.

Exempel 1.36. *Förenkla* $\sqrt{2}^{-2/3}$.

Lösningsförslag 1:

$$\sqrt{2}^{-2/3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2/3} = \left(\frac{1^2}{\sqrt{2}^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = \frac{1^{1/3}}{2^{1/3}} = \frac{1}{2^{1/3}} = 2^{-1/3}.$$

★

Lösningsförslag 2:

$$\sqrt{2}^{-2/3} = (\sqrt{2}^2)^{-1/3} = 2^{-1/3}.$$

★

Vi har hittills bara tittat på snälla potenser som vi förenklat till heltal, rationella tal eller reella tal. Paradexemplet på att det inte alltid är så är $\sqrt{-1} = (-1)^{1/2}$ som *inte* är något reellt tal eftersom det inte finns något reellt tal vars kvadrat är negativ. Detta leder oss till de komplexa talen.

1.8 Komplexa tal

Man kan tycka att de reella talen, $\mathbb{R}$, är alla tal man någonsin skulle behöva här i livet. Men på 1500-talet insåg man att man behövde uppfinna ett nytt slags tal för att kunna lösa vissa ekvationer, t.ex. ekvationen $x^2 = -1$.

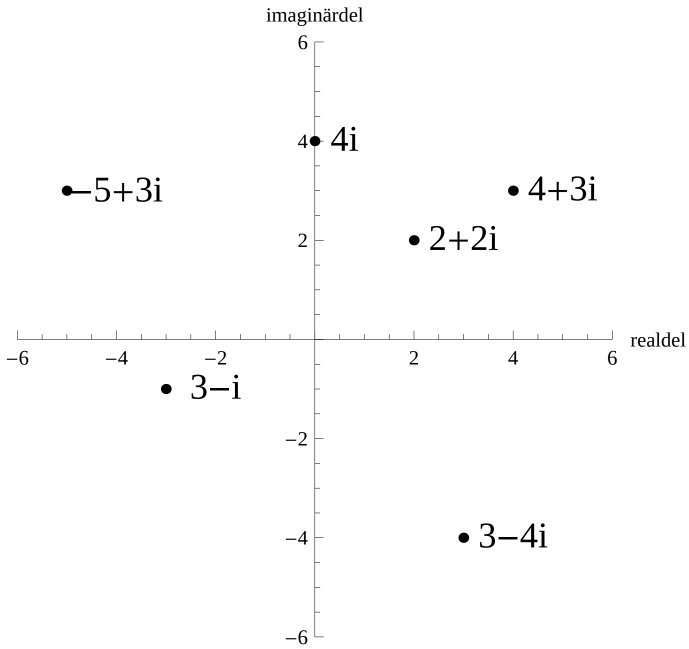
Varje komplext tal z består av en reell del och en imaginär del och z kan skrivas som $x + yi$, där x och y är reella tal och i är den *imaginära enheten*. Den imaginära enheten i har egenskapen att $i^2 = -1$, vilket är precis det som krävs för att vi ska kunna lösa ekvationen $x^2 = -1$.

Varje komplext tal $x+yi$ svarar alltså mot ett par (x, y) av reella tal. Vi kallar x för *realdelen*, och y för *imaginärdelen*. Realdelen av ett komplext tal z skrivs $Re(z)$, och imaginärdelen skrivs $Im(z)$.

Bildligt talat kan man säga att när man inför de komplexa talen så lägger man till en ny dimension. De reella talen kan representeras på en tallinje, medan de komplexa talen kan framställas i ett talplan, där realdelen är x-koordinaten och imaginärdelen är y-koordinaten.

Mängden av alla komplexa tal skrivs $\mathbb{C}$. Observera att de komplexa tal vars imaginärdel är 0, kommer vara de vanliga reella talen, $\mathbb{R}$. Detta innebär att

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$



Figur 1.1: Här är det komplexa talplanet med några komplexa tal utmärkta.

Addera, subtrahera och multiplicera komplexa tal

I allmänhet när man adderar komplexa tal gäller det att

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

där x_1, x_2, y_1, y_2 är reella tal. Subtraktion behandlas på liknande sätt och vi har att

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

Så här långt så är det inte så märkligt, vi adderar och subtraherar real- och imaginärdelarna var för sig. Men när vi ska multiplicera två komplexa tal blir det annorlunda

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

Här har vi alltså använt att $i^2 = -1$.

Exempel 1.37. *Låt $z = 1 - 2i$ och $w = 3 + 4i$. Beräkna $z + w$, $z - w$ och $z \cdot w$.*

Lösningsförslag: Vi använder reglerna ovan och får

$$z + w = (1 - 2i) + (3 + 4i) = 1 + 4 - 2i + 4i = 5 + 2i.$$

Subtraktion ger att

$$z - w = (1 - 2i) - (3 + 4i) = 1 - 3 - 2i - 4i = -2 - 6i.$$

Vi utför sedan multiplikationen och får

$$z \cdot w = (1 - 2i) \cdot (3 + 4i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4i - 2 \cdot 3i - 2 \cdot 4i^2 = 3 - (-2 \cdot 4) - 6i = 11 - 2i.$$

Alltså har vi att $z + w = 5 + 2i$, $z - w = -2 - 6i$, $z \cdot w = 11 - 2i$. ★

De regler som gäller för reella tal fungerar även för komplexa tal. Observera att vi ännu inte gett någon metod för att dividera två komplexa tal. Detta gör vi i nästa avsnitt.

Du kan själv verifiera att för komplexa tal z, w och v gäller det att

$z + w = w + z$	Kommutativa lagen för addition
$(z + w) + v = z + (w + v)$	Associativa lagen för addition
$z \cdot w = w \cdot z$	Kommutativa lagen för multiplikation
$(z \cdot w) \cdot v = z \cdot (w \cdot v)$	Associativa lagen för multiplikation
$z \cdot (w + v) = z \cdot w + z \cdot v$	Distributiva lagen

Exempel 1.38. *Beräkna* $(2i)^3$.

Lösningsförslag: Vi har att $(2i)^3 = 2^3 \cdot i^3$ som blir $8i^3$. Vidare så är $i^3 = i^2 \cdot i$ och $i^2 = -1$. Alltså är $8i^3 = -8i$. ★

1.9 Konjugatregeln och kvadreringsreglerna

Genom att använda den distributiva lagen och den kommutativa lagen för multiplikation ska vi härleda kvadreringsreglerna och konjugatregeln. Eftersom den kommutativa och den distributiva lagen gäller för alla våra talsystem så kommer dessa regler gälla allmänt.

Vi noterar först att

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

Genom att betrakta specialfallet $a = c$ och $b = d$ får vi följande formel, som kallas *kvadreringsregeln*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ibland kallas denna regel istället första kvadreringsregeln och då vi byter ut b mot $-b$ får vi det som ibland kallas *andra kvadreringsregeln.* Då gäller alltså:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Nedan följer några exempel där kvadreringsregeln kan vara praktisk att använda.

Exempel 1.39. *Använd kvadreringsregeln för att beräkna* 101^2.

Lösningsförslag: Ett bra sätt att beräkna kvadraten på ett mer komplicerat tal är att skriva om talet som summan av två tal vars kvadrater lätt kan beräknas. I detta exempel är det praktiskt att göra följande omskrivning $101^2 = (100 + 1)^2$. Vi kan nu enkelt använda kvadreringsregeln för att beräkna kvadraten.

$$(100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$$

★

Exempel 1.40. *Faktorisera* $x^2 - 2x + 1$.

Lösningsförslag: Här kan vi direkt använda andra kvadreringsregeln (med $a = b = 1$).

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

★

Exempel 1.41. *Faktorisera uttrycket*

$$x^3 + 4x^2 + 4x.$$

Lösningsförslag: Vi börjar med att bryta ut x eftersom x finns i alla termer i uttrycket.

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4),$$

och därefter använder vi första kvadreringsregeln baklänges

$$x(x^2 + 4x + 4) = x(x + 2)^2.$$

★

Konjugatregeln

Konjugatregeln säger att

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Regeln gäller eftersom

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2,$$

där vi använde oss av den kommutativa lagen som säger att $ab = ba$.

Exempel 1.42. *Skriv om uttrycket $(2x + y)(2x - y)$ med hjälp av konjugatregeln.*

Lösningsförslag: Vi tillämpar konjugatregeln och får

$$(2x + y)(2x - y) = (2x)^2 - y^2 = 2x \cdot 2x - y^2 = 4x^2 - y^2.$$

★

Sammanfattningsvis har vi följande räkneregler:

Första kvadreringsregeln: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.
Andra kvadreringsregeln: $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.
Konjugatregeln: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Exempel 1.43. *Förkorta följande uttryck så långt som möjligt.*

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + x}{4x^2 - 1}$$

Lösningsförslag: Det kan vara svårt att veta vart man ska börja. En bra sak att börja leta efter är ifall man kan bryta ut något. Vi ser att alla termer i täljaren innehåller x, varför vi kan bryta ut x ur täljaren. Vi får:

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + x}{4x^2 - 1} = \frac{x(4x^2 + 4x + 1)}{4x^2 - 1}.$$

Vi kan sedan börja fundera över om vi kan använda någon kvadreringsregel eller konjugatregeln. Vi ser att första kvadreringsregeln kan användas på täljaren och konjugatregeln kan användas på nämnaren. Vi får att

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + x}{4x^2 - 1} = \frac{x(4x^2 + 4x + 1)}{4x^2 - 1} = \frac{x(2x + 1)^2}{(2x + 1)(2x - 1)}.$$

Därefter letar vi efter gemensamma faktorer i uttrycket. Vi ser att vi kan bryta ut $(2x+1)$ ur både täljare och nämnare, det innebär att vi kan dela både täljaren och nämnaren med $(2x+1)$. Detta ger oss:

$$\frac{4x^3+4x^2+x}{4x^2-1} = \frac{x(4x^2+4x+1)}{4x^2-1} = \frac{x(2x+1)^2}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{x(2x+1)}{(2x-1)}.$$

Hur vet vi då att vi är klara? Jo, både täljare och nämnare är faktoriserade så långt som möjligt och vi kan inte hitta några fler gemensamma faktorer. ★

Tillämpning av konjugatregeln på komplexa tal

En intressant tillämpning av konjugatregeln är att skriva om bråk av komplexa tal. Om $z = x+iy$, så definierar vi *konjugatet* till z som $x - iy$. Detta betecknar vi med $\bar{z}$. Låt oss använda konjugatregeln för att multiplicera ihop z och dess konjugat. Vi får

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - (i)^2y^2 = x^2 - (-1)y^2 = x^2 + y^2.$$

Exempel 1.44. *Låt $z = 4+i$. Då är $\bar{z} = 4 - i$ och $z \cdot \bar{z} = 4^2 + 1^2 = 17$.*

Produkten av de två komplexa talen z och $\hat{z}$ är alltså ett positivt *reellt* tal. Låt nu z vara ett nollskilt komplext tal och skriv $z = x + yi$. Vi ska nu visa hur man kan skriva om $1/z$ på formen $a + bi$, där a och b är reella tal. Idén är att förlänga bråket $1/z$ med konjugatet.

$$\frac{1}{z} = \frac{1\cdot\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{(x^2+y^2)} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i.$$

Vi har alltså lyckats skriva $1/z$ på formen $a + bi$ där $a = x/(x^2+y^2)$ och $b = -y/(x^2+y^2)$.

Exempel 1.45. *Skriv $1/(2+3i)$ på formen $a+bi$, där a och b är reella tal.*

Lösningsförslag: Konjugatet till $2+3i$ är $2-3i$. Vi förlänger bråket med konjugatet och får

$$1/(2+3i) = \frac{2-3i}{(2+3i)\cdot(2-3i)} = \frac{2-3i}{2^2-(3i)^2} = \frac{2-3i}{4+-(-9)} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i.$$

★

Nästa exempel visar att vi även kan skriva ett komplext tal z/w på formen $a+bi$.

Exempel 1.46. *Skriv $(4+i)/(1+\sqrt{2}i)$ på formen $a+bi$.*

Lösningsförslag: Konjugatet till $1+\sqrt{2}i$ är $1-\sqrt{2}i$. Vi förlänger bråket med konjugatet och får

$$\begin{aligned}(4+i)/(1+\sqrt{2}i) &= \frac{(4+i)(1-\sqrt{2}i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)} = \frac{4+i-4\sqrt{2}i-\sqrt{2}i\cdot i}{1-(\sqrt{2}i)^2} \\ &= \frac{4+\sqrt{2}+(1-4\sqrt{2})i}{3} = \frac{4+\sqrt{2}}{3} + \frac{1-4\sqrt{2}}{3}i.\end{aligned}$$

★

Övningar

1. Förkorta följande uttryck så långt som möjligt.

   (a) $\frac{x+x^2+xy}{1+x+y}$

   (b) $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$

   (c) $\frac{x^5y^y-x^4y^2}{x^5y-x^3y}$

2. Skriv $(4+i)/(1-i)$ på formen $a+bi$.

Kapitel 2

Algebra, kombinatorik och lite logik

2.1 Polynom och polynomekvationer

En *förstagradsekvation* eller en linjär ekvation är en ekvation som kan skrivas på formen $ax + b = 0$ där a och b är konstanter, och $a \neq 0$. Ett sådant uttryck kallas för ett linjärt uttryck eftersom variabeln x förekommer med högsta exponent ett. Lösningen är, som vi tidigare har sett, givetvis $x = -b/a$ vilket vi får efter att ha flyttad över b till högersidan och sedan dividerat båda leden i ekvationen med a. Exempelvis har ekvationen $5x + 3 = 0$ lösningen $x = -3/5$. Vi säger att $-3/5$ är en *rot* till ekvationen $5x + 3 = 0$.

En förstagradsekvation kan skrivas på många sätt, t.ex. är

$$4x - 2 = x + 7$$

en förstagradsekvation eftersom vi kan dra bort 7 från båda leden och få

$$4x - 9 = x$$

och sedan dra bort x från båda leden för att få

$$3x - 9 = 0.$$

Vill vi däremot *lösa* ekvationen

$$4x - 2 = x + 7$$

så kan vi förfara på ett effektivare sätt. Vi lägger till 2 till båda leden och får

$$4x = x + 9$$

Sedan subtraherar vi x från båda leden och erhåller

$$3x = 9$$

Slutligen dividerar vi båda leden med 3 vilket ger lösningen

$$x = 3.$$

Vi kan verifiera att detta svar är korrekt genom att sätta in $x = 3$ i den ursprungliga ekvationen. Vänsterledet är $4x - 2$ som blir $4 \cdot 3 - 2 = 10$, och högerledet blir $3 + 7 = 10$ så lösningen är korrekt.

En *andragradsekvation* har den allmänna formen $ax^2 + bx + c = 0$, där a, b och c är konstanter och $a \neq 0$. På liknande sätt har en *tredjegradsekvation* den allmänna formen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, där a, b, c och d är konstanter och $a \neq 0$. Innan vi generaliserar detta begrepp så introducerar vi begreppet *polynom*.

Polynom

Ett polynom av *grad* n i en variabel x är ett algebraiskt uttryck på formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

där $a_n \neq 0$. Polynomets *koefficienter* är a_j:na. Dessa är tal, de kan vara reella tal, komplexa tal eller heltal — vilket man nu bestämmer sig för. Med polynomets grad avses alltså den högsta potensen av x i uttrycket ovan. Observera att vi tillåter polynom av grad noll.

Exempel 2.1. $2x^5 - 1$ *är ett polynom med heltalskoefficienter av grad fem och* $\sqrt{2}$ *är ett polynom av grad noll med reella koefficienter.*

Multiplicerar man ett polynom i x av grad n med ett annat annat polynom i x av grad m så kommer det resulterande polynomet att ha grad $m + n$.

Exempel 2.2. *Polynomet* $(x^3 + x) \cdot (x^2 + x + 1)$ *har grad fem eftersom* $3 + 2 = 5$*. Lås oss verifiera detta genom att utföra beräkningen.*

$$\begin{aligned}(x^3 + x) \cdot (x^2 + x + 1) &= x^3 \cdot (x^2 + x + 1) + x \cdot (x^2 + x + 1)\\ &= x^5 + x^4 + x^3 + x^3 + x^2 + x = x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x,\end{aligned}$$

vilket mycket riktigt är ett polynom av grad fem.

Vad händer då med graden vid addition eller subtraktion av två polynom? Graden av summan eller differensen av två polynom kan aldrig bli större än graden av det polynom som har högst grad, men gradtalet kan i övrigt bli vad som helst. Vad gradtalet blir beror på hur koefficienterna ser ut.

Om högstagradskoefficienterna till exempel tar ut varandra så sänks onekligen det resulterande polynomets grad.

Exempel 2.3. *Polynomet*

$$(5x^5 + 2x^2 + 1) + (8x^4 - 7x^3 - x) = 5x^5 + 8x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 1$$

har grad 5*, polynomet*

$$(5x^5 + 2x^2 + 1) + (-5x^5 + x^2) = 3x^2 + 1$$

har grad 2 *och polynomet*

$$(5x^5 + 2x^2 + 1) - (5x^5 + 2x^2) = 1$$

har grad 0*.*

Polynomekvationer

När vi har lärt oss vad ett polynom är så kan vi säga att en förstagradsekvation är på formen $p(x) = 0$, där $p(x)$ är ett polynom av grad ett och ekvationen $p(x) = 0$ är en andragradsekvation precis då graden på $p(x)$ är två. I allmänhet säger vi att en n:te-gradsekvation är en ekvation $p(x) = 0$, där $p(x)$ är ett polynom av grad n.

Vi har tidigare sett att en anledning till att införa de rationella talen är för att kunna lösa förstagradsekvationen $ax + b = 0$, där a och b är heltal.

På samma sätt infördes de komplexa talen för att kunna lösa en godtycklig andragradsekvation $ax^2 + bx + c = 0$. Som bekant har ju ekvationen $x^2 + 1 = 0$ inga reella lösningar, eftersom det inte finns något reellt tal vars kvadrat är minus ett.

Lösningen till en andragradsekvation

Vi löser en andragradsekvation genom så kallad *kvadratkomplettering*. Lösningsmetoden är ett exempel på en matematisk *algoritm*. Vi börjar med att betrakta ekvationen

$$x^2 - a = 0.$$

Om a är skilt från noll finns det två tal som uppfyller ekvationen, nämligen $\sqrt{a}$ och $-\sqrt{a}$ eftersom $\sqrt{a}^2 = a$ och $(-\sqrt{a})^2 = a$.

Exempel 2.4. *Ekvationen* $x^2 - 16 = 0$ *har lösningarna* $\sqrt{16} = 4$ *och* $-\sqrt{16} = -4$*.*

Exempel 2.5. *Ekvationen* $x^2 + 5 = 0$ *har lösningarna* $\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$ *och* $-\sqrt{-5} = -\sqrt{5}i$*.*

Säg nu istället att vi vill lösa ekvationen

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Vi börjar då med att *kvadratkomplettera* vänsterledet. Detta innebär att vi i uttrycket $x^2 + 2x - 3$ som innehåller både en x^2-term och en x-term samlar dessa båda i en gemensam kvadrat. I detta fallet får vi termerna x^2 och $2x$ via kvadraten $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Men vi får även konstanten 1 på köpet här, så vi måste kompensera med någon konstant för att inte ändra vänsterledet. Man inser efter en stunds eftertanke att

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 1 - 3$$

och därmed kan vi alltså med hjälp av kvadratkompletteringen skriva om vår andragradsekvation

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \text{som} \quad (x + 1)^2 - 4 = 0.$$

Adderar vi 4 till båda leden fås

$$(x + 1)^2 = 4$$

I vänsterledet har vi ett uttryck vars kvadrat är 4. De tal vars kvadrat är 4 är talen $-\sqrt{4}$ och $\sqrt{4}$, vilket kort skrivs $\pm\sqrt{4}$. Alltså har vi att

$$(x + 1) = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Vi subtraherar ett från båda leden och får till sist

$$x = -1 \pm 2,$$

vilket ger oss de två lösningarna $x_1 = 1$ och $x_2 = -3$. Båda dessa $x-$värden uppfyller ekvationen. Försäkra dig om att detta gäller genom att sätta in lösningarna i den ursprungliga ekvationen. Detta kallas för *insättning*.

Kvadratkomplettering av $ax^2 + bx + c$

Vi ska nu formalisera vad vi gör och formulera en lösningsmetod för allmänna andragradsekvationer. Ett resultat av vår lösningsmetod är att vi bevisar den så kallade *pq*-formeln som brukar läras ut på gymnasiet för att lösa andragradsekvationer.

Betrakta polynomekvationen $ax^2 + bx + c = 0$, där $a \neq 0$. Eftersom a är skilt från noll kan vi dela båda sidor av ekvationen med a och få

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Läsaren bör nu övertyga sig om att lösningarna till ekvationen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

är desamma som lösningarna till ekvationen

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

När vi ska lösa en andragradsekvation räcker det alltså att hitta en metod för att lösa ekvationer av typer $x^2 + px + q$.

Det fundamentala steget i kvadratkompletteringsalgoritmen är observationen

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Detta uttryck stämmer överens med uttrycket $x^2 + px + q$ så när som på konstanttermen.

För att kompensera för den konstant som denna kvadrat ger upphov till, $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, måste man subtrahera denna. Således har vi

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

vilket ger

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Slutligen subtraherar vi $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ från båda leden vilket ger oss de två lösningarna:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Låt oss sammanfatta algoritmen. Vi ska alltså lösa en andragradsekvation $ax^2 + bx + c = 0$ där $a \neq 0$.

1. Dela båda sidor med a för att få
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$
2. Skriv om ekvationen som
$$\left(x + \frac{b/a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b/a}{2}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0.$$
3. Flytta över konstanttermerna till högerledet, d.v.s.
$$\left(x + \frac{b/a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b/a}{2}\right)^2 - \frac{c}{a}.$$
4. Finn de tal y_1 och y_2 vars kvadrat är lika med
$$\left(\frac{b/a}{2}\right)^2 - \frac{c}{a}.$$
5. Lösningarna x_1 och x_2 till ekvationen är då
$$x_1 = y_1 - \frac{b/a}{2} \quad \text{och} \quad x_2 = y_2 - \frac{b/a}{2}.$$

En förstagradsekvation har exakt en lösning, medan en andragradsekvation har som mest två lösningar. Ibland kan en andragradsekvation bara ha en lösning, t.ex. har $x^2 = 0$ bara lösningen $x = 0$. Som vi tidigare har sett finns det andragradsekvationer som saknar lösningar över de reella talen, exempelvis $x^2 + 1 = 0$.

Exempel 2.6. *Lös $x^2 + 2x - 3 = 0$ med hjälp av pq–formeln och sedan med kvadratkompletteringsalgoritmen.*

Lösningsförslag 1: Vi sätter in $p = 2$ och $q = -3$ i formeln och får att $x = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 - (-3)} = -1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -3$. ★

Lösningsförslag 2: Eftersom koefficienten framför x^2 är ett är vi klara med det första steget i algoritmen. I andra steget skriver vi om ekvationen som

$$\left(x + \frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 + (-3) = (x+1)^2 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4 = 0.$$

I tredje steget flyttar vi över konstanttermerna till högersidan och vi får

$$(x-1)^2 = 4.$$

I fjärde steget noterar vi att de tal y_1 och y_2 vars kvadrat är 4 är 2 och -2. I femte steget erhåller vi $x_1 = y_1 - 1 = 1$ och $x_2 = y_2 - 1 = -3$. ★

Exempel 2.7. *Lös ekvationen $3x^2 - 5x = 0$ med hjälp av $pq-$ formeln och sedan med kvadratkomplettering.*

Lösningsförslag :1 Först dividerar vi hela ekvationen med konstanten 3 och får då $x^2 - (5/3)x = 0$ som vi löser med pq-formeln (observera att $q = 0$): $x_{1,2} = \frac{5/3}{2} \pm \sqrt{(\frac{5/3}{2})^2} = \frac{5/3}{2} \pm \frac{5/3}{2}$. Det vill säga $x_1 = 5/3$ och $x_2 = 0$ är ekvationens lösningar. ★

Lösningsförslag :2 I första steget delar vi båda sidor av ekvationen med 3 och får $x^2 - (5/3)x = 0$. I andra steget skriver vi om vänsterledet av ekvationen som $(x - \frac{5/3}{2})^2 - (\frac{5}{3})^2$. I tredje steget flyttar vi över konstanttermerna till högersidan och vi får $(x - \frac{5/3}{2})^2 = (\frac{5}{3})^2$. I fjärde steget noterar vi att de tal y_1 och y_2 vars kvadrat är $(\frac{5}{3})^2$ är $-\frac{5}{3}$ och $\frac{5}{3}$. I femte steget erhåller vi lösningarna som $-\frac{5/3}{2} + \frac{5/3}{2} = 0$ och $\frac{5/3}{2} + \frac{5/3}{2} = 5/3$. ★

Det finns ett tredje sätt att lösa ekvationen $3x^2 - 5x = 0$. Vi noterar att $3x^2 - 5x = x(3x - 5)$. Om detta uttryck ska vara lika med noll så måste antingen x vara noll eller så måste $(3x - 5)$ vara noll, vilket ger lösningarna 0 och $5/3$. Vi har *faktoriserat* ekvationen $3x^2 - 5x$. Mer om detta i nästa avsnitt.

Hittills har vi bara fått positiva tal under rottecknet och därmed bara fått reella lösningar, men givetvis fungerar formeln och algoritmen även då lösningarna är komplexa tal med nollskild imaginärdel.

Exempel 2.8. *Lös ekvationen $x^2 + x + 1$ med pq-formeln och med kvadratkomplettering.*

Lösningsförslag 1:
Från pq-formeln får vi $x_{1,2} = -1/2 \pm \sqrt{(1/2)^2 - 1} = -1/2 \pm \sqrt{-3/4}$. Vi har att

$$\sqrt{-3/4} = \sqrt{(-1)\cdot(3/4)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{3/4} = i\cdot\sqrt{3}/\sqrt{4} = i\cdot\sqrt{3}/2,$$

så $x_1 = (-1 + i\sqrt{3})/2$ och $x_2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$.

★

Lösningsförslag 2: Eftersom koefficienten framför x^2 är ett är vi klara med det första steget i algoritmen. I andra steget skriver vi om vänsterledet i ekvationen som $(x + 1/2)^2 - (\frac{1}{2})^2 + 1 = (x + 1/2)^2 - 1/4 + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4$. I tredje steget flyttar vi över konstanttermerna till högersidan och vi får $(x + 1/2)^2 = -3/4$. I fjärde steget har vi att de tal y_1 och y_2 vars kvadrat är $-3/4$ är $\sqrt{-3/4} = i\sqrt{3}/2$ och $-\sqrt{-3/4} = -i\sqrt{3}/2$. I femte steget erhåller vi lösningarna som $i\sqrt{3}/2 - 1/2 = (-1 + i\sqrt{3})/2$ och $-i\sqrt{3}/2 - 1/2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$. ★

Övningar

Finn lösningarna till ekvationen $p(x) = 0$, där

1. $p(x) = x^2 + x + 1$.
2. $p(x) = 3x^2 + 2x - 5$,
3. $p(x) = (3 - x)(4 + x)$,

2.2 Faktorsatsen och polynomdivision

Polynomdivision

Liksom med vanliga tal kan man också dividera polynom med varandra. När man dividerar två tal med varandra så kan divisionen antingen gå jämnt ut så som $32/8 = 4$, eller så får vi en rest. Om vi dividerar 33 med 8 så får vi resten 1 eftersom $33 = 8 \cdot 4 + 1$.

För två tal a och b gäller generellt att divisionen kan uttryckas som $a = k \cdot b + r$ där k kallas kvoten och r resten. Resten blir noll om divisionen går jämnt ut. Om vi vill dividera polynomet $p(x)$ med polynomet $q(x)$ kan vi på motsvarande sätt skriva

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x).$$

Polynomet $g(x)$ kallas för kvoten och polynomet $r(x)$ är restpolynomet.

Om $r(x)$ är identiskt lika med noll (lika med noll för varje värde på x) kallas det för nollpolynomet. Om detta är fallet gäller det att $p(x)$ delbart med $q(x)$. Det gäller alltid att graden av restpolynomet $r(x)$ är strikt mindre än graden av divisorn $q(x)$, som är polynomet vi dividerar med. Detta kan förstås inses på samma sätt som man lätt inser att vid division av två tal a och b måste resten vara strikt mindre än b. Då kan man skriva $a = k \cdot b + r$ där $r < b$. Annars skulle ju r kunna uttryckas som $r = b + s$ för något tal s och vi skulle få

$$a = k \cdot b + r = k \cdot b + (b + s) = (k + 1) \cdot b + s$$

och om nu inte $s < b$ så kan vi fortsätta så här tills resten är strikt mindre än divisorn.

Divisionsalgoritmen för polynom

Man använder samma divisionsalgoritm som för heltal. Metoden illustreras lättast genom ett konkret exempel.

Exempel 2.9. *Dividera $p(x)$ med $q(x)$ där $p(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 6$ och $q(x) = x^2 + 4$. Vad blir kvoten och vad blir resten?*

Lösningsförslag: Vi noterar att $2x \cdot q(x) = 2x^3 + 8x$, så att om vi subtraherar $2x \cdot q(x)$ från $p(x)$ så försvinner högstagradstermen.

$$p(x) - 2x \cdot q(x) = (2x^3 + x^2 + 2x + 6) - (2x^3 + 8x) = x^2 - 6x + 6$$

Med andra ord har vi

$$p(x) = 2x \cdot q(x) + (x^2 - 6x + 6).$$

Men graden av restpolynomet måste vara strikt mindre än divsorpolynomets grad. I vårt fall ska vi ha en rest med grad strikt mindre än 2, så vi måste fortsätta. Vi ser att

$$(x^2 - 6x + 6) - 1 \cdot q(x) = (x^2 - 6x + 6) - 1 \cdot (x^2 + 4) = -6x + 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 6x + 6) = 1 \cdot q(x) - 6x + 2$$

och nu kommer vi inte längre eftersom resten $-6x + 2$ har lägre grad än divisorn $x^2 + 4$. Jämför återigen med division av vanliga tal. När resten blivit mindre än divisorn kommer man inte längre.

Vi har alltså fått att

$$p(x) = 2x \cdot q(x) + (x^2 - 6x + 6) = 2x \cdot q(x) + 1 \cdot q(x) - 6x + 2 = (2x + 1)q(x) - 6x + 2$$

så vi har kvoten $2x + 1$ och resten $-6x + 2$. Man kan utföra polynomdivision med ”liggande stolen” eller ”trappan” om man så vill. Räkningarna vi utfört ovan kan sammanställas i liggande stolen som följer.

$$
\begin{array}{r|c}
 & 2x+1 \\ \cline{2-2}
x^2+4 & 2x^3+x^2+2x \\ \cline{1-1}
 & -(2x^3+8x) \\ \cline{2-2}
 & x^2-6x+6 \\
 & -(x^2+4) \\ \cline{2-2}
 & -6x+2
\end{array}
$$

★

Exempel 2.10. *Utför polynomdivisionen $p(x)/q(x)$ där $p(x) = x^3 + 2x + 3$ och $q(x) = x + 1$.*

Lösningsförslag: Vi utför polynomdivisionen med hjälp av liggande stolen. Vi ritar först upp stolen och placerar in $p(x)$ och $q(x)$.

$$
\begin{array}{r|c}
\cline{2-2}
x+1 & x^3+2x+3 \\ \cline{1-1}
\end{array}
$$

Nästa steg är att se hur många gånger x (från x+1) går i x^3 (från $x^3 + 2x + 3$), vilket är x^2 gånger. Vi drar därför bort $x^2(x + 1) = x^3 + x^2$ från $x^3 + 2x + 3$. Detta för vi in i liggande stolen enligt nedan. Över stolen skriver vi x^2 för att komma ihåg att vi dragit bort $x^2(x + 1)$.

$$
\begin{array}{r|c}
 & x^2 \\ \cline{2-2}
x+1 & x^3+2x+3 \\ \cline{1-1}
 & -(x^3+x^2) \\ \cline{2-2}
 & -x^2+2x+3
\end{array}
$$

Vi har alltså gjort oss av med högstagradstermen i $x^3 + 2x + 3$, och skrivit $x^3 + 2x + 3 = x^2(x + 1) + (-x^2 + 2x + 3)$. Vi är inte klara ännu eftersom resten, $-x^2 + 2x + 3$, har högre grad än $x + 1$. Det vi vill göra nu är att utföra en polynomdivision mellan $-x^2 + 2x + 3$ och $x + 1$, så vi fortsätter på samma sätt. I nästa steg vill vi alltså få bort x^2-termen. Vi kontrollerar därför hur många gånger x går i $-x^2$, vilket är $-x$ gånger. Vi subtraherar därför $-x(x+1)$ från $-x^2+2x+3$, detta inför vi i liggande stolen enligt nedan.

$$
\begin{array}{r|c}
 & x^2-x \\ \cline{2-2}
x+1 & x^3+2x+3 \\ \cline{1-1}
 & -(2x^3+8x) \\ \cline{2-2}
 & -x^2+2x+3 \\
 & -(-x^2-1) \\ \cline{2-2}
 & 3x+3
\end{array}
$$

Slutligen vill vi utföra en polynomdivision mellan $3x + 3$ och $x + 1$. Vi får

$$
\begin{array}{r|c}
 & x^2-x+3 \\ \cline{2-2}
x+1 & x^3+2x+3 \\ \cline{1-1}
 & -(2x^3+8x) \\ \cline{2-2}
 & -x^2+2x+3 \\
 & -(-x^2-1) \\ \cline{2-2}
 & 3x+3 \\
 & -(3x+x) \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

Eftersom vi slutade med en nolla gick polynomdivisionen jämt ut. Vi har alltså fått fram att $x^3 + 2x + 3 = (x + 1)(x^2 - x + 3)$. ★

Faktorsatsen

Låt $p(x)$ vara ett polynom av grad n. Om det finns en faktor $(x-a)$ i polynomet så kan man bryta ut denna faktor och skriva $p(x) = (x-a)q(x)$ där $q(x)$ är ett polynom av grad $n-1$. Vi ser då att a är en rot till ekvationen $p(x) = 0$ eftersom

$$p(a) = (a-a)q(a) = 0 \cdot q(a) = 0$$

oavsett värdet på $q(a)$. Alltså om $(x-a)$ är en faktor till polynomet $p(x)$ så är a en rot till polynomekvationen $p(x) = 0$. Vi ska nu visa att även det omvända gäller, alltså att om a är en rot till ekvationen $p(x) = 0$, för något polynom $p(x)$, så måste $(x-a)$ vara en faktor i polynomet. Detta kan också uttryckas som att polynomet är delbart med $(x-a)$.

Dividerar vi polynomet med $(x-a)$ får vi resultatet

$$p(x)/(x-a) = q(x) + k/(x-a).$$

Multiplicerar vi sedan med $(x-a)$ får vi

$$p(x) = (x-a)q(x) + k.$$

Här är k en konstant eftersom vi dividerat med ett förstagradspolynom. k är alltså resten då $p(x)$ divideras med $(x-a)$ och resten måste ha lägre grad än polynomet vi dividerat med. Notera att detta uttryck visar att resten vid division av $p(x)$ med $(x-a)$ ges av $p(a)$ eftersom $p(a) = (a-a)q(a) + k = k$. Anta nu att a är en rot till $p(x)$, så $p(a) = 0$. Sätter vi in detta i uttrycket ovan erhåller vi $0 = p(a) = (a-a)q(a) + k = k$. Alltså är $k = 0$ och därmed har vi $p(x) = (x-a)q(x)$ och $(x-a)$ är en faktor i polynomet (eller delare, vilket är samma sak) om a är en rot till $p(x) = 0$. Vi har således bevisat det som heter *faktorsatsen*.

Faktorsatsen: $(x-a)$ är en faktor i polynomet $p(x)$ om och endast om a är en rot till polynomekvationen $p(x) = 0$.

Uttrycket *om och endast om* innebär just ekvivalens ($\Leftrightarrow$), vilket vi har eftersom vi visat påståendet åt båda hållen: om a är en rot till $p(x) = 0$ så är $(x-a)$ en faktor i polynomet och om $(x-a)$ är en faktor i polynomet så är a en rot. Enligt faktorsatsen är alltså problemet att finna lösningar till en algebraisk ekvation ekvivalent med problemet att finna förstagradsfaktorer i ett polynom.

Exempel 2.11. *Polynomet $p(x) = 5x^3 - 3x^2 - 2x$ är exempelvis delbart med faktorn $(x-1)$ eftersom $p(1) = 0$ och 1 är alltså en rot till $p(x) = 0$.*

Exempel 2.12. *Lös tredjegradsekvationen $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ med faktorsatsen.*

Lösningsförslag: Om vi kan finna en heltalsrot genom att prova oss fram, så kan vi därefter utföra polynomdivision med motsvarande faktor för att därefter lösa den andragradsekvation vi då får. Vi ser i ekvationen ovan att $x = 2$ är en lösning till ekvationen eftersom $p(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0$. Det betyder enligt faktorsatsen att $(x-2)$ är en faktor i polynomet, vilket innebär att polynomet är delbart med $(x-2)$. Med polynomdivision får vi $p(x) = (x-2)(x^2 - x - 2)$ och ekvationen $x^2 - x - 2 = 0$ är en vanlig andragradsekvation med lösningarna $x = -1$ och $x = 2$. Således har vår ekvation lösningarna $x = -1$ och $x = 2$ där den senare är en dubbelrot. Polynomet kan därför skrivas som $p(x) = (x+1)(x-2)^2$. ★

Hur man finner rationella rötter

Ofta kan det vara svårt, eller omöjligt, att gissa sig till en rot till en ekvation $p(x) = 0$. Det finns dock ett enkelt resultat som gör det möjligt att finna eventuella rationella rötter till $p(x) = 0$ då polynomet har heltalskoefficienter. Vi visar hur detta resultat fungerar med ett exempel.

Exempel 2.13. *Finn alla rationella rötter till ekvationen $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.*

Lösningsförslag: Vi antar att vi har en rationell rot $\frac{p}{q}$ till ekvationen, där p och q saknar gemensamma faktorer bortsett från 1 och -1 ($\frac{p}{q}$ är alltså förkortat så långt som möjligt). Då gäller att

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 6\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 11\frac{p}{q} - 6 = 0.$$

Om vi multiplicerar uttrycket med q^3 får vi

$$p^3 - 6p^2q + 11pq^2 - 6q^3 = 0.$$

Vi adderar sedan $6q^3$ till båda sidor och får

$$p^3 - 6p^2q + 11pq^2 = 6q^3.$$

Eftersom nu västerledet är delbart med p måste även högerledet vara det. Vi antog att p och q saknar gemensamma faktorer vilket innebär att p är delbart med 6, möjliga värden på p blir därför $\pm1, \pm2, \pm3$ och ±6. På samma sätt kan vi hitta möjliga värden på q. Vi gör detta genom att först subtrahera p^3 från båda led i ekvationen

$$p^3 - 6p^2q + 11pq^2 - 6q^3 = 0$$

vilket ger

$$-6p^2q + 11pq^2 - 6q^3 = -1 \cdot p^3.$$

Vi ser att vänsterledet är delbart med q och därför måste också högerledet vara det. På samma sätt som tidigare får vi de möjliga värderna ±1 för q. Genom att testa alla gissningar på $\frac{p}{q}$ ser vi att $1, 2$ och 3 är rötter till ekvationen $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. ★

Mer allmänt gäller följande:

Låt $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ vara ett polynom med heltalskoefficienter. Om $\frac{p}{q}$ är en rot till ekvationen $p(x) = 0$ där $\frac{p}{q}$ är förkortat så långt som möjligt måste p vara en faktor i a_0 och q en faktor i a_n.

Detta visas man på i princip samma sätt som vi resonerade i exemplet tidigare.

Exempel 2.14. *Låt $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Finn alla rationella lösningar till ekvationen $p(x) = 0$.*

Lösningsförslag: Om ekvationen har en rationell rot p/q så måste det gälla att q är en faktor till koefficienten framför x^3 (som är 1) och att p är en faktor till den konstanta termen (som också är 1). Alltså är de enda möjliga lösningarna $(-1)/(-1) = 1/1 = 1$ och $1/(-1) = (-1)/1 = -1$. Insättning ger $p(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + 1 \neq 0$ och $p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0$. Alltså är -1 den enda rationella roten till ekvationen $p(x) = 0$.

★

Exempel 2.15. *Låt $p(x) = x^5 + x + 3$. Visa att ekvationen $p(x) = 0$ saknar rationella lösningar.*

Lösningsförslag Om ekvationen har en rationell rot p/q så måste det gälla att q är en faktor till 1 och att p är en faktor till 3. Möjliga värden på q är därför -1 och 1. Möjliga värden på p är $3, -3, 1$ och -1. Detta ger $3, -3, 1, -1$ som möjliga rationella lösningar. Låt oss sätta in dessa tal i $p(x)$. Vi har $p(3) = 3^5 + 3 + 3 \neq 0, p(-3) = (-3)^5 - 3 + 3 \neq 0, p(1) = 1 + 1 + 3 \neq 0$ och $p(-1) = (-1)^5 - 1 + 3 \neq 0$. Alltså saknar ekvationen $p(x) = 0$ rationella lösningar. ★

Övningar

1. Utför polynomdivisionerna $p(x)/q(x)$ där
   (a) $p(x) = x^2 + x + 1$ och $q(x) = x - 1$,
   (b) $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ och $q(x) = x^2 + 3$,
   (c) $p(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x + 7$ och $q(x) = x^2 - 3x - 1$,
   (d) $p(x) = x^3 + 1$ och $q(x) = x^2 - x + 1$,
   (e) $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 2$ och $q(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$.
2. Visa med hjälp av faktorsatsen, d.v.s. utan att utföra polynomdivision, att $p(x) = x^3 - 6x + 4$ är delbart med $(x - 2)$.
3. Lös ekvationen $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ med hjälp av faktorsatsen.
4. Finn alla heltalslösningar till $x^4 - 2^5x^2 + 9$.
5. Bestäm de värden på konstanten k för vilka polynomet $p(x) = x^3 - kx + k^2$ är delbart med $(x + 2)$ och ange kvoten.
6. Finn alla rationella rötter till ekvationen $8x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$.

2.3 Kombinatorik

Kombinatorik är den del av matematiken där man bland annat pratar om olika sorters urval. Vi kommer i det här kapitlet besvara många frågor av typen "*På hur många sätt...*". Vi kommer behandla tre olika sorters urval. Vi börjar med det enklaste — urval där man tar hänsyn till i vilken ordning föremål kommer och där samma föremål får förekomma flera gånger.

När vi gått igenom de tre urvalen kommer vi också ta upp binomialsatsen. Ett fjärde urval tas upp i fördjupningsavsnittet.

Multiplikationsprincipen

Vi börjar avsnittet med att förklara multiplikationsprincipen med ett exempel.

Exempel 2.16. *Anna har tre tröjor och fyra par byxor. På hur många olika sätt kan hon klä sig?*

Lösningsförslag: Valet av tröja är *oberoende* av valet av byxor. Vilken tröja Anna ska ha på sig kan hon välja på tre sätt och byxorna hon ska ha på sig kan hon välja på fyra sätt. För varje val av tröja finns fyra val av byxor. Anna kan klä sig på $3 \cdot 4$ sätt. ★

Mer allmänt: *Antag att vi ska göra k val oberoende av varandra och att det i:te valet kan göras på m_i sätt. Då är det totala antalet valmöjligheter enligt multiplikationsprincipen*

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_{n-1} \cdot m_k.$$

Vi illustrerar multiptionsprincipen med ytterligare ett par exempel.

Exempel 2.17. *Samuel ska köpa husdjur. Han har svårt att bestämma sig för om han ska köpa en katt, en hund eller en kanin. Inte nog med att han inte kan bestämma sig för vilket djur han ska köpa, han kan heller inte välja vilken färg han vill att djuret ska ha. Färgerna han väljer mellan är vit, svart samt brun och han har bestämt sig för att han vill ha ett enfärgat djur. Valet av djur är oberoende av valet av färg. Hur många olika kombinationer av djur och färg har Samuel att välja mellan?*

Lösningsförslag: Eftersom valet av djur är oberoende av valet av färg har Samuel enligt multiplikationsprincipen $3 \cdot 3 = 9$ kombinationer att välja mellan. ★

Permutationer

En *permutation* är ett ordnat urval av objekt utan upprepning. Vi kan se en permutation som en omordning av föremål, exempelvis är acb en permutation av bokstäverna a, b och c. En permutation tar hänsyn till i vilken ordning föremålen i urvalet kommer och varje föremål får endast vara med en gång (ej återläggning). Exempelvis är abc och bca inte samma permutation av bokstäverna a, b och c. Så hur många permutationer av bokstäverna a, b och c finns det? Vi kan välja den första bokstaven på tre sätt, när vi har gjort detta val finns det två bokstäver kvar att välja bland. Vi kan välja en av dessa på två sätt och slutligen kan den tredje bokstaven väljas på ett sätt. Alltså finns det $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutationer av $\{a, b, c\}$. Vi har här använt multiplikationsprincipen.

På samma sätt kan vi beräkna antalet sätt att ordna de 52 korten i en kortlek. Det kan vi göra på $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sätt. Detta kan skrivas som 52! och utläses 52-*fakultet*. Vi har följande definition:

För varje positivt heltal k inför vi beteckningen $k!$ (k-*fakultet*) för talet

$$k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

$k!$ är alltså produkten av alla heltal mellan 1 och k. Vi definierar dessutom $0! = 1$ av praktiska skäl.

Exempel 2.18. *Beräkna 5!*

Lösningsförslag: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ★

I nedanstående exempel kommer även ord som inte finns i ordlistan vara giltiga och räknas som ord.

Exempel 2.19. *Hur många olika ord kan man bilda av bokstäverna i LUS (alla bokstäverna ska ingå)?*

Lösningsförslag: Vi använder multiplikationsprincipen. Den första bokstaven kan väljas på 3 sätt, den andra på 2 och den tredje på 1 sätt. Det följer att vi kan bilda $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ ord av bokstäverna i LUS. De olika orden är:

LUS LSU SLU SUL ULS USL.

★

Exempel 2.20. *Hur många olika ord kan man bilda av bokstäverna i LUU (alla bokstäverna ska ingå)?*

Lösningsförslag: Här blir det något svårare eftersom vi har två likadana bokstäver. Om vi först bortser från detta vet vi enligt exemplet ovan att det finns 6 olika ord. Vi måste nu tänka på att vi ha två stycken U:n. Dessa kan i varje ord ordnas (inbördes byta plats) på två sätt så att ordet förblir detsamma. Vi får därför bara $\frac{3!}{2!} = 3$ möjliga ord. Från början, när vi antog att alla bokstäver var olika, räknade vi alltså varje ord två gånger. De olika orden är:

LUU ULU UUL.

★

Exempel 2.21. *Hur många olika ord kan man bilda av bokstäverna i KANIN (alla bokstäverna ska ingå)?*

Lösningsförslag: Här har vi igen två likadana bokstäver. Om vi först bortser från detta kan vi välja den första bokstaven i ordet på fem sätt. Den andra bokstaven kan väljas på fyra sätt, och så vidare. Det finns alltså 5! sätt att ordna fem olika bokstäver. Vi måste nu tänka på att vi har två stycken N. Dessa kan i varje ord ordnas (inbördes byta plats) på två sätt så att ordet förblir detsamma. Vi får därför bara $\frac{5!}{2!} = 60$ möjliga ord. Från början, när vi antog att alla bokstäver var olika, räknade vi alltså varje ord två gånger. ★

Exempel 2.22. *Hur många olika ord kan man bilda av bokstäverna i SKATTKARTA (alla bokstäverna ska ingå)?*

Lösningsförslag: Vi har 10 bokstäver som ska ingå i ordet. Hade de tio bokstäverna varit olika hade det funnits 10! olika ord. Men nu måste vi komma ihåg att vi har två K:n som i varje ord kan ordnas på 2! sätt, tre A:n som kan ordnas på 3! sätt och tre T:n som kan ordnas på 3! sätt. Detta innebär att vi räknade varje ord 2!3!3! gånger när vi antog att alla bokstäver var olika. Det följer att vi kan bilda

$$\frac{10!}{2!3!3!} \text{ ord.}$$

★

En permutation av n föremål brukar beskrivas som antalet sätt att ordna de n föremålen med hänsyn till ordning och utan återläggning, samma föremål får alltså inte förekomma flera gånger.

Exempel 2.23. *På hur många sätt kan man bilda en kö av fyra personer?*

Lösningsförslag: Frågan handlar om att ordna fyra personer med hänsyn till ordning. Samma person får bara förekomma en gång i kön, vi ska alltså ordna de fyra personerna *utan återläggning*. Det finns alltså $4! = 24$ olika sätt att göra detta på. ★

Man kan också tänka sig att man väljer ut en del av objekten att skapa permutationer av.

Exempel 2.24. *På hur många sätt kan man måla en flagga med tre olika färger (som Frankrikes flagga) om vi har tio färger att välja bland?*

Lösningsförslag: Vi har tre områden att måla. Första området kan målas med 10 färger, det andra med en av de övriga 9 och det sista området med åtta färger. Detta ger oss då totalt $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ olika flaggor. ★

Allmänt gäller: *Att välja k objekt av n stycken och sedan permutera dessa k kan göras på*

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

sätt.

Kombinationer

Med en *kombination* menas en dragning utan hänsyn till ordning och utan återläggning. Exempelvis är abc och acb samma kombination av a, b och c (men, som vi såg tidigare, inte samma permutation). De sex permutationerna av a, b och c är alltså samma kombination.

Exempel 2.25. *På hur många sätt kan vi välja ut tre personer ur en grupp med fem personer?*

Lösningsförslag: Här är det underförstått att man söker en kombination, eftersom det är en grupp personer som ska väljas, till skillnad från exemplet med flaggorna där ordningen spelade roll. Den första personen kan väljas på fem sätt, den andra på fyra och den tredje på tre sätt. Alltså kan vi göra ett ordnat urval på $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ sätt. Vi måste nu komma ihåg att för varje kombination av tre personer finns 3! permutationer varför vi måste dividera med sex. Svaret blir alltså $60/6 = 10$. ★

Allmänt: *Vi ser på samma sätt att en dragning av k objekt utan hänsyn till ordning svarar mot $k!$ dragningar med hänsyn till ordning. Antalet sätt att välja k föremål av n möjliga dyker upp i många sammanhang och har därför fått en egen beteckning. Det betecknas $\binom{n}{k}$ och kallas* binomialkoefficient.

Vi har följande likhet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Symbolen $\binom{n}{k}$ utläses "n över k". $\binom{n}{0}$ kan tolkas som antalet sätt att välja ut 0 personer från en grupp med n personer. Detta kan göras på ett sätt, alltså har vi att $\binom{n}{0} = 1$.

Exempel 2.26. *Beräkna* $\binom{7}{3}$.

Lösningsförslag:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 7 \cdot 5 = 35$$

★

Exempel 2.27. *En pokerhand innehåller fem av de 52 korten i en kortlek. Vad är det totala antalet pokerhänder?*

Lösningsförslag: Vi ska räkna ut antalet sätt att dra fem kort ur en kortlek innehållande 52 kort, detta ska alltså ske utan hänsyn till ordning och utan återläggning. Med andra ord finns $\binom{52}{5}$ olika pokerhänder. ★

Vi kan konstatera att

$$\binom{n}{k} \quad \text{och} \quad \binom{n}{n-k}$$

är samma tal. Att välja ut k av n är ju detsamma som att strunta i att välja $(n-k)$ av n. Vi kan även visa detta algebraiskt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Binomialsatsen

Innan vi går in på binomialsatsen.så inför vi *summasymbolen*.

Summasymbolen, $\sum$, införs för att man på ett mer kompakt sätt ska kunna skriva summan av ett större antal termer. Summasymbolen är den stora bokstaven sigma i det grekiska alfabetet. Om vi exempelvis vill summera alla tal mellan 1 och 30 skulle vi kunna skriva det som

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+$$
$$17+18+19+20+21+22+23+24+25+26+27+28+29+30$$

vilket känns väldigt omständligt. Med hjälp av summasymbolen kan man istället skriva detta som

$$\sum_{i=1}^{30} i$$

Detta uttrycker man som *summan av alla tal* i *då* i *går från ett till trettio.*

Exempel 2.28. *Skriv* $3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}$ *med hjälp av summasymbolen.*

Lösningsförslag: Vi summerar en massa trepotenser. Potenserna börjar på fyra och slutar på 11. Vi kan därför skriva

$$3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11} = \sum_{i=4}^{11} 3^i.$$

Ibland skriver man också $\sum_{i=4}^{11} 3^i$ för att spara plats. ★

Vi har tidigare sett att kvadreringsregeln säger

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

där x och y är reella tal.

Exempel 2.29. *Multiplicera ihop parenteserna i* $(x+y)^3$.

Lösningsförslag: Användning av kvadreringsregeln ger att

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2 \\
&= (x+y)(x^2+2xy+y^2) \\
&= (x+y)x^2 + (x+y)2xy + (x+y)y^2 \\
&= x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 + xy^2 + y^3 \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.
\end{aligned}$$

Resultatet kallas *kubregeln*. ★

Exempel 2.30. *Multiplicera ihop parenteserna i* $(x+y)^4$.

Lösningsförslag: Användning av kvadreringsregeln ger att

$$\begin{aligned}
(x+y)^4 &= (x+y)(x+y)^3 \\
&= (x+y)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) \\
&= (x+y)x^3 + (x+y)3x^2y + (x+y)3xy^2 + (x+y)y^3 \\
&= x^4 + x^3y + 3x^3y + 3x^2y^2 + 3x^2y^2 + 3xy^3 + xy^3 + y^4 \\
&= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.
\end{aligned}$$

★

Vi kommer att formulera regler för att räkan ut $(x+y)^n$ för alla positiva heltal n. Binomialsatsen handlar om just sådana utvecklingar.

Binomialsatsen

Binomialsatsen: För heltal n gäller

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Ett binom är ett polynom med två termer, alltså ett uttryck på formen $a+b$, varav namnet binomialsatsen.

Exempel 2.31. *Använd binomialsatsen för att utveckla* $(x+y)^3$.

Lösningsförslag: Vi använder summaformeln i binomialsatsen med $n=3$ och får:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Termerna framför $x3, x^2y, xy^2$ och y^3 kallas binomialkoefficienter. ★

Exempel 2.32. *Finn koefficienten framför x^4 i polynomet $(1+x)^6$.*

Lösningsförslag: Med $y = 1$ så har vi enligt binomialsatsen att

$$(1+x)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{n-k} 1^k.$$

När k är 2 så är $x^{6-k} = x^4$. Alltså är koefficienten framför x^4 lika med $\binom{6}{2} = 15$. ★

Exempel 2.33. *Finn koefficienten framför x^3 i polynomet $(2+x)^6$.*

Lösningsförslag: Med $y = 2$ så har vi enligt binomialsatsen att

$$(2+x)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{n-k} 2^3.$$

När k är 3 så är $x^{6-k} = x^3$. Alltså är koefficienten framför x^3 lika med $\binom{6}{3} 2^3 = 15 \cdot 8 = 120$. ★

Pascals triangel

När vi utvecklar till exempel $(x+y)^2$ kan man direkt gissa att utvecklingen kommer innehålla termerna x^2, xy och y^2. Frågan är bara vilken koefficient vi får framför var och en av termerna. Man kan använda binomialsatsen för att ta reda på binomialkoefficienterna. *Pascals triangel* kan man se som en geometrisk framställning av binomialkoefficienterna. Namnet kommer från matematikern och fysikern Blaise Pascal. Toppen av Pascals triangel ser ut så här:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Om vi tittar på tredje raden ser vi att det är precis koefficienterna framför x^2, xy respektive y^2 i utvecklingen av $(x+y)^2$. På samma sätt finner vi binomialkoefficienterna för utvecklingen av $(x+y)3$ på rad fyra och så vidare. Om vi räknar ut binomialkoefficienterna och ersätter dem med tal i Pascals triangel får toppen följande utseende.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Vi ser då att Pascals triangel är symmetrisk. Detta beror på att $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, som vi visat tidigare. För att förstå hur Pascals triangel är uppbyggd behöver vi en intressant egenskap hos binomialkoefficienterna, nämligen sambandet

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Man kan visa detta både algebraiskt och kombinatoriskt. Ett algebraiskt bevis består ofta av manipulationer av uttryck (för att se att de är lika) medan ett *kombinatoriskt bevis* kan vara en berättelse som visar att de algebraiska uttrycken räknar samma saker. Vi börjar med ett algebraiskt bevis.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Nu till ett kombinatoriskt bevis:

$\binom{n+1}{k}$ *är antalet sätt att ur en skolklass på* $n+1$ *personer välja ut* k *elever. Vi tittar nu extra noga på en person i klassen, låt säga Kalle. När vi väljer ut* k *personer ur klassen så kommer Kalle antingen vara en av de utvalda eller inte. Om vi bestämmer oss för att Kalle ska vara bland de utvalda behöver vi bara välja ut* $k-1$ *personer av de* n *återstående. Detta kan göras på* $\binom{n}{k-1}$ *sätt. Om vi istället tittar på antalet sätt att göra detta urval när Kalle inte är en av de utvalda så ska vi välja ut* k *personer bland alla utom Kalle, det vill säga av* n *personer. Detta kan göras på* $\binom{n}{k}$ *sätt. Vi har alltså att*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Kombinatoriska bevis ger ofta en bättre inblick i varför formler fungerar. Men ibland kan det vara svårt att komma på ett kombinatoriskt bevis.

Nu tillbaka till Pascals triangel. Det fiffiga med den är att längst ut i vänsterkanten finns alltid ett tal på formen $\binom{n}{0} = 1$ och i högerkanten ett tal på formen $\binom{n}{n} = 1$. Däremellan är alla binomialkoefficienter summan av de båda talen ovanför, snett till höger och snett till vänster. För att beräkna summan använder vi formeln

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

som vi precis har bevisat. Till exempel så har vi att $\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1}$, alltså 2=1+1.

Övningar

1. På hur många sätt kan man ordna en kö med sju personer?
2. Hur många ord kan man bilda av bokstäverna i MISSISSIPPI?
3. Vi ska måla ett slott, en villa och koja i olika färger. Färgerna kan väljas bland orange, lila, rosa, röd och brun. På hur många sätt kan detta göras?
4. I en skolklass finns nio elever. På hur många sätt kan man välja ut tre av dem att delta i en tävling?
5. Utveckla följande

   (a) $(x + 5)3$
   (b) $(x - 5)2$

6. Beräkna
   (a) $\binom{7}{3}$ och
   (b) $\binom{12}{10}$.
7. Summera de första raderna i Pascals triangel och se om du kan finna ett samband.
8. (*svår*) Visa att $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$. Ledning: Använd binomialsatsen för ett algebraiskt bevis, tänk på resultatet i föregående uppgift. Försök gärna också visa det kombinatoriskt. Då kan det vara bra att tänka på att 2^n är antalet strängar av längd n med bara ettor och nollor.

2.4 Logik

Logik handlar om påståenden och slutsatser man kan dra från dessa. Om man till exempel påstår att $x \geq 10$, så kan man direkt dra slutsatsen att $x \geq 0$. Däremot kan man inte vara säker på att $x \geq 0$ garanterar att $x \geq 10$. Talet x kan ju nämligen ligga mellan 0 och 10.

Sådana här slutsatser kallas *implikationer*. Om vi använder matematiska symboler, så blir påståendet ovan $x \geq 10 \Rightarrow x \geq 0$. Detta utläses ”Om x är större än 10, så medför det att x är större än 0” eller ”x större än 10 implicerar att x är större än 0”. Ibland så händer det att två påståenden implicerar varandra. Detta kallas *ekvivalens* och innebär att båda påståendena har samma sanningsvärde samtidigt. Detta skrivs ganska naturligt som implikationspilar åt båda hållen, $\Leftrightarrow$. Ett exempel på ekvivalens är $x = 2 \Leftrightarrow x = 1 + 1$.

När du skriver om uttryck och ekvationer, så är det ofta att ekvationen före och efter manipulationen är ekvivalenta. Vi har till exempel att

$$5x + 4 = 3x + 9 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Vi kan alltså läsa ut att om första påståendet är sant, så måste det sista vara sant och vice versa. Men det finns exempel på manipulationer som bara ger implikation och inte ekvivalens, vilket vi kommer stöta på i sektion 3.4.

Ibland behöver man säga att flera påståenden är sanna samtidigt, till exempel “det regnar *och* det blåser”. Man skriver ibland $\wedge$ när man menar *och*. Påståendet $x \geq 0 \wedge x \leq 0$ säger alltså att x är större eller lika med noll, samtidigt som x är mindre eller lika med noll. Den enda möjligheten är då att $x = 0$. Vi kan då sluta oss till att

$$x \geq 0 \wedge x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

och det är precis så man använder logik. Om man istället vill att minst ett av påståendena ska vara sant, använder man *eller*, vars matematiska symbol är $\vee$. Som ett exempel får vi att påståendet

$$x > 3 \vee x < 2$$

är sant för alla x som antingen är mindre än två eller större än tre.

Övningar

1. Bestäm vilka påståenden som är sanna nedan för $x, y \in \mathbb{R}$:
   (a) $x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$
   (b) $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$
   (c) $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$
   (d) $(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \vee y \leq 0) \Leftrightarrow x \cdot y \geq 0$

Kapitel 3

Funktionslära

3.1 Mängdlära

Begreppet mängd är fundamentalt i matematiken. Vi har redan stött på ett antal olika mängder t.ex. mängden av positiva heltal och mängden av heltal. En mängd är en samling objekt där varje objekt bara förekommer en gång. Objekten i en mängd kallas *element*. Vi skriver normalt en mängd inom måsvingar.

Ett exempel på en mängd är $\{1, 2, 3, 4, 100\}$, det vill säga mängden som innehåller talen 1, 2, 3, 4 samt 100. Ett annat exempel är $\{0, 1/2, 3, \pi, 4\}$. Mängder kan även innehålla symboler, t.ex. är

$$\{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$$

en mängd. En mängd kan även innehåller mängder, så

$$\{1, a, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

är en mängd. Eventuellt tänker du nu att det sista exemplet innehåller upprepningar, vilket ju inte får förekomma i en mängd. Men elementen i mängden är $1, a, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$ och dessa är ju skilda från varandra, så detta bildar verkligen en mängd.

Vi har redan stött på mängdnotationerna $\in$ (tillhör) och $\subset$ (delmängd) för mängder av tal. Låt oss nu definiera dessa notationer allmänt.

För att säga att ett element ingår i en mängd så använder vi symbolen $\in$. Vi har att

$$1 \in \{1, a, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

men

$$3 \notin \{1, a, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

För att säga att en hel mängd A ingår i en mängd B så skriver vi $A \subset B$. Detta utläses som att A är en *delmängd* till B. T.ex så gäller det att

$$\{1, 2\} \subset \{0, 1, 2, 5\}$$

och

$$\{\{2, 3, 4\}, a\} \subset \{1, a, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

Observera alltså att vi inte bryr oss om i vilken ordning elementen kommer i. Självklart är varje mängd en delmängd till sig själv, d.v.s. $A \subset A$ för alla mängder A.

Väldigt ofta är man intresserad av det som finns i flera mängder samtidigt. Man säger att man letar efter *snittet* av flera mängder. Snittet av mängderna A och B skrivs som $A \cap B$. Till exempel så är

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}.$$

Den tomma mängden som inte innehåller något element skrivs $\emptyset$. Vi har att

$$\{1, a, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\} \cap \{2, 3, 4\} = \emptyset.$$

Observera dock att

$$\{1, a, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\} \cap \{\{2, 3, 4\}\} = \{2, 3, 4\}$$

eftersom elementet $\{2, 3, 4\}$ ingår i båda mängderna.

Vill man däremot beskriva det som finns i minst en av mängderna, så är det *unionen* man är intresserad av. Detta skrivs $A \cup B$ och denna mängd innehåller alla element som finns i minst en av mängderna. Vi har t.ex. att $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Om A är en delmängd till B och man vill beskriva de element som ligger i B men inte i A så skriver man $A \setminus B$. Man kan se det som att man subtraherar den ena mängden från den andra. Till exempel så är $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\}$. Ett annat exempel är att de *irrationella talen* är de tal som ej kan skrivas på formen a/b, är $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

För att beskriva delmängder på ett kompakt sätt kan man använda symbolen | som avdelare. Mängden av alla jämna tal betecknas till exempel som

$$\{2 \cdot a \,|\, a \in \mathbb{Z}\},$$

vilket utläses "mängden av alla $2 \cdot a$, där a är sådant att det tillhör mängden $\mathbb{Z}$".

Vi kan ha fler krav på den högra sidan och som exempel ger vi mängden

$$\{a \,|\, a \in \mathbb{Q}, a \geq 2\}$$

som betecknar alla rationella ral större än 2.

Övningar

1. Låt $A = \{1, 2, 4, 6, 10, 100\}$ och $B = \{2, 5, 6, 10, 101\}$. Bestäm följande mängder:
   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) $A \setminus (A \cap B)$

3.2 Funktionsbegreppet

När du tänker på en funktion så tänker du förmodligen på något i stil med $f(x) = x^2$. Kanske tänker du även på en graf för funktionen och då har du förutsatt att funktionen är definierad över de reella talen. Med bakgrund av vad du tidigare har lärt dig är det helt naturligt att tänka så.

Med hjälp av mängder kan vi göra en precis definition av begreppet funktion.

Låt A och B vara två icke-tomma mängder. Vi säger att f är en *funktion* från A till B om det för varje element $a \in A$ svarar ett unikt element $b \in B$. Om b svarar mot a så skriver vi att $f(a) = b$.

Exempel 3.1. *Låt $A = \{a, b, c, d\}$ och låt $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Låt*

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 2, \quad f(c) = 3 \quad \textit{och} \quad f(d) = 4.$$

Då blir f en funktion från A till B.

Om f är en funktion från A till B så är A funktionens *definitionsmängd* och B funktionens *målmängd* . Funktionens värdemängd är samtliga element i B som vi kan skapa från A. Vi skriver $f(A)$ för att beteckna värdemängden till f. (man använder även notationen V_f för att beteckna värdemängd). Om $f(A) = B$ så säger vi att funktionen är *surjektiv*. I exemplet ovan är $f(A) = \{1, 2, 3, 4\} = B$ och alltså är f surjektiv.

Exempel 3.2. *Vi kan definiera en funktion från heltalen till heltalen genom att låta varje heltal a svara mot heltalet $2a$, d.v.s. $f(a) = 2a$. Denna funktion blir dock inte surjektiv eftersom vi aldrig kan "träffa" ett udda tal. Funktionen $f(Z)$ innehåller alltså bara de jämna talen heltalen. Definitionsmängden till f är $\mathbb{Z}$ och värdemängden till f är $\{2 \cdot a \,|\, a \in \mathbb{Z}\}$.*

Om f är en funktion från A till B och f avbildar skilda värden på skilda värden så säger vi att f är *injektiv* . Funktionerna i de två ovanstående exemplen är injektiva.

Exempel 3.3. *Låt A vara heltalen och låt $B = \{j, u\}$. Då kan vi definiera en funktion g från A till B genom att låta*

$$g(a) = \begin{cases} j \textit{ oma är jämnt}, \\ u \textit{ oma är udda}. \end{cases}$$

Funktionen g kommer att vara surjektiv men inte injektiv eftersom de skilda värdena 1 och 3 avbildas på samma värde, nämligen u.

Låt $f : A \to B$ och $g : B \to C$ vara två funktioner. Eftersom funktionen g:s definitionsmängd är densamma som funktionen f:s målmängd så är det möjligt att bilda en ny funktion h från mängden A till mängden C där $x \in A$ först avbildas på $f(x) \in B$, som i sin tur avbildas på $g(f(x)) \in C$. Funktionen h som avbildar $x \in A$ på $g(f(x)) \in C$ är då den *sammansatta funktionen* av f och g.

Exempel 3.4. *Låt oss sammansätta vår funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a) = 2a$ med funktionen*

$$g(a) = \begin{cases} j \text{ om} a \text{ är jämnt}, \\ u \text{ om} a \text{ är udda}. \end{cases}$$

Kalla den sammansatta funktionen för h, d.v.s. $h : \mathbb{Z} \to \{j, u\}$, $h(a) = g(f(a))$. Då är $h(1) = g(f(1)) = g(2) = j, h(2) = g(f(2)) = g(4) =$j och $h(3) = g(f(3)) = g(6) =$j. Det verkar alltså som att h avbildar alla värden på j. Det stämmer, och det beror på att $h(a) = g(f(a)) = g(2a) = j$. Eftersom det inte finns något tal $a \in \mathbb{Z}$ så att $h(a) =$u, så är funktionen inte surjektiv. Funktionen är inte heller injektiv. Varför då?

I fortsättningen ska vi studera funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Ett polynom, t.ex. x^2, kan ses som en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Vi sätter $f(x) = x^2$ och vi har att $f(0) = 0$, $f(1) = 1^2 = 1$, $f(2) = 2^2 = 4$. Notera att $f(a) = f(-a) = a^2$. Eftersom a är ett reellt tal så är $a^2 \geq 0$. Detta innebär att värdemängden till funktionen är alla icke-negativa reella tal. Detta kan vi skriva med mängdnotation som $f(R) = \{a \,|\, a \geq 0, a \in \mathbb{R}\}$ eller $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Ibland är en funktions natur sådan att den inte är definierad överallt även om vi skulle önska det. Ta t.ex. funktionen $f(x) = 1/x$ för reella värden på x. Den är inte definierad för $x = 0$ eftersom man inte får dividera med noll, men däremot är den definierad för alla andra reella tal. Funktionens definitionsområde är alltså "alla reella tal utom 0", d.v.s. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.3 Reella mängder och kurvritning

Låt A vara mängden av alla reella tal som är större än eller lika med 1 men mindre än eller lika med 2, d.v.s.

$$A = \{a \,|\, \wedge a \leq 2 \wedge a \geq 1, a \in \mathbb{R}\}.$$

Vi kan beskriva A på andra sätt, t.ex. är

$$A = B \cap C,$$

där

$$B = \{a \,|\, a \leq 2, a \in \mathbb{R}\} \text{ och } C = \{a \,|\, a \geq 1, a \in \mathbb{R}\}.$$

Det finns dock en smidigare notation för att beskriva A — vi använder hakparenteser och skriver

$$A = [1, 2].$$

I allmänhet betyder alltså $[a, b]$ är mängden av alla reella tal som är större än eller lika med a men mindre än eller lika med b. Vi benämner $[a, b]$ *intervallet* mellan a och b. Vi kan vända på hakparenteserna också. När $a \leq b$ så gäller det att

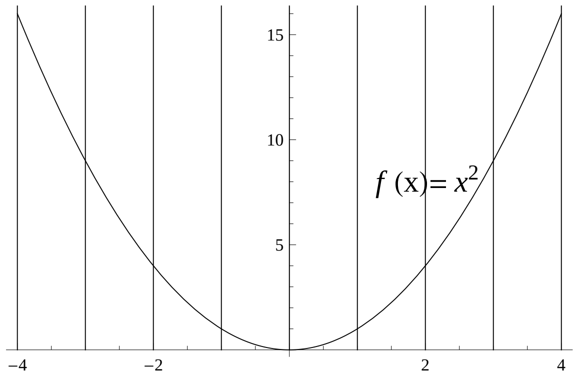
$$]a, b[= [a, b] \setminus \{a, b\},$$

d.v.s. $]a, b[$ är intervallet mellan a och b utan ändpunkter. Notera att vi verkligen behövde anta att $a \leq b$ för att definiera $]a, b[$ som vi gjorde. Läsaren uppmanas att fundera över detta. Däremot är $[a, b]$ definierad för alla reella tal a och alla reella tal b. Varför?

Om vi vill skissa funktionen $f(x) = x^2$, hur går vi då tillväga? Vanligtvis fixerar man ett *kartesiskt koordinatsystem* med en "x"-axel och en "$f(x)$"-axel. Av tradition brukar man kalla "$f(x)$"-axeln för "y"-axeln och sätta $y = f(x)$. Vi försöker nu hitta några punkter i planet som ligger på grafen till f, d.v.s. satisfierar ekvationen $f(x) = x^2$. Exempel på sådana punkter är

$$(0,0), (1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4), (3,9) \text{ och } (-3,9).$$

Vi sätter ut dessa punkter i planet och utifrån dessa punkter får vi en känsla för hur funktionen uppför sig.



Figur 3.1: Funktionen $f(x) = x^2$.

Reella punktmängder

Precis som det låter så är en reell punktmängd en mängd av reella punkter. Varje punkt kan beskrivas geometriskt i ett koordinatsystem, likaså kan en mängd av punkter beskrivas geometriskt i koordinatsystemet. Vi betraktar en punktmängd som en algebraiskt begrepp, medan vi betraktar bilden av punktmängden som ett geometriskt. Som forskare i matematik går man fram och tillbaka mellan geometriska och algebraiska tolkningar av samma matematiska objekt för att kunna förstå det bättre.

För funktionen $f(x) = x^2$ kommer punktmängden $\{(a, a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$ att vara samtliga punkter som ligger på grafen till f. Allmänt gäller att punktmängden till grafen $f(x)$ är $\{(x, f(x)), x \in D\}$, där D är definitionsområdet till funktionen f.

Låt oss betrakta punktmängden $\{(a, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Finns det någon funktion $f(x)$ vars graf sammanfaller med bilden av punktmängden? Ja, det finns det, nämligen $f(x) = 1$.

Låt oss istället betrakta punktmängden $\{(1, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$. Finns det någon funktion $f(x)$ vars graf sammanfaller med bilden av punktmängden? Nej, det gör det inte. Om det skulle finnas en sådan funktion f så skulle $f(1)$ anta alla reella värden och det är ju inte tillåtet. En funktion kan bara anta ett värde i varje punkt. Däremot sammanfaller punktmängden med alla punkter (a, b) som uppfyller $x = 1$.

Cirkelns ekvation

Hur ska vi beskriva en cirkel av radie r med centrum i punkten $(0, 0)$ (origo) algebraiskt? Om (a, b) är en punkt på cirkeln så gäller det att avståndet från punkten (a, b) till origo är lika med r. Det följer därför från Pythagoras sats att $a^2 + b^2 = r^2$. Det innebär att punktmängden som bildar cirkeln är alla punkter (a, b) som uppfyller att $a^2 + b^2 = r^2$, d.v.s. $\{(a, b) \mid a^2 + b^2 = r^2\}$.

3.4 Olikheter och absolutbelopp

I det här avsnittet studerar vi olikheter och absolutbelopp över de reella talen.

Oliketer

Olikheter påminner mycket om likheter men det finns vissa fällor man får se upp med. Vi börjar med ett par lagar som gäller för räkning med olikheter:

$$\begin{aligned}
a > b &\Leftrightarrow a + c > b + c \\
a > b &\Leftrightarrow r \cdot a > r \cdot b \text{ om } r > 0 \\
a > b &\Leftrightarrow r \cdot a < r \cdot b \text{ om } r < 0
\end{aligned}$$

Vi ska nu motivera lagarna. Vi börjar med den första. Om Alice har fler äpplen än Bob och båda får lika många äpplen (eller äter upp lika många äpplen) så kommer Alice fortfarande att ha fler äpplen än Bob. På liknande sätt följer andra lagen, multiplicera bådas antal med samma tal, så kommer Alice fortfarande ha mer än Bob. Se det som att Alice har 7 kronor och Bob 3. Om de hade haft hundralappar istället för kronor, så har Alice fortfarande mer pengar. Om vi däremot multiplicerar med ett negativt tal så blir det skulder istället, så låt säga att Alice då har -7 kronor och Bob -3. Då har ju Bob mer pengar eftersom han inte är skyldig lika mycket.

När vi arbetar med olikheter så är det oftast inte ett unikt tal x som blir lösningen utan ett helt intervall, $a < x < b$. Dessa intervall kan beskrivas på flera sätt:

Lösning	Intervall
$0 \leq x \leq 1$	$[0, 1]$
$0 < x \leq 1$	$]0, 1]$
$0 \leq x < 1$	$[0, 1[$
$0 < x < 1$	$]0, 1[$
$0 < x$	$]0, \infty[$
$x < 0$	$]-\infty, 0[$

Du undrar kanske vad symbolen ∞ betyder? Det är en matematisk beteckning av *oändligheten*. Oändligheten är inget tal, så $\infty \notin \mathbb{R}$. Mängden $]-\infty, 0[$ är alltså mängden av negativa reella tal.

Observera alltså att det är skillnad på lösningsmängden till $x > 0$ och $x \geq 0$. I den första mängden så är $x = 0$ en giltig lösning, men i den andra så är bara de positiva talen lösningar.

Vi kommer också stöta på lösningsmängder som består av flera intervall. Låt säga $35 < t < 45$ är det tidsintervall där kladdkakan är färdig, där $t = 0$ är när vi stoppade in den i ugnen. Då kommer $t \leq 35$ och $t \geq 45$ vara de intervall där kladdkakan inte är ätbar. Detta sker då $t \in]-\infty, 35] \cup [45, \infty[$.

Olikheter av grad ett

Att lösa olikheter med grad ett är inte svårare än att lösa ut en variabel. Det enda man måste tänka på är den tredje regeln ovan så att man vänder på olikhetstecknet vid rätt tillfälle. Här följer ett par illustrerande exempel.

Exempel 3.5. *Lös följande problem:*

1. *Finn de x som uppfyller olikheten $5x - 12 > 18$.*
2. *Finn de x som uppfyller olikheterna $4x - 7 \geq 20$ och $5 - 2x > 7$ samtidigt.*

Lösningsförslag: Vi använder första regeln och adderar 12 till båda leden:

$$5x - 12 > 18 \Leftrightarrow 5x > 30$$

Vi kan nu multiplicera båda leden med (det positiva talet) $\frac{1}{5}$, det vill säga vi dividerar med 5.

$$5x > 30 \Leftrightarrow x > 6$$

Alltså är lösningsmängden till olikheten $6 < x$.

Vi löser det andra problemet på samma sätt för var och en av olikheterna

$$4x - 7 \geq 20 \Leftrightarrow 4x \geq 27 \Leftrightarrow x \geq \frac{27}{4} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{27}{4}, \infty\right[$$

$$5 - 2x \geq 7 \Leftrightarrow -2 \geq 2x \Leftrightarrow -1 \geq x \Leftrightarrow x \leq -1$$

Vi vill nu finna de x som ligger i båda dessa lösningsmängder. Men som vi kan se, så finns det inga sådana x, då inga tal kan vara större än $27/4$ samtidigt som de är mindre än -1. Alltså finns inga x som uppfyller båda olikheterna samtidigt. ★

Olikheter av högre grad

Nu när vi bemästrat olikheter av första graden så angriper vi problem med högre grad. Den metod vi kommer att ha stor nytta av kallas *teckenschema* och det innebär att vi undersöker om i vilka intervall som uttryck är positiva eller negativa. Detta har stark koppling till regel två och regel tre för olikheter. Vi börjar med ett exempel:

Exempel 3.6. *Vilka x uppfyller att $(x-1)(x-2)(x+4) \geq 0$?*

Lösningsförslag: Gränserna för olikheten måste ju vara då vänsterledet är precis 0, det vill säga när $(x-1)(x-2)(x+4) = 0$. Det är alltså enbart när $x = 1$, $x = 2$ och när $x = -4$ som vi passerar en gräns för lösningsmängden. Vi tänker oss att vi är x som vandrar från $-\infty$ till ∞ och på vägen så undersöker vi vilket tecken som $(x-1)(x-2)(x+4)$ har. Är uttrycket positivt så är det x:et med i lösningen, annars inte. Men för att vandra mellan ett x som ger negativt tecken och ett som ger positivt, så måste vi ju passera de som ger oss 0. Detta ger oss ett teckenschema:

		-4		1		2	
$(x+4)$	-	0	+	+	+	+	+
$(x-1)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x-2)$	-	-	-	-	-	0	+
$(x-1)(x-2)(x+4)$	-	0	+	0	-	0	+

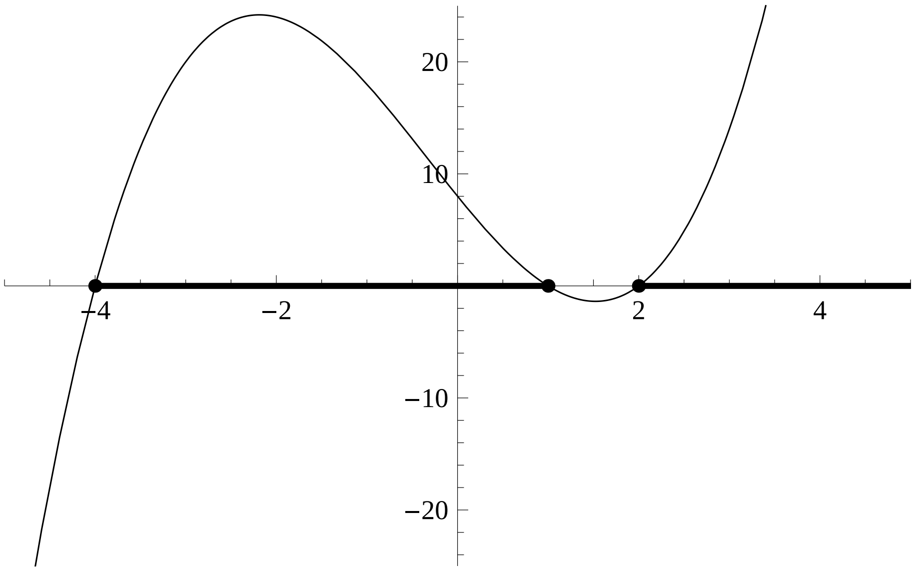
Varje rad berättar vilket tecken som uttrycket i vänsterkolumnen har. Vi ser alltså att $(x+4)$ är positivt eller noll om $x \geq -4$, och liknande för de andra två uttrycken. Vi kan nu multiplicera de tre första raderna med varandra för att få den sista raden, ("minus gånger minus blir plus"). Den sista raden ger oss då en beskrivning för vilket tecken vi har i vilket intervall, och vi avläser att $(x-1)(x-2)(x+4)$ är positivt eller noll för $-4 \leq x \leq 1$ samt $2 \leq x$. Lösningen på olikheten blir då $x \in [-4, 1] \cup [2, \infty)$.

★

Det första man måste göra när man löser en olikhet är alltså att faktorisera uttrycket, och därefter göra ett teckenschema. Det är inte alltid man får uttrycket färdigfaktoriserat, men man kan faktorisera dem med hjälp av faktorsatsen.

Exempel 3.7. *Vilka x uppfyller olikheten $x^2 - 5x \leq -6$?*

Lösningsförslag: Man kan lätt luras att tro att vi faktoriserar vänsterledet direkt, men vi måste ha 0 i högerledet för att kunna göra ett teckenschema. Vi skriver alltså om det som $x^2 - 5x + 6 \leq 0$. För att faktorisera vänsterledet, måste vi hitta rötterna till $x^2 - 5x + 6 = 0$. Löser vi denna andragradsekvation, så finner vi att $x = 2$ och $x = 3$ är rötter. Vi kan då faktorisera vänsterledet som $(x-2)(x-3)$ (kontrollera att om du utvecklar detta så får du precis $x^2 - 5x + 6$). Detta ger oss då $(x-2)(x-3) \leq 0$ och vi ställer upp ett teckenschema:



Figur 3.2: $f(x) = (x-1)(x-2)(x+4)$

		2		3	
$(x-2)$	-	0	+	+	+
$(x-3)$	-	-	-	0	+
$(x-2)(x-3)$	+	0	-	0	+

Vi utläser att $(x-2)(x-3) \leq 0$ om $x \in [2,3]$. ★

Absolutbelopp

Det här avsnittet handlar om absolutbeloppet. Vi börjar med definitionen

$$|x| = \begin{cases} x \text{ om } x \geq 0 \\ -x \text{ om } x < 0 \end{cases} \qquad \text{alternativt} \quad |x| = \sqrt{x^2}$$

För alla positiva tal x, så gäller det att $|x| = x$, men om x är negativt så kan man säga att absolutbeloppet "tar bort minustecknet". Det gäller alltså att $|x| \geq 0$ för alla x, och $|x| = 0$ endast om $x = 0$.

Absolutbeloppet är ett mått på storleken av talet oberoende av vilket tecken det har. Det kan också tolkas som det avstånd som x är från 0 på tallinjen.

Exempel 3.8. $|-1| = |1|, \quad |-\pi| = |\pi|,$ *och* $|0| = |0|$.

Exempel 3.9. *Lös följande ekvationer:*

- $|x| = 3$.
- $|x-4| = 3$.

Lösningsförslag: När man arbetar med absolutbelopp så är det lättast att dela upp problemet i flera fall, beroende på om det vi tar absolutbelopp på är positivt eller negativt. Det är precis det vi kommer göra här. Första problemet blir då följande:

Fall 1: Om $x \geq 0$, så är $|x| = x$ och vi får att $x = 3$, vilket då enkelt är en lösning.

Fall 2: Om $x < 0$, så är$|x| = -x$ och vi får att $-x = 3$, så $x = -3$ är den andra lösningen.

Lösningen är alltså att $x = 3$ eller $x = -3$. Nu till nästa problem:

Fall 1: Om $x - 4 \geq 0$, så är $|x - 4| = x - 4$ och vi får att $x - 4 = 3$, så $x = 7$ är en lösning.

Fall 2: Om $x - 4 < 0$, så är $|x - 4| = -(x - 4)$ och vi får att $-(x - 4) = 3$, så $x = 1$ är den andra lösningen.

Kontrollera att lösningarna stämmer genom att sätta in dem i den ursprungliga ekvationen. ★

Nu ska vi kombinera det vi lärde oss om olikheter och använda de i kombination med absolutbelopp.

Exempel 3.10. *Lös olikheten* $|x - 5| \geq 3$.

Lösningsförslag: Vi delar upp problemet i flera fall, nämligen $x \geq 5$ och $x < 5$ eftersom vid $x = 5$ är uttrycket i absolutbeloppet 0.

Fall $x \geq 5$**:** Här är det inom absolutbeloppet positivt och vi ersätter absolutbeloppet med parenteser. Vi får att $(x - 5) \geq 3$ vilket ger oss $x \geq 8$. Alla dessa x uppfyller även att $x \geq 5$, vilket var en förutsättning för det här fallet. Alltså är $x \geq 8$ giltiga lösningar.

Fall $x < 5$**:** Nu får vi istället $-(x - 5) \geq 3$, vilket efter multiplikation med -1 i båda leden ger $x - 5 \leq -3$. Slutligen får vi då att $x \leq 2$. Vi får då att $x \leq 2$ ger giltiga lösningar, dessa uppfyller ju också förutsättningarna att $x < 5$.

Lösningsmängden ges av $x \leq 2$ och $x \geq 8$. ★

Övningar

1. Lös följande olikheter

   (a) $3x + 6 > x - 8$

   (b) $x^2 + 2x > 3$

   (c) $(x - 2)(x^2 + 4x + 4) \geq 0$

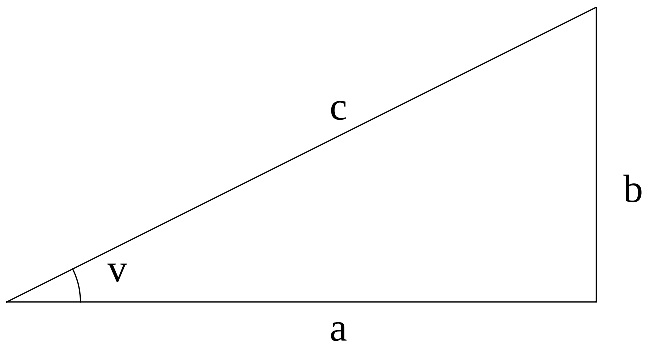
3.5 Trigonometri

Trigonometri används för att beräkna avstånd och vinklar. Vi kommer lära oss hur man med hjälp av trigonometri kan beräkna avstånd och vinklar med hjälp av mått på andra avstånd och vinklar. Det är lättast att arbeta med rätvinkliga trianglar så vi börjar med lite repetition om dessa. Vi kommer använda de trigonometriska funktionerna sinus, cosinus och tangens som vi i nästa avsnitt ska titta närmare på.

Rätvinkliga trianglar

En rätvinklig triangel är en triangel med en rät vinkel, alltså en vinkel på $90°$. Ett exempel på en rätvinklig triangel ser vi i figur 3.3.

De sidor som bildar en rät vinkel mot varandra, sidorna a och b i figuren ovan, kallas katetrar och den tredje sidan, c, kallas för hypotenusan i triangeln. Vi gör även skillnad mellan de båda kateterna. När vi betraktar vinkel v säger vi att a är den närliggande kateten och b den motstående. För en rätvinklig triangel, som den i figuren ovan, finns följande definierade funktioner mellan



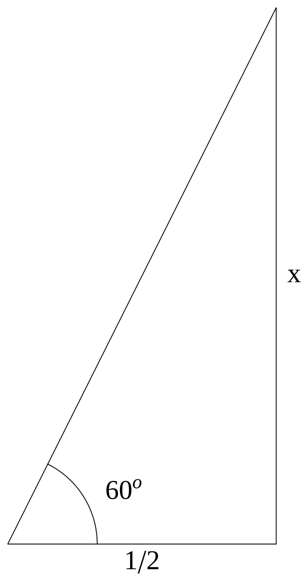
Figur 3.3: Ett exempel på en rätvinklig triangel. Det räta vinkeln finns mellan sidorna a och b.

vinkeln v och kvoter av sidorna enligt nedan:

$$\begin{aligned}
\tan v &= \frac{b}{a} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} \\
\sin v &= \frac{b}{c} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}} \\
\cos v &= \frac{a}{c} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}}
\end{aligned}$$

$\tan v$ utläses "tangens för vinkeln v", $\sin v$ "sinus för vinkeln v" och $\cos v$ utläses "cosinus för vinkeln v".

Exempel 3.11. *Finn ett uttryck för x i figur 3.4 med hjälp av någon av de trigonometriska funktionerna sinus, cosinus och tangens.*



Figur 3.4: En rätvinklig triangel där det är möjligt att bestämma sidan x med hjälp av trigonometriska funktioner.

Lösningsförslag: Enligt definitionen av tangens ser vi att

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{\frac{1}{2}}.$$

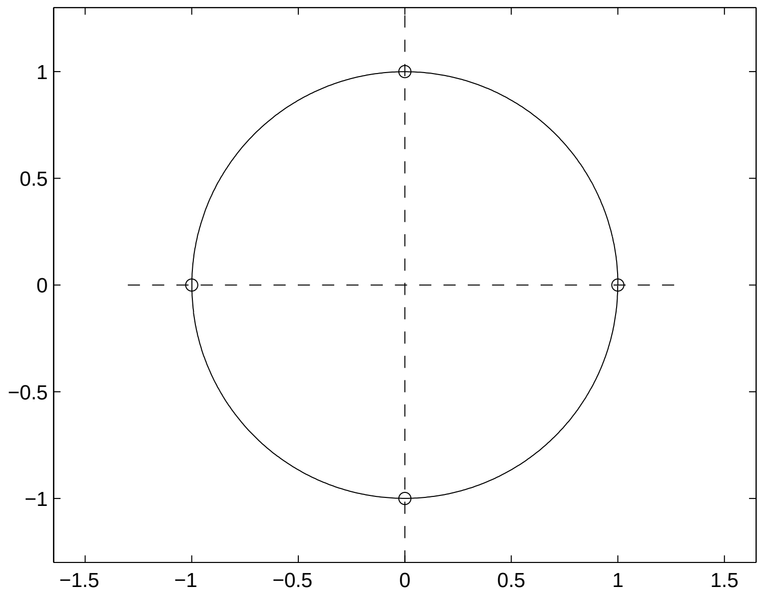
Vi kan multiplicera med $\frac{1}{2}$ på båda sidorna om likhetstecknet och får

$$\frac{\tan 60^\circ}{2} = x.$$

För att kunna beräkna x exakt måste vi veta värdet på $\tan 60^\circ$. ★
Vi kommer lära oss sinus, cosinus och tangens för vissa standardvinklar, till exempel 60°.

Enhetscirkeln

Enhetscirkeln är en cirkel med medelpunkt i origo och radie 1, se figur 3.5.



Figur 3.5: Enhetscirkeln, en cirkel men radie ett centrerad i origo.

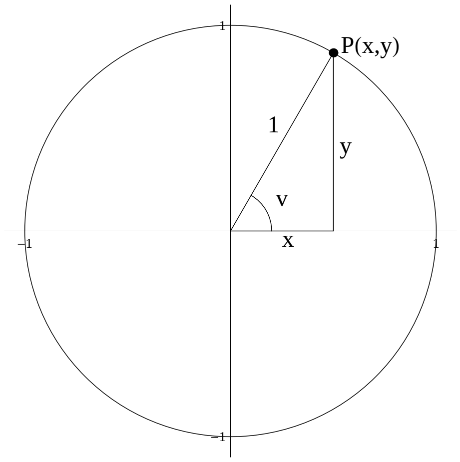
Varje punkt, $P = (x, y)$ i första kvadranten (där både x och y är positiva) på enhetscirkeln formar en triangel, se figur 3.6.

Triangeln är rätvinklig och dess hypotenusa har alltid längd ett. Med våra tidigare definitioner får vi följande samband.

$$\begin{aligned} \tan v &= \frac{y}{x} \\ \sin v &= \frac{y}{1} = y \\ \cos v &= \frac{x}{1} = x \end{aligned}$$

Vi ser också att

$$\tan v = \frac{y}{x} = \frac{\sin v}{\cos v}.$$



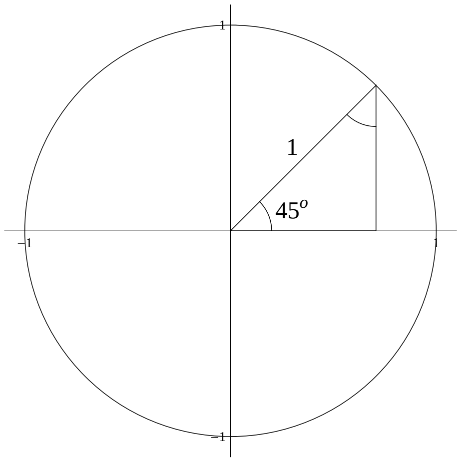
Figur 3.6: En punkt P på enhetscirkeln.

Med hjälp av enhetscirkeln utvidgar vi definitionerna och låter P vara en punkt på enhetscirkeln i vilken som helst av de fyra kvadranterna. Vi ser att cosinus är x-koordinaten och sinus y-koordinaten för punkter på enhetscirkeln. Vi ser speciellt att $\sin 90° = 1$ eftersom vi vid $90°$ är i punkten $(0, 1)$. På samma sätt har vi också till exempel att

$$\cos 90° = 0, \sin 0° = 0 \text{ och } \cos 0° = 1.$$

Standardvinklar

Låt oss nu bestämma sinus och cosinusvärdena för några speciella vinklar. Vi börjar med $45°$. Vi ritar in vinkeln i enhetscirkeln, se figur 3.7.



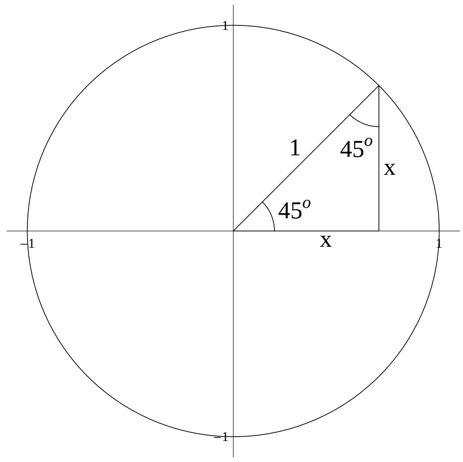
Figur 3.7: En 45-gradersvinkel på enhetscirkeln.

Eftersom vinkelsumman i en triangel alltid är $180°$ och vi har en vinkel på $45°$ och en på $90°$ måste även den sista vinkeln vara $45°$. Det följer på grund av symmetri att de båda kateterna är lika långa, se figur 3.8.

Vi kan nu använda Pythagoras sats[1] för att ta reda på sträckan x. Vi får ekvationen

$$x^2 + x^2 = 1.$$

[1] http://sv.wikipedia.org/wiki/Pythagoras_sats



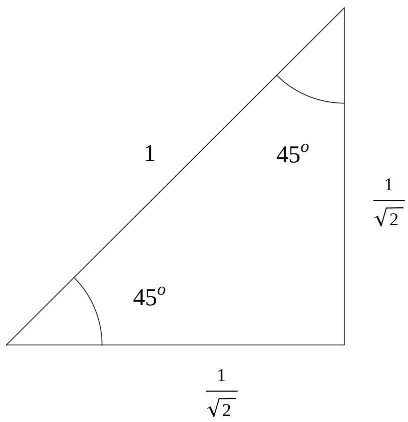
Figur 3.8: En 45-gradersvinkel på enhetscirkeln.

Alltså har vi

$$2x^2 = 1.$$

Vi delar båda led med två, drar roten ur och får resultatet $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Det negativa svaret kan vi bortse ifrån eftersom att en sträcka alltid är positiv. Om vi tittar på figur 3.9 ser vi att

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ och } \tan 45° = 1.$$



Figur 3.9: Hjälptriangel för att bestämma $\tan 45°, \sin 45°$ och $\cos 45°$.

Vi går nu vidare till vinklarna $30°$ och $60°$. Betrakta den liksidiga triangeln i figur 3.10. Alla sidor har längd 1 och därmed är alla vinklar lika stora, alltså $60°$.

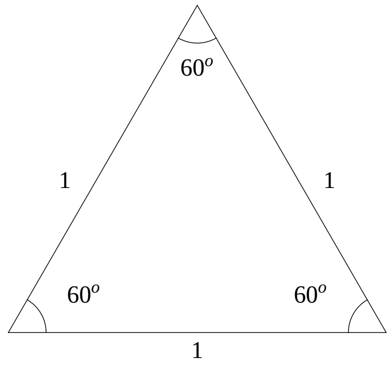
Om vi delar en av vinklarna i triangeln mitt i tu får vi en vinkel på $30°$, se figur 3.11.

Betrakta nu den fetmarkerade triangeln i figur 3.11. Vi kan med hjälp av Pythagoras sats beräkna den obekanta sidan till $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Sedan kan vi läsa ut följande värden för sinus och cosinus.

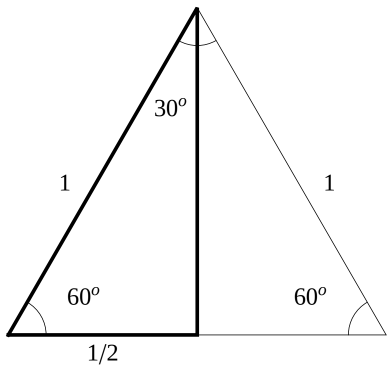
$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ och } \cos 60° = \frac{1}{2}$$

Vi kom tidigare fram till att

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$$



Figur 3.10: En liksidig triangel med sidan 1.



Figur 3.11: Den andra hjälptriangeln.

så vi kan även bestämma tangens för vinklarna $30°, 45°$ och $60°$. Vi kan göra följande tabell:

	sin	cos	tan
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$60°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Exempel 3.12. *Antag att du står tre meter från ett hus. För att beräkna husets höjd börjar du med att mäta vinkeln under vilken huset syns se figur 3.12. Vinkeln mäts till* $60°$. *Beräkna husets höjd.*

Lösningsförslag: Vi får en rätvinklig triangel enligt bild. Vi har att $\tan 60° = h/2$. Som vi kom fram till tidigare är $\tan 60° = \sqrt{3}$. Vi har alltså att $\sqrt{3} = h/2$. Genom att multiplicera med två på båda sidor likhetstecknet får vi

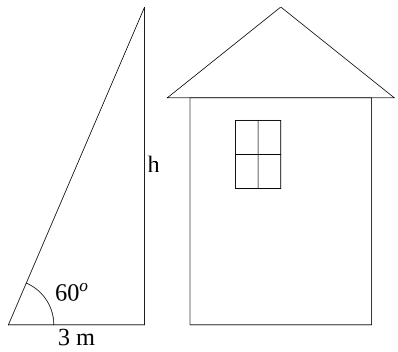
$$h = 2 \cdot \sqrt{3}\text{ m } \approx 3,5\text{ m}.$$

★

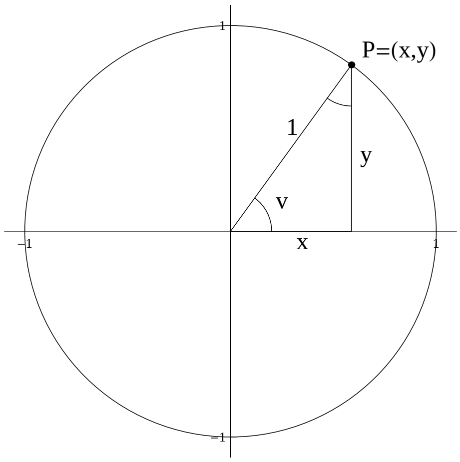
Vi ska nu se på några samband mellan cosinus och sinus av olika vinklar. Vi börjar med att betrakta följande figur (figur 3.13).

Genom att använda Pythagoras sats i en rätvinklig triangel med sidorna x och y i enhetscirkeln får vi

$$1 = x^2 + y^2. \quad (1)$$



Figur 3.12: En illustration av problemet i exempel 3.12.



Figur 3.13: Vinklarna v och $(-v)$ i enhetscirkeln.

Som vi sett tidigare har vi att $x = \cos v$ och $y = \sin v$. Sätter vi in detta i (1) får vi en viktig identitet som kallas *trigonometriska ettan:*

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

Observera att vi skriver $\cos^2 v$ och $\sin^2 v$ istället för $(\cos v)^2$ och $(\sin v)^2$.

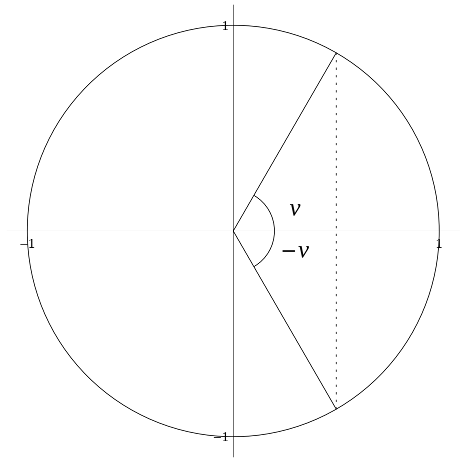
Vi fortsätter med att betrakta $\cos v$ och $\cos(-v)$, för att se ett samband mellan dem. Vi ritar in vinklarna v och $(-v)$ i enhetscirkeln, se figur 3.14. När vi avläser cosinus för en vinkel tittar vi på x-koordinaten. Om vi jämför x-koordinaterna för vinklarna v och $-v$ ser vi att de är lika. Vi får att $\cos(v) = \cos(-v)$. Rita gärna in en vinkel v i en annan kvadrant för att övertyga dig själv om att formeln gäller även då.

Vi går nu vidare till att titta på vinklarna v och $180^\circ - v$ för att se ett samband mellan de båda vinklarnas sinusvärden. Vi ritar in en godtycklig vinkel v i enhetscirkeln, samt vinkeln $180^\circ - v$, se figur 3.15.

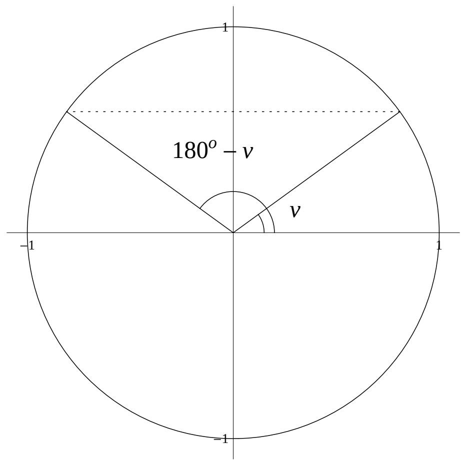
För att avläsa sinusvärdet för en vinkel v i enhetscirkeln tittar vi på y-koordinaten där linjen nuddar cirkeln. Jämför vi y-koordinaterna för v och $180^\circ - v$ ser vi att de är lika. I övning 1 kommer vi se på ytterligare ett par samband mellan sinus och cosinus.

Sammanfattningsvis har vi följande samband:

$$\begin{aligned} \cos^2 v + \sin^2 v &= 1 \\ \cos v &= \cos(-v) \\ \sin v &= \sin(180^\circ - v). \end{aligned}$$



Figur 3.14: Vinklarna v och $(-v)$ i enhetscirkeln.



Figur 3.15: Vinklarna v och $180° - v$ i enhetscirkeln.

Triangelsatserna

Vi lämnar nu de rätvinkliga trianglarna och övergår till mer allmänna trianglar. I det här avsnittet kommer vi lära oss tre viktiga triangelsatser, nämligen areasatsen, cosinussatsen och sinussatsen.

Areasatsen

Som du säkert kommer ihåg kan arean av en triangel beräknas med följande formel

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

där b står för basen och h för höjden i triangeln.

Exempel 3.13. *Beräkna arean av en triangel med basen 5 cm och höjden 10 cm.*

Lösningsförslag: Vi använder formeln ovan.

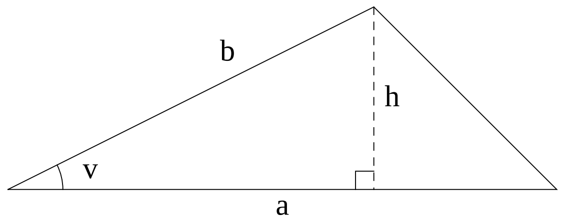
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = A = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25 \text{ cm.}$$

★

Det areasatsen säger är hur man beräknar arean av en triangel när man känner till två sidor och den mellanliggande vinkeln. Låt oss med ett exempel visa hur man kommer fram till areasatsen.

Exempel 3.14. *Beräkna arean av en triangel där vi känner till två sidor, a och b samt dess mellanliggande vinkel v.*

Lösningsförslag: Vi börjar med att rita upp en triangel (se figur 3.16) och rita in höjden. Vi kan då



Figur 3.16: En triangel med de två sidorna a och b och dess mellanliggande vinkel v.

skriva

$$\sin v = \frac{h}{b},$$

och alltså är höjden $h = b \cdot \sin v$. Vi kan nu använda formeln vi hade tidigare för att beräkna arean:

$$A = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin v}{2}$$

Vi har nu kommit fram till areasatsen. ★

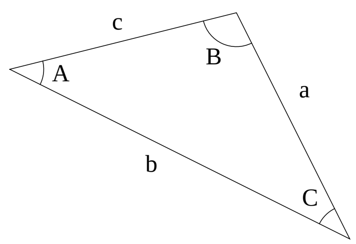
Som vi såg i exemplet ovan så har vi följande formel:

$$\textbf{Areasatsen: } A = \frac{a \cdot b \cdot \sin v}{2},$$

som gäller när a och b är två sidor i en triangel och v är dess mellanliggande vinkel. Areasatsen gäller för såväl trubbiga som spetsiga vinklar.

Sinussatsen

För en triangel ABC med sidorna abc enligt figur 3.17 gäller följande enligt sinussatsen:



Figur 3.17: En triangel ABC med sidorna abc.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Man kan visa sinussatsen från areasatsen, se uppgift 3.

Cosinussatsen

Då en triangel ABC saknar en rät vinkel kan vi inte tillämpa Pythagoras sats. Däremot gäller följande samband:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

där a betecknar motstående sida till vinkeln A och så vidare, se figur 3.17. Vi kommer inte ta upp beviset av denna sats.

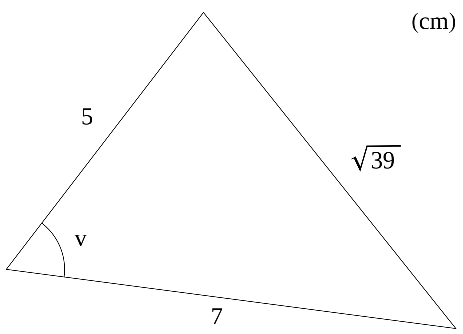
Exempel 3.15. *Vad känner vi igen cosinussatsen som när vinkeln C är en rät vinkel?*

Lösningsförslag: Om C är $90°$ gäller:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cosC = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2,$$

vilket vi känner igen som Pythagoras sats. Pythagoras sats är alltså ett specialfall av cosinussatsen. ★

Exempel 3.16. *Beräkna vinkeln v i figur 3.18.*



Figur 3.18: Finn vinkel v.

Lösningsförslag: Enligt cosinussatsen har vi

$$\begin{aligned} \sqrt{39}^2 &= 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos v \Leftrightarrow \\ 39 &= 25 + 49 - 70 \cdot \cos v \Leftrightarrow \\ -35 &= -70 \cdot \cos v \Leftrightarrow \\ \frac{-35}{-70} &= \cos v \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} &= \cos v \Leftrightarrow \end{aligned}$$

I vårt fall ger detta att $v = 60°$. ★

Sammanfattningsvis har vi följande triangelsatser:

Areasatsen: $A = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin v}{2}$

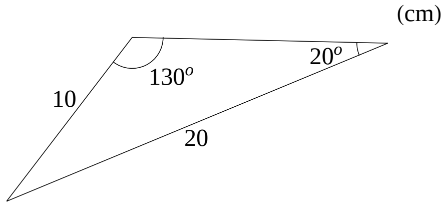
Sinussatsen: $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

Cosinussatsen: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

Övningar

1. Visa att $\sin(90° - v) = \cos v$ och $\cos(90° - v) = \sin v$. *Ledning: Rita upp en rätvinklig triangel med en vinkel v och en vinkel $90° - v$.*

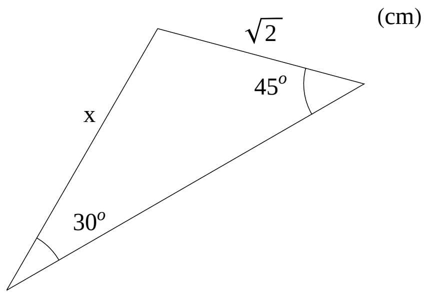
2. Beräkna arean av triangeln i figur 3.19.



Figur 3.19: En triangel där vi vet två sidor och kan beräkna den mellanliggande vinkeln.

3. *(svår)* Bevisa sinussatsen. *Ledning: Börja med att rita upp en triangel ABC med sidorna abs och skriv ner arean för triangeln på tre olika sätt med hjälp av areasatsen.*

4. Beräkna längden av den med x markerade sidan i figur 3.20.



Figur 3.20: Längden av sidan x i figuren kan beräknas med en av triangelsatserna.

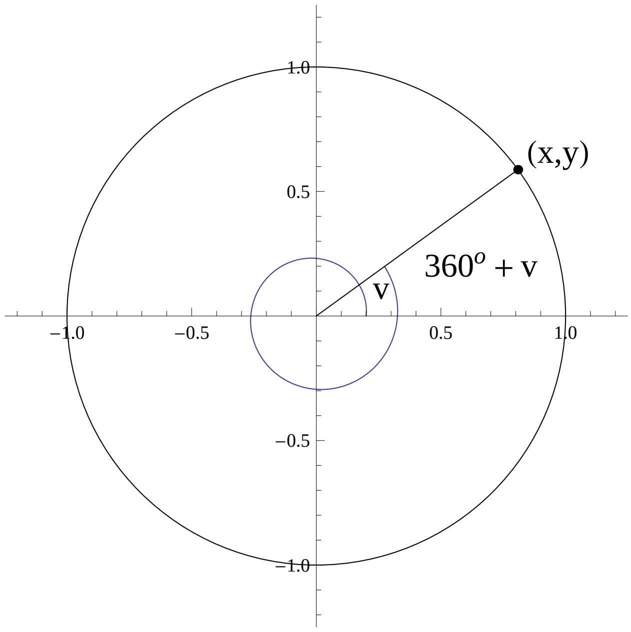
Trigonometriska funktioner

Som vi pratat om i föregående kapitel är sinus, cosinus och tangens exempel på trigonometriska funktioner. Vi definierade också sinus, cosinus och tangens för en vinkel. Vi ska i det här kapitlet studera fler trigonometriska samband samt införa ett nytt sätt att mäta vinklar, nämligen med *radianer*. Vi kommer även titta på negativa vinklar och vinklar som är större än $360°$.

Det finns ytterligare några trigonometriska funktioner men vi kommer inte lägga någon större vikt på dem här.

Periodiska funktioner

Om vi tänker oss en vinkel på enhetscirkeln och till den vinkeln adderar ett varv, d.v.s. $360°$*, hur förändras då sinus- och cosinusvärdena?* Eftersom de trigonometriska funktionernas värden för en vinkel definieras av x och $y-$koordinaterna för en punkt på enhetscirkeln gäller det att ta reda på vilken punkt vi hamnar vid när vi till en vinkel adderar ett varv. Vi ser att vi hamnar vid precis samma punkt. Detta illustreras i figur 3.21. Tänk dig exempelvis att du springer på en löparbana med formen av en cirkel. När du springer ett varv är du alltid tillbaka på samma ställe som du började. På samma sätt kommer du tillbaka till samma ställe om du springer 10 varv. Vi får följande

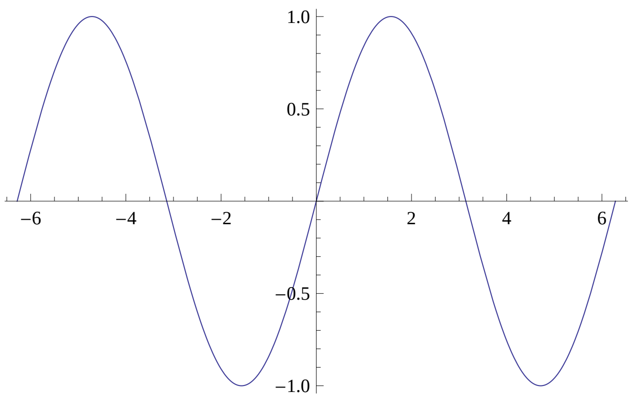


Figur 3.21: I bilden ser vi en vinkel v samt vinkeln $v + 360°$.

trigonometriska samband:

$$\begin{aligned}\sin v &= \sin(v + n \cdot 360°)\\ \cos v &= \cos(v + n \cdot 360°),\end{aligned}$$

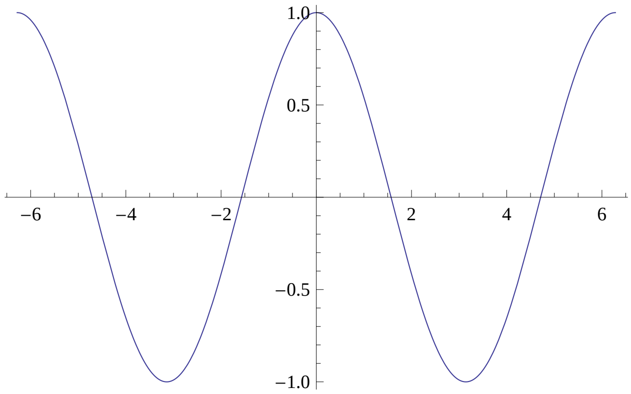
där n är ett heltal. Vi säger att sinus och cosinus är periodiska funktioner med perioden $360°$. Graferna för funktionerna $\sin x$ och $\cos x$ finns i figur 3.22 3.23.



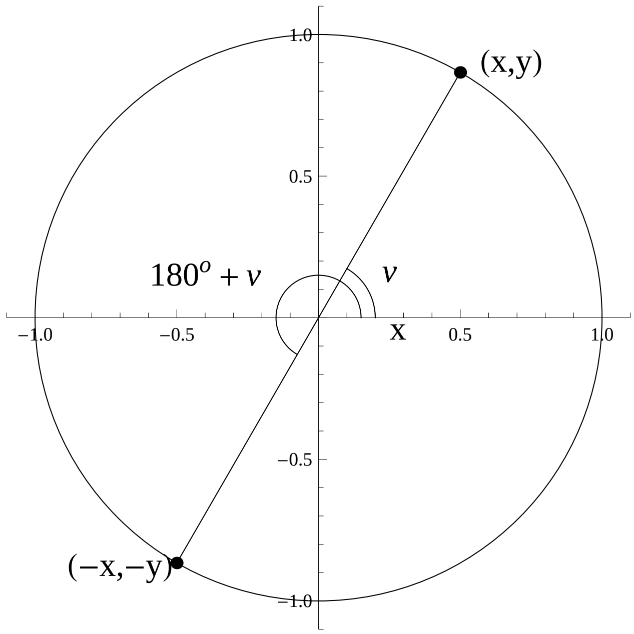
Figur 3.22: Sinuskurva.

Med hjälp av figur 3.24 får vi följande formler som är till hjälp då vi ska bestämma perioden för tangens:

$$\begin{aligned}\sin(v + 180°) &= -y = -\sin v\\ \cos(v + 180°) &= -x = -\cos v\end{aligned}$$



Figur 3.23: Cosinuskurva.



Figur 3.24: En illustration av samband mellan sinus och cosinusvärdena för en vinkel v samt vinkeln $v + 180°$.

Vi får

$$\tan(v + 180°) = \frac{\sin(v + 180°)}{\cos(v + 180°)} = \frac{-\sin v}{-\cos v} = \frac{\sin v}{\cos v} = \tan v.$$

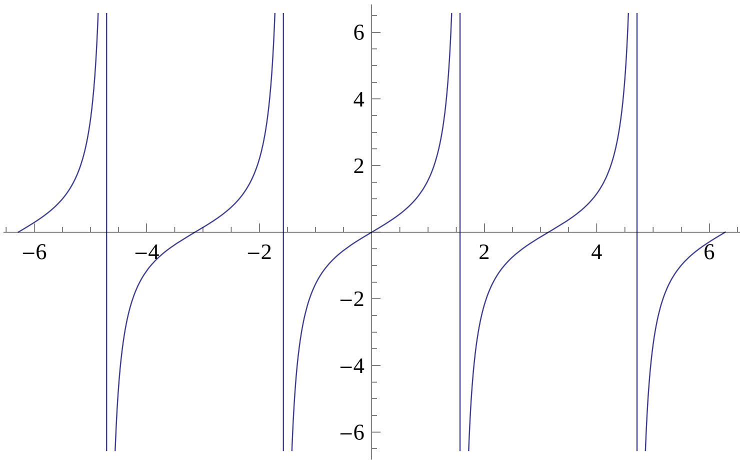
Detta innebär att tangensfunktionen är periodisk med perioden $180°$ och alltså gäller $\tan(v + n \cdot 180°) = \tan v$. Grafen till tangensfunktionen finns ritad i figur 3.25.

Man kan även med en enkel figur visa att $\sin(-v) = -\sin v$ och $\cos(-v) = \cos v$.

Exempel 3.17. *Beräkna* $\cos 225°$.

Lösningsförslag: $\cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ eftersom $\cos(180° + v) = -\cos v$.
★

Exempel 3.18. *Bestäm samtliga lösningar till* $\sin v = \frac{1}{2}$.



Figur 3.25: Tangenskurva.

Lösningsförslag: För att bestämma samtliga lösningar är det mycket att tänka på. Först måste vi veta någon vinkel v som uppfyller $\sin v = \frac{1}{2}$. En sådan är $30°$. Vi måste också komma ihåg att $\sin v = \sin(180° - v)$ vilket innebär att även $v = 150°$ är en lösning till ekvationen. Slutligen får vi inte glömma att $\sin v = \sin(v + n \cdot 360°)$, där n är ett heltal. Alltså får vi att samtliga lösningar till ekvationen ges av

$$30° + n \cdot 360° \text{ och } 150° + n \cdot 360°.$$

★

Additionsformlerna

Det finns fyra additionsformler, de presenteras nedan.

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \sin y \cos x \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
\end{aligned}$$

Vi går igenom beviset av en av dessa formler:

Sats: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Bevis: Beviset görs i fem steg och med beteckningar enligt figur 3.26. Vi vill visa att $\xi = \cos(\alpha + \beta)$. är samma som $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Först använder vi sinussatsen i var och en av de små trianglarna i figuren:

$$\text{Undre triangeln:} \quad \frac{\sin\alpha}{x} = \frac{\sin(90° - \alpha)}{\xi} = \frac{\cos\alpha}{\xi}$$

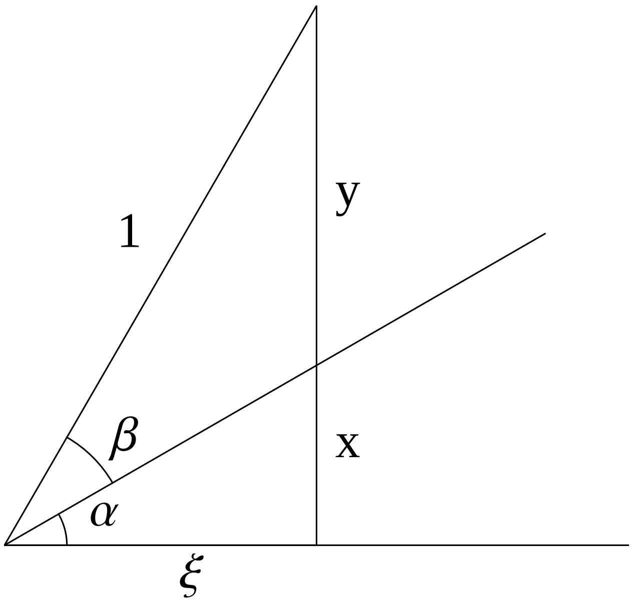
$$\text{Övre triangeln:} \quad \frac{\sin\beta}{y} = \sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$$

Genom att multiplicera upp nämnarna och kombinera dessa får vi följande:

$$\xi \sin\alpha + \sin\beta = (x+y)\cos\alpha. \tag{3.5.0.1}$$

Vi har också enligt Pythagoras sats gäller att $(x+y)^2 + \xi^2 = 1$. Kvadrerar vi ekvationen 3.5.0.1 och ersätter $(x+y)^2$ med $1 - \xi^2$ så får vi

$$(\xi\sin\alpha + \sin\beta)^2 = (1 - \xi^2)\cos^2\alpha$$



Figur 3.26: Bild till beviset.

Vi utvecklar kvadraterna och flyttar över $\xi^2 \cos^2 \alpha$ till vänsterledet:

$$\xi^2 \sin^2 \alpha + \xi^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2\xi \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha$$

Faktoriserar vi de två första termerna och använder trigonometriska ettan så får vi

$$\xi^2 + 2\xi \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha$$

Vi adderar $\sin^2 \alpha \sin^2 \beta$ på båda sidorna och flyttar över $\sin^2 \beta$ till högerledet:

$$\xi^2 + 2\xi \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

Nu kan vi faktorisera vänsterledet till en kvadrat. Därefter manipulerar vi högerledet genom att faktorisera och använda trigonometriska ettan upprepade gånger.

$$\begin{aligned}
(\xi + \sin \alpha \sin \beta)^2 &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\
&= \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta(1 - \sin^2 \alpha) \\
&= \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta(\cos^2 \alpha) \\
&= \cos^2 \alpha(1 - \sin^2 \beta) \\
&= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta
\end{aligned}$$

Vi har alltså att

$$(\xi + \sin \alpha \sin \beta)^2 = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta.$$

Vi drar roten ur båda sidor och löser ut ξ:

$$\xi = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Detta är vad vi ville visa.

Med hjälp av additionsformlerna och trigonometriska ettan kan vi härleda många andra formler, se t.ex. exemplet nedan samt uppgift 3.

Exempel 3.19. *Visa att* $\cos 2v = 2\cos^2 v - 1$.

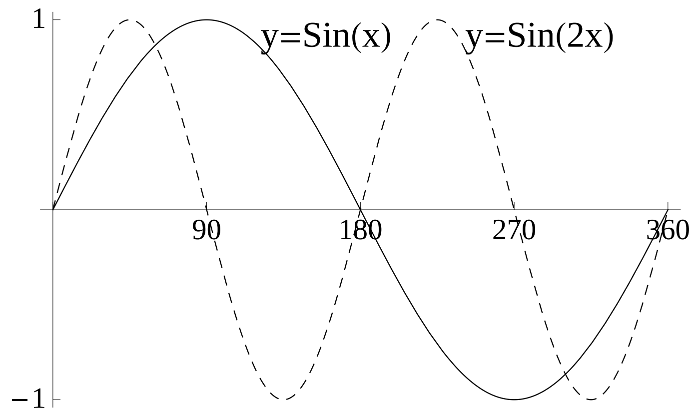
Lösningsförslag: När man ska lösa uppgifter av typen *visa att* börjar man från ett av leden och arbetar sig fram till det andra. Vi kan till exempel börja med vänsterledet.

$$\begin{aligned}\cos 2v &= \cos(v+v) = \text{[additionssatsen]}\\ &= \cos^2 v - \sin^2 v = \text{[trigonometriska ettan]}\\ &= \cos^2 v - (1-\cos^2 v) = 2\cos^2 v - 1\end{aligned}$$

★

Period, amplitud och fasförskjutning.

Nu ska vi titta på funktioner av typen $A\sin(Bx - C)$ och $A\cos(Bx - C)$, där A, B och C är konstanter. Vi har tidigare pratat om perioden av $\sin x$ och $\cos x$. Vi ska nu se vad som händer med perioden om vi istället undersöker funktioner av typen $\sin(Bx)$ och $\cos(Bx)$. Vi börjar med att betrakta $\sin x$ och $\sin 2x$ för att jämföra dem. Vi vet sedan tidigare att $\sin x$ har perioden $360°$ vilket innebär att sinuskurvan upprepar sig efter $360°$. De båda kurvorna $\sin x$ och $\sin 2x$ är uppritade i figur 3.27.



Figur 3.27: De båda kurvorna $\sin x$ och $\sin 2x$.

Vi ser att $\sin 2x$ upprepar sig redan efter 180°. Alltså har $\sin 2x$ perioden $180°$. Allmänt gäller att $\sin(Bx)$ och $\cos(Bx)$ har perioden $\frac{360°}{B}$.

I figur 3.27 ser vi också att funktionen $\sin x$ antar värden mellan -1 och 1. Man säger att $\sin x$ har amplitud 1. Vi jämför nu $\sin x$ med $2\sin x$, se figur 3.28.

Vi ser att de båda kurvorna har samma period men $2\sin x$ antar värden mellan -2 och 2. Man säger att $2\sin x$ har *amplitud* 2. Allmänt gäller att $A\sin x$ och $A\cos x$ har amplitud A.

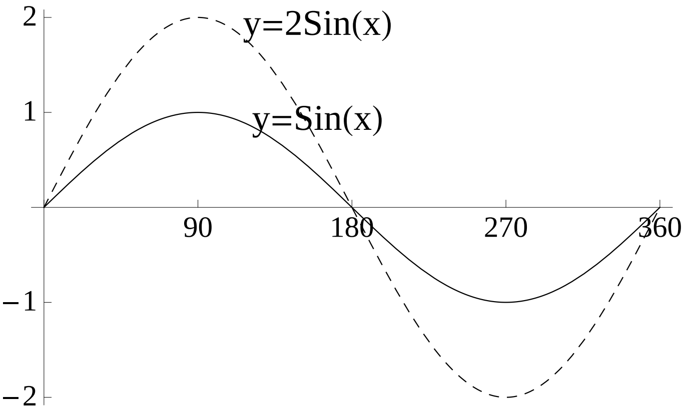
Kvar har vi nu *fasförskjutning*. Betrakna nu figur 3.29 där vi ser de båda funktionerna $\sin x$ och $\sin(x - 45°)$.

Vi ser att de båda kurvorna ser likadana ut förutom att $\sin(x - 45°)$ är förskjuten $45°$ åt höger i x-led. Allmänt gäller att $\sin(x - C)$ och $\cos(x - C)$ har en fasförskjutning på C längdenheter åt höger och C är positivt och åt vänster om C är negativt.

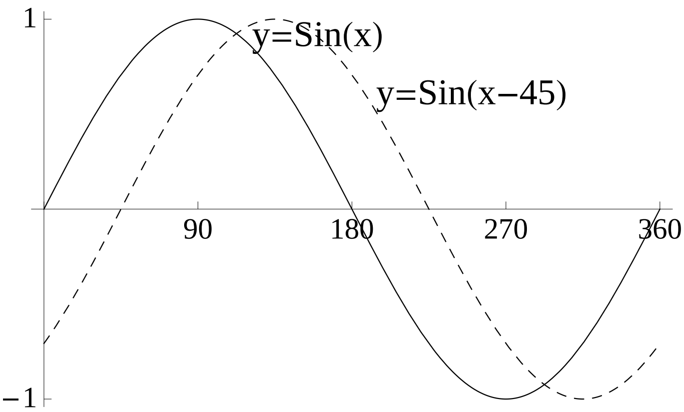
Vi kan nu bestämma period, amplitud och fasförskjutning för funktioner på formen $A\sin(Bx + C)$ och $A\cos(Bx + C)$ där A, B och C är konstanter.

Exempel 3.20. *Bestäm period, amplitud och fasförskjutning för funktionen* $3\cos(2x - 30°)$.

Lösningsförslag: Amplituden kan direkt avläsas till 3 och perioden till 2. För att bestämma fasförskjutningen vill vi veta hur mycket x förskjuts och inte hur mycket $2x$ förskjuts. Fasförskjutningen blir alltså *inte* $30°$. Vi gör en omskrivning för att kunna avläsa fasförskjutningen. $3\cos(2x - 30°) = 3\cos(2(x - 15°))$. Fasförskjutningen blir alltså 15° till höger i x-led. ★



Figur 3.28: De båda kurvorna $\sin x$ och $2 \sin x$.



Figur 3.29: De båda kurvorna $\sin x$ och $\sin(x - 45°)$.

Radianer

Istället för att mäta en vinkel i grader kan man mäta den i radianer, vilket ofta förkortas rad. Ett varv, det vill säga $360°$, är 2π radianer. Detta betyder att

$$1° = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \text{ och } 1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$$

och alltså är t. ex. $30° = \frac{\pi}{6}$ rad.

Överallt där vi tidigare använt oss av grader kan vi på samma sätt använda oss av radianer för att mäta vinklar. Fördelen med radianer är att det bland annat underlättar derivering och integrering.

Exempel 3.21. *Bestäm* $\cos \frac{\pi}{4}$.

Lösningsförslag: Vi har att $\frac{\pi}{4}$ radianer motsvarar 45 grader och alltså har vi $\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
★

Övningar

1. Beräkna exakt
   (a) $\sin(-30°)$
   (b) $\sin 420°$
   (c) $\cos(-720°)$
2. Bestäm samtliga lösningar till $\cos v = \frac{1}{2}$.
3. Visa att $(\cos v + \sin v)^2 = 1 + \sin 2v$.
4. Bestäm period, amplitud och fasförskjutning för $5\sin(\frac{1}{3}x + 15)$.
5. Bestäm följande vinklar i radianer.
   (a) $45°$
   (b) $90°$
   (c) $150°$
   (d) $270°$
6. Beräkna $\sin\frac{\pi}{6}$.
7. Lös ekvationen $\cos^2 x = \frac{1}{2}$. Svara i radianer.

Kapitel 4

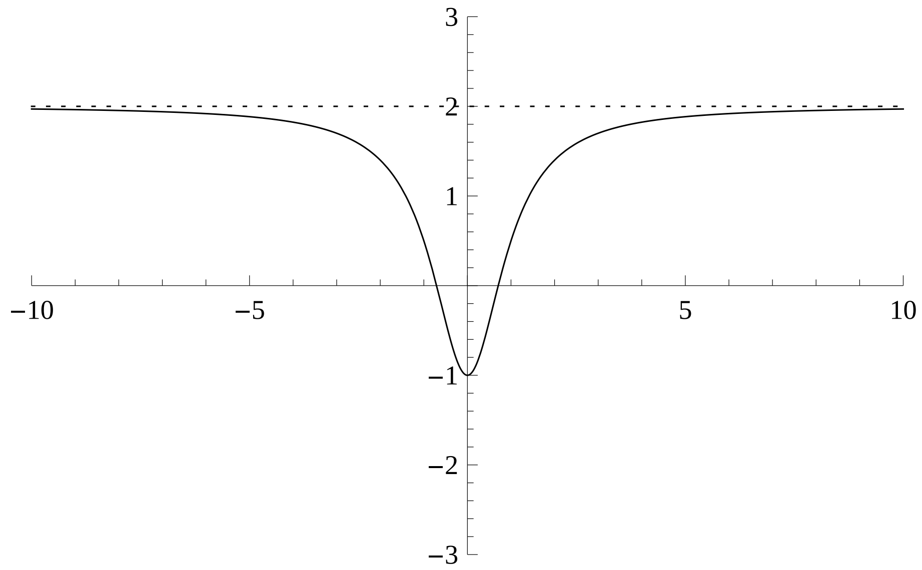
Derivata och integraler

Du har säkert stött på funktioner som ser ut som om de närmar sig ett visst värde när x blir mycket stort. Andra funktioner antar väldigt stora värden då de närmar sig ett visst x-värde. Detta kallas *gränsvärden*. En mycket viktig användning av gränsvärden är när man vill bestämma hur fort en funktion växer. Tillväxten eller lutningen på funktionen kallas *derivata*. Integraler används för att bestämma areor under funktionskurvor och är ett slags anti-derivator. De definitioner av gränsvärden, derivator och integraler som vi kommer att ge här är gäller över de reella talen. Det går att definiera dessa begrepp även för komplexa tal, men vi kommer inte att gå in på det här.

4.1 Gränsvärden

Det finns i grunden två typer av gränsvärden när vi arbetar med funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Det ena fallet är när x går mot antingen plus eller minus oändligheten. Vi skriver detta som $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$. Först och främst kan vi dra slutsatsen att funktionen är definierad över hela $\mathbb{R}$ eftersom nämnaren $x^2 + 1$ aldrig kan vara lika med noll. Hur uppför sig då funktionen? Vi kan notera att funktionen är jämn, dvs att $f(a) = f(-a)$. Det innebär att grafen för f är symmetrisk kring nollan.

Låt oss studera några värden på x. Av symmetriskäl räcker det att titta på positiva värden. Vi har att $f(0) = -1$, $f(1) = 1/2$, $f(2) = 7/5$, $f(3) = 17/10$, $f(4) = 31/17$, $f(5) = 49/26$, $f(6) = 71/37$. Vi noterar att alla dessa värden är mindre än två. I figuren nedan har vi skissat $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$ samt linjen $y = 2$. Det verkar som att $f(x) \to 2$ då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$.



Figur 4.1: $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$

Vi säger att gränsvärdet för $f(x)$ när x går mot oändligheten är 2. Detta skriver vi som

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+1} = 2$$

Det andra fallet är när x närmar sig ett ändligt tal, till exempel 0. Ett klassiskt gränsvärde är

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

och det visar sig att detta gränsvärde är 1. (Observera att man inte bara kan stoppa in $x = 0$ i uttrycket, eftersom vi då får $0/0$ vilket inte är definierat.)

Om man vill säga att $f(x)$ närmar sig L då $x \to a$, så skriver man

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

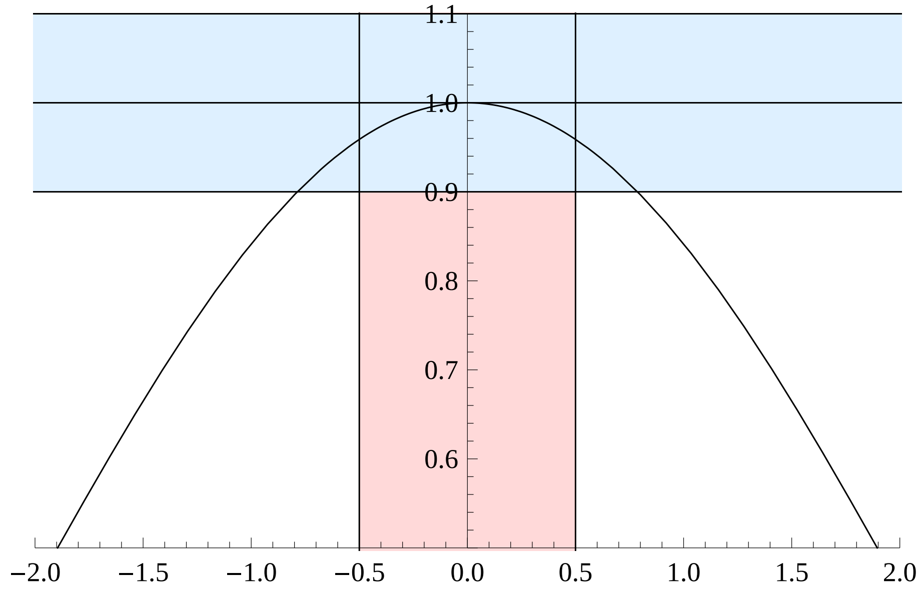
Vi har ännu inte berättat exakt vad ett gränsvärde är, så nu kommer den formella definitionen:
Definition: *Vi säger att $f(x)$ har gränsvärdet L i punkten $x = a$ om det för varje tal $\epsilon > 0$ finns ett tal δ (som beror på ϵ), så att*

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Bli inte rädd, vi ska tolka detta på ett mer förståeligt sätt. Vi tänker oss att vi ska kunna uppskatta hur nära a som x måste vara för att $f(x)$ maximalt skiljer sig ϵ från L.

Vi visar här principen för gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$. Gränsvärdet är 1, så i vårt fall är $L = 1$ och $a = 0$. Om gränsvärdet existerar, så ska vi för varje $\epsilon > 0$ kunna hitta ett intervall på x-axeln som avbildas på y-axeln nära 1.

I figuren är $\epsilon = 0.1$ som området mellan de vågräta linjerna. Här kommer då $\delta = 0.5$ fungera eftersom alla x så att $|x| < 0.5$ uppfyller kravet att $|f(x) - 1| < 0.1$.



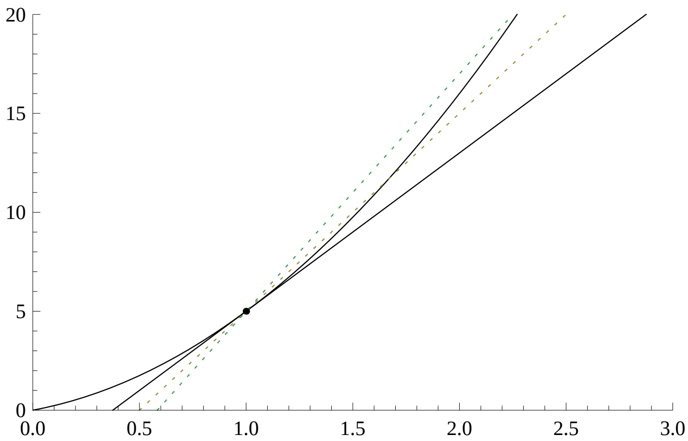
Figur 4.2: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ på vardera sidor om $x = 0$

Vi kan grovt säga att om x håller sig tillräckligt nära a, så kommer $f(x)$ befinna sig i närheten av L. Motsvarande definitioner till gränsvärden när $x \to \pm\infty$ och när $L = \pm\infty$ ser ut på ungefär samma sätt.

Det är generellt sett ganska svårt att beräkna gränsvärden direkt från definitionen. Första problemet är att definition bara kan användas om man redan har en aning om vad gränsvärdet ska bli, och beräkningarna brukar bli omständliga. Man har då utifrån definitionen bevisat ett antal generella regler, som är lättare att använda.

4.2 Derivata

Begreppet derivata beskriver förändringshastighet. Om vi har en funktion $s(t)$ som beskriver hur lång sträcka vi har åkt, så kommer funktionens derivata $s'(t)$ beskriva hastigheten. Ritar vi grafen till $s(t)$ så kommer derivatan i punkten t_0 vara lutningen på *tangenten* till $s(t)$ i punkten t_0.



Figur 4.3: En funktion samt dess tangent i punkten $(1, 5)$.

Här nedan ser vi en kurva samt tre linjer. Den heldragna linjen tangerar kurvan, men de två andra linjerna tangerar inte.

Följande resonemang ger oss kur vi kommer fram till tangentens lutning och då samtidigt derivatan i en punkt x_0.

Om vi ritar en linje genom två punkter på kurvan $f(x)$, där en av punkterna är $(x_0, f(x_0))$ och den andra punkten är nära denna punkten, så kommer denna linjes lutning vara nästan tangentens lutning. Ju närmare den andra punkten är $(x_0, f(x_0))$, desto bättre uppskattning.

Lutningen på en linje mellan punkterna (a, b) och (c, d) ges av formeln $\frac{d-b}{c-a}$, så om vi i vårt fall låter punkternas x-koordinater vara x_0 och $x_0 + h$, så kommer linjen genom punkterna $(x_0, f(x_0))$ och $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ bli

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Parametern h är alltså hur mycket till höger den andra punkten är, och om vi låter h närma sig 0, så kommer vi då få lutningen på tangenten. Vi kan nu definiera derivatan av $f(x)$, som betecknas $f'(x)$:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Genom att använda sig av gränsvärden så kan man härleda derivatan av olika funktioner, något som du säkert minns från gymnasiet. Det finns också ett par allmänna regler för hur man räknar med derivering som också härleds med hjälp av gränsvärden.

Det finns flera sätt att beteckna derivatan av $y = f(x)$:

$$f'(x), \quad D\left[f(x)\right], \quad \frac{dy}{dx}$$

Den sista beteckningen ser lite underlig ut med den visar sig vara till stor nytta när man använder sig av kedjeregeln.

När man är intresserad av derivatan i en viss punkt i den sista notationen skriver man $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x,y)}$.

Derivator av kända funktioner

Nedan visas derivator att några kända funktioner.

funktion	derivata
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
x^n	nx^{n-1}

Exempel 4.1.

$$D[x^{10}] = 10x^9, \quad D[x^{3/2}] = \frac{3}{2}x^{1/2}, \quad D[1/x] = D[x^{-1}] = -1 \cdot x^{-2} = -1/x^2$$

Låt oss med hjälp av derivatans definition bevisa att derivatan av x^2 är $2x$. Vi har alltså $f(x) = x^2$ och vi ska bestämma $f'(x)$. Enligt derivatans definition är

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Eftersom $f(x) = x^2$ så är

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x + h.$$

När h närmar sig noll närmar sig $2x + h$ uttrycket $2x$, så

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x,$$

precis vad vi skulle visa.

För att bevisa att derivatan av x^n är nx^{n-1} för ett godtyckligt n kan man använda binomial-satsen.

Derivatan av summor av funktioner

Det gäller att derivatan av en summa av funktioner är densamma som summan av funktionernas derivator, vilket är mycket hjälpsamt vid beräkningen av derivator. Mer precis så gäller det att

$$\boxed{\begin{array}{c} D[f(x) + g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)] \\ \text{och} \\ D[af(x)] = aD[f(x)] \text{ för } a \in \mathbb{R}. \end{array}}$$

Exempel 4.2.

$$D[\sin x + x^2 + 4x^4] = D[\sin x] + D[x^2] + 4D[x^4] = \cos x + 2x + 16x^3.$$

Produktregeln

Produktregeln berättar hur man deriverar produkten av två funktioner:

$$\boxed{D\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Exempel 4.3. *Vad blir derivatan av funktionen $f(x) = x^2 \cdot sin(x)$?*

Lösningsförslag: Låt $g(x) = x^2$ och låt $h(x) = \sin x$. Då får vi

$$D(f(x)) = D(g(x)h(x)) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

enligt produktregeln. ★

Produktregeln visar man med hjälp av definitionen på derivata och gränsvärdesformler.

Kedjeregeln

Denna regel berättar hur man deriverar en sammansatt funktion:

$$\boxed{D\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)}$$

Man kallar $f(x)$ för den *yttre* funktionen och $g(x)$ för den *inre* funktionen. Regeln minns man då lättast genom att tänka "yttre derivatan gånger inre derivatan".

Exempel 4.4. *Bestäm derivatan av funktionen* $f(x) = sin(x^2)$.

Lösningsförslag: Låt $g(x) = sin(x)$ och låt $h(x) = x^2$. Då är $f(x) = g(h(x))$. Enligt kedjeregeln blir derivatan

$$D(f(x)) = D(g(h(x)) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = cos(x^2) \cdot 2x.$$

★

Vi ska nu genomföra beviset för kedjeregeln. Vi kallar $g(x)$ för y, och vi använder Δx för att beteckna en liten skillnad på x. Då gäller det att en liten skillnad på x ger oss en liten skillnad på y, förutsatt att g är kontinuerlig. Det vill säga $\Delta y = g(x + \Delta x) - g(x)$ är litet om Δx är litet.

Enligt definitionen av derivata så gäller det att

$$D\left[f(g(x))\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

Vi förlänger täljare och nämnare med $g(x + \Delta x) - g(x)$ och får då följande:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Vi kan enligt ovan snygga till nämnaren, samt byta ut $g(x + \Delta x)$ till $\Delta y + g(x)$ i nämnaren:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta y + g(x))) - f(g(x))}{\Delta y} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Här byter vi nu ut $g(x)$ till y, och får

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y + \Delta y)) - f(y)}{\Delta y} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Eftersom $\Delta y \to 0$ då $\Delta x \to 0$, så får vi att ovanstående blir

$$\left(\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(y + \Delta y)) - f(y)}{\Delta y}\right) \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right)$$

Vi känner nu igen delarna som definitioner på derivator och vi har helt enkelt

$$f'(y) \cdot g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Vi är nu klara med beviset.

Kvotregeln

Kvotregeln berättar hur man ska beräkna derivatan av en kvot:

$$\boxed{D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.}$$

Exempel 4.5. *Beräkna derivatan av $f(x) = x^2/sin(x)$.*

Lösningsförslag: Låt $g(x) = x^2$ och låt $h(x) = sin(x)$. Då är

$$f'(x) = \frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2} = \frac{2x\cdot sin(x) - x^2 cos(x)}{cos(x)^2}.$$

★

Man kan härleda kvotregeln från produktregeln och kedjeregeln:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = D\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]$$

Produktregeln ger oss att högerledet ovan blir

$$f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot D\left[\frac{1}{g(x)}\right]$$

Vi använder kedjeregeln på $D\left[\frac{1}{g(x)}\right]$ och får $-\frac{1}{(g(x))^2}\cdot g'(x)$ eftersom den yttre funktionen är $1/x$ och denna har derivatan $-1/x^2$. Sätter vi in detta får vi

$$f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Skriver vi det på gemensamt bråkstreck får vi då till sist att

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Tillämpning av derivata

Vi börjar med lite repetition från gymnasiet. Derivatan till en funktion är noll eller odefinierad i punkter där lokalt minimum eller maximum finns. Funktionen $f(x) = 16 - x^2$ har ett maximum för $x = 0$ och mycket riktigt så är $f'(0) = 0$. Funktionen $f(x) = |x|$ har ett minimum i $x = 0$ och saknar derivata i den punkten. Detta för att derivatan till vänster om $x = 0$ är -1, men till höger om $x = 0$ så är derivatan 1. Gränsvärdet som beräknar derivatan finns då inte. Punkter som är lokala maxima eller minima kallas för *extrempunkter*.

Om man vill finna maximum (minimum) för en funktion, $f(x)$ i ett intervall $[a, b]$, så kan man göra på följande sätt.

1. Derivera $f(x)$ och bestäm alla punkter inom $[a, b]$ där $f'(x) = 0$. Beräkna funktionsvärdet i dessa.

2. Beräkna funktionens värde i eventuella punkter där derivatan inte är definierad.

3. Beräkna funktionens värde i ändpunkterna.

4. Funktionens maximum (minimum) är det största (minsta) värdet av alla funktionsvärden du beräknat.

Det gäller att andraderivatan $f''(x)$ är positiv i ett lokalt minimum, och $f''(x) < 0$ i ett lokalt maximum. Observera att $f'(x) = 0$ inte garanterar att x är ett maximum eller minimum; funktionen $f(x) = x^3$ har inga lokala extrempunkter trots att $f'(0) = 0$.

Exempel 4.6. *Bestäm alla extrempunkter, deras typ, och funktionsvärdet i dessa för funktionen* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

Lösningsförslag: Vi beräknar att $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$, så lösningarna till $f'(x) = 0$ ger oss efter division med 6 att $x^2 - x - 2 = 0$. Detta gäller för $x = 2$ och $x = -1$. Detta blir våra potentiella extrempunkter, eftersom $f(x)$ inte har några punkter där derivatan saknas.

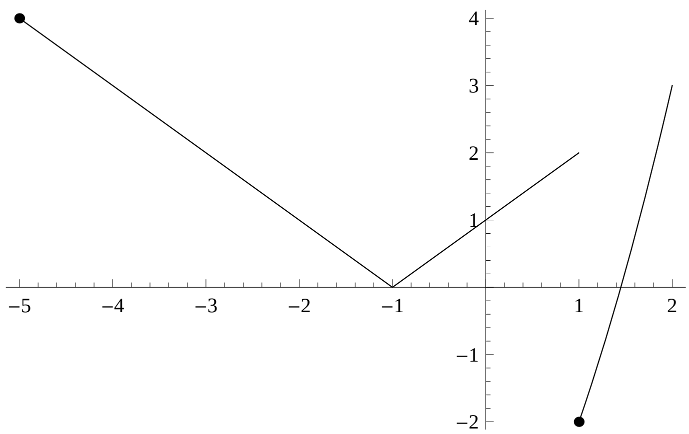
Vi beräknar sedan $f''(x) = 12x - 6$ och vi får att $f''(-1) = -18 < 0$, så $x = -1$ är ett maximum. Vidare så är $f''(2) = 18$ och $x = 2$ är då ett minimum.

Sammanfattningsvis har vi då att $x = -1$ är ett maximum, och $x = 2$ är ett minimum. Funktionsvärdena i dessa punkter är $f(-1) = 12$ resp. $f(2) = -15$. ★

Det var ju ganska enkelt eftersom funktionen ovan var snäll. Nu tar vi ett tuffare exempel:

Exempel 4.7. *Finn största och minsta värde som följande funktion antar i intervallet* $[-5, 2]$*:*

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| \text{ om } x \leq 1 \\ (1+x)^2 - 6 \text{ om } x > 1 \end{cases}$$



Figur 4.4: Funktionen $f(x)$

Lösningsförslag: Funktionen är uppdelad i två delar, med olika funktioner man ska använda beroende på om $x \leq 1$ eller om $x > 1$ (se Figur 4.4). Absolutbeloppet självt är också en sådan funktion som är uppdelad, beroende på om det innanför absolutbeloppet är positivt eller negativt. Alltså, beroende på om $x + 1 > 0$ eller om $x + 1 < 0$. Vi kan då skriva om funktionen ovan i tre delar och på så sätt eliminera absolutbeloppet:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1) \text{ om } x < -1 \\ x + 1 \text{ om } -1 \leq x \leq 1 \\ (1+x)^2 - 6 \text{ om } x > 1 \end{cases}$$

Vi kan nu derivera funktionen ovan genom att derivera funktionsdelarna på resp. intervall:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 \text{ om } x < -1 \\ \text{odefinierad om } x = -1 \\ 1 \text{ om } -1 < x < 1 \\ \text{odefinierad om } x = 1 \\ 2x + 2 \text{ om } x > 1 \end{cases}$$

Observera att i punkterna $x = -1$ och $x = 1$ så saknas derivata, eftersom funktionen inte är kontinuerlig där. Nu undersöker vi när derivatan är 0. Som vi kan se, så är det endast sista delen som kan bli 0, och detta sker när $x = -2$. Men $x = -2$ ligger inte i det intervall där den funktionsdelen gäller (vi har ju att $f'(x) = 2x + 2$ bara om $x > 1$). Alltså är derivatan aldrig 0.

Då återstår diskontinuitetspunkter samt intervallets ändpunkter som är $[-1, 1]$ resp. $[-5, 2]$. När man undersöker diskontinuitetspunkter så måste man beräkna värdet för funktionerna på vardera sida om diskontinuitetspunkten. För punkten $x = -1$, så blir både $-(x + 1)$ och $x + 1$ funktionsvärdet 0. Men punkten $x = 1$ ger oss $(1 + 1) = 2$ resp. $(1 + 1)^2 - 6 = -2$.

Värdena i $x = -5$ och $x = 2$ blir 4 resp. 3. Det största värdet vi fann är för $x = 2$ och det gav oss värdet 4. Det minsta inträffade för $x = 1$ och gav oss värdet -2. Svaret på uppgiften blir då att största värdet i intervallet är 4, och minsta värdet som antas är -2.

★

Övningar

1. Finn derivatan i angiven punkt för följande implicit givna funktioner:
   (a) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$, i punkten $(2, -2)$
   (b) $x^3 + y^3 + 2x = -1$ i punkten $(0, -1)$
   (c) $\cos(y)\sin(x) = \cos(x)$ i punkten $(\pi/2, \pi/2)$
2. Finn minsta och största värde som följande funktioner antar i intervallet $[-10, 10]$:
   (a) $10 - 2x - x^2$
   (b) $|x - 2| + x^2 - 4x$

4.3 Integraler

För att uppskatta en area A i planet som begränsas av en funktionskurva och ett intervall $[a, b]$ på x-axeln kan vi ta hjälp av inskrivna och omskrivna rektanglar. Dessa rektanglar brukar kallas för övre och undre rektanglar, se figur 4.5.

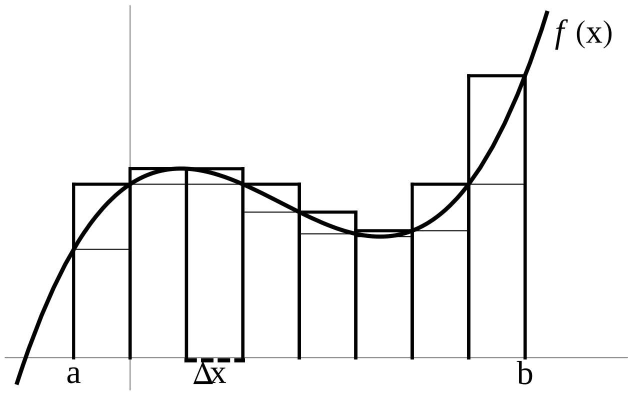
Låt f vara en funktion som är begränsad i intervallet $[a, b]$. Detta betyder att $f(x) < \infty$ för alla $x \in [a, b]$. T.ex. är alla polynom begränsade i $[a, b]$ oavsett värde på a och b.

Låt oss nu dela upp intervallet $[a, b]$ i n stycken delar. Indelningen kan till exempel skrivas $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, så att x_i är den högra ändpunkten i det i:te intervallet från vänster räknat. Vi får då att det $i$te intervallet ges av $[x_{i-1}, x_i]$ och har längden $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$.

Exempel 4.8. *Om vi delar upp intervallet* $[1, 2]$ *i fem delar så får vi*

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1,2 \quad x_2 = 1,4, \quad x_3 = 1,6, \quad x_4 = 1,8 \quad \textit{och} \quad x_5 = 2.$$

Beteckna det största funktionsvärdet i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ med M_i och det minsta funktionsvärdet i samma intervall med m_i. Då kommer den övre rektangeln i det i:te intervallet att ha arean $M_i \cdot \Delta x_i$ och den undre rektangeln i samma intervall att ha arean $m_i \cdot \Delta x_i$.



Figur 4.5: Övre och undre rektanglar.

Vi erhåller den så kallade *översumman* och *undersumman* som

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \text{ respektive } s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

Exempel 4.9. *Låt* $f(x) = x^2$*. Beräkna undersumman respektive översumman på intervallet* $[1, 2]$ *då* $n = 2$.

Lösningsförslag: Vi noterar först att $f(x)$ är växande på intervallet $[1, 2]$. Eftersom $n = 2$ ska vi dela upp intervallet i två delar, nämligen $[1, 3/2]$ och $[3/2, 2]$. Det största värdet på funktionen i intervallet $[1, 3/2]$ är $f(3/2) = 9/4$, alltså är $M_0 = 9/4$. Det minsta värdet i samma intervall är $f(1) = 1$, alltså är $m_0 = 1$. Det största värdet på f i intervallet $[3/2, 2]$ är $f(2) = 4$, så $M_1 = 4$ och det minsta värdet är $f(3/2) = 9/4$, så $m_1 = 9/4$. Bägge två intervallen har längden $1/2$, så

$$S_n = M_0 \cdot 0,5 + M_1 \cdot 0,5 = \frac{9/4 + 4}{2} = \frac{17}{8}$$

och

$$s_n = m_0 \cdot 0,5 + m_1 \cdot 0,5 = \frac{1 + 9/4}{2} = \frac{13}{8}$$

★

Den sökta arean under funktionskurvan ligger givetvis mellan dessa två areor. Areorna s_n och S_n närmar sig varandra då indelningen blir finare och finare, alltså då antalet delintervall går mot oändligheten. Vi säger att f är **integrerbar** om s_n och S_n går mot samma tal då $n \to \infty$, och detta tal kallas för **integralen av** f.

Integralen betecknas $\int_a^b f(x)dx$. Generellt så skriver man integralen som ett gränsvärde av en summa på följande sätt:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

där ξ_i är en godtyckligt vald punkt i delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$. Givetvis så gäller att $\Delta x_i \to 0$ då $n \to \infty$ för varje intervall.

De flesta funktioner du hittills har stött på är integrerbara. I allmänhet gäller att alla *kontinuerliga* funktioner är integrerbara. Vi ska inte gå in på detaljer, men man kan säga att en funktion är kontinuerlig om man kan rita den utan att lyfta på pennan.

Anmärkning 1. *Observera logiken i påståendet "Alla kontinuerliga funktioner är integrerbara". Det innebär att kontinuerlig är ett* tillräckligt villkor *för att en funktion* $f(x)$ *ska vara integrerbar, men inte något nödvändigt sådant! Det finns t.ex. funktioner som inte är kontinuerliga men som ändå är integrerbara.*

Beräkning av integraler

Om f och F är två funktioner sådana att $F'(x) = f(x)$ för alla x i ett intervall I så kallas F för en **primitiv funktion** till f i intervallet I och F' är derivatan av f.

Exempel 4.10. *Låt $f(x) = x^2$. Då är $x^3/3$ en primitiv funktion till f eftersom $F'(x) = x^2$. Även $x^3/3 + 1$ är en primitiv funktion till f eftersom ettan försvinner vid derivering.*

Som exemplet antyder så finns det oändligt många primitiva funktioner till en funktion f definierad på ett icke-tomt intervall I. Mer precist — om $F(x)$ är en primitiv funktion så är även $F(x) + C$ en primitiv funktion, där C är en godtycklig konstant.

Vid beräkning av integraler använder vi oss av *integralkalkylens huvudsats*:

Om f är en kontinuerlig funktion i intervallet $[a, b]$ och om F är en godtycklig primitiv funktion till f i $[a, b]$ så är:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Observera att detta resultatet blir detsamma vilken primitiv funktion man än väljer eftersom eventuella konstanttermer försvinner vid subtraktionen. Låt t.ex. $F + C$ vara en annan primitiv funktion till f. Då är

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Funktionsuttrycket $f(x)$ som står under integraltecknet kallas för *integrand*. En primitiv till f(x) betecknas $\int f(x)dx$.

Några integrationsregler

Låt D beteckna derivatan. Då kan vi från derivationsreglerna

$$D(f + g) = Df + Dg \text{ och } D(kf) = kDf$$

härleda följande regler för integraler:

$$\int (f + g)dx = \int f dx + \int g dx \text{ och } \int kf dx = k \int f dx$$

där k är en konstant. Man kan alltså integrera termvis och flytta ut konstanter för att göra det lite enklare för sig. Nedan ges primitiva funktioner till några vanligt förekommande funktioner. Observera att man till var och en av de primitiva funktionerna kan addera en konstant.

1. $f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x + C.$
2. $f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x + C.$
3. $f(x) = x^a \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, \quad a \neq -1.$

Man kan enkelt testa om man funnit rätt primitiv funktion genom att derivera den — då ska man få tillbaka sin ursprungliga funktion. Vi har till exempel att

$$D\frac{1}{a+1}x^{a+1} = \frac{1}{a+1}Dx^{a+1} = \frac{1}{a+1}(a+1)x^a = x^a$$

då $a \neq -1$.

Man får inte glömma att ta hänsyn till den inre derivatan när man tar den primitiva funktionen. Exempelvis är $D\cos(5x) = -5\sin(5x)$ och därför är en primitiv funktion till $f(x) = \sin(5x)$ lika med $F(x) = \frac{-\cos(5x)}{5}$. Detta inses lätt genom att derivera högerleden.

Exempel 4.11. *Beräkna*

$$\int_0^{\pi/2} (2\sin x + \cos(2x))dx$$

Lösningsförslag:

$$\int_0^{\pi/2} (2\sin x + \cos(2x))dx = \left[-2\cos x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2} == -2\cos(\pi/2) + \frac{\sin\pi}{2} + 2\cdot\cos 0 - \frac{\sin 0}{2} = 2.$$

★

Om integranden är en sammansatt funktion $f(g(x))$ och den inre derivatan är en konstant så kompenserar man för denna när man bildar den primitiva funktionen. Ibland är integralen sådan att den inre derivatan inte är en konstant, utan en funktion, som ibland redan finns i uttrycket om man har tur, som vi såg i sista exemplet ovan. Detta kan vi uttrycka så här:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x)) + C$$

eftersom

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

i enlighet med kedjeregeln. Vi multiplicerar ju med inre derivatan när vi deriverar en sammansatt funktion, där F är en primitiv funktion till f och C en integrationskonstant.

Exempel 4.12. *Bestäm* $\int 2x(x^2-1)^5 dx$.

Lösningsförslag: En primitv funktion till $2x(x^2-1)^5$ är $\frac{1}{6}(x^2-1)^6 + C$ eftersom den inre derivatan här (derivatan till (x^2-1)) är just $2x$, som ju förekommer som en faktor i integranden i vänsterledet. ★

Exempel 4.13. *Bestäm* $\int x \cdot \sin x^2 dx$.

Lösningsförslag: Vi noterat att $D[x^2] = 2x$. Om vi sätter $g(x) = x^2$ och $f(x) = \sin x$ så överensstämmer $x \cdot \sin x^2$ med $f(g(x)) \cdot g'(x) = \sin x^2 \cdot 2x$ sånär som på en faktor 2. Det gäller alltså att $\int x \cdot \sin x^2 dx = \int \frac{f(g(x))\cdot g'(x)}{2}$. Eftersom

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x)) + C = -\cos x^2 + C$$

så är

$$\int x \cdot \sin x^2 dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C.$$

★

Exempel 4.14. *Bestäm* $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$.

Lösningsförslag: Integralen blir $\frac{\sin^4 x}{4} + C$. Man kan försäkra sig om detta genom att derivera högerledet varpå man erhåller vänsterledet. När man ser en integrand som ser lite "jobbig"ut kan det alltså vara bra att först se efter om det finns en inre derivata till någon funktion i uttrycket. ★

Variabelsubstitution

Med hjälp av en *variabelsubstitution* kan man överföra en tillsynes omöjlig integral till en mer lätthanterlig form och därefter beräkna den. Eftersom vi nu vet att $\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = F(g(t)) + C$ där F är en primitiv funktion till f och C en integrationskonstant, så har vi genom substitutionen $g(t) = x$ följande välbekanta uttryck: $\int f(x)dx = F(x) + C$ där alltså dx svarar mot $g'(t)dt$ eftersom

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dg(t)}{dt} = g'(t).$$

Exempel 4.15. *Låt oss försöka beräkna integralen* $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Lösningsförslag: Här finns ingen inre derivata till x^2. Det vore givetvis betydligt enklare att beräkna integralen $\int x\sqrt{1-x^2}dx$ eftersom $2x$ är inre derivatan till funktionen $\sqrt{1-x^2}$ och då hade vi fått

$$\int x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2} + C$$

vilket inses lätt genom att derivera högerledet.

Men nu var det som sagt inte den integralen vi skulle beräkna, utan integralen $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. Vi gör substitutionen $x = \cos t$. Vilken substitution som är lämplig i olika fall "ser" man efter en tids övning. Att vi väljer $\cos t$ här kommer sig av den trigonometriska ettan:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$$

och vi ska nu se varför denna substitution är lämplig just här. Med $x = \cos t$ får vi $dx = -\sin t \cdot dt$ och integrationsgränserna $x = 0$ och $x = 1$ blir nu $t = \pi/2$ ($0 = \cos \pi/2$) och $t = 0$ ($1 = \cos 0$). Vi erhåller nu

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \\
&= \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1-\cos^2 t}(-\sin(t))dt \\
&= \{\text{skriv om med trigonometriska ettan och byt gränsordning.}\} \\
&= \int_0^{\pi/2} |\sin t| \cdot \sin t dt \\
&= \{\text{i intervallet } [0, \pi/2] \text{ är } \sin(t) \geq 0\} \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2} dt \\
&= \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \pi/4.
\end{aligned}$$

★

Övningar

1. Beräkna integralerna (inre derivatan förekommer som faktor i integranden)

   (a) $\int_0^{\pi/4} 2\sin^2 x \cos x dx$

(b) $\int_{-1}^{0} x^2 \cdot (x^3/3+6)^4$

(c) $\int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

(d) $\int_0^3 \frac{2x}{x^2+5} dx$

(e) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x} dx$

(f) $\int_0^1 \frac{3x^2}{(x^3+1)^{3/2}} dx$

2. Beräkna efter lämplig substitution följande integraler

   (a) $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

   (b) $\int_0^1 x\sqrt{2-x} dx$

   (c) $\int_2^4 \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

   (d) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

   (e) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$ (OBS! $t^2 = (t+1)(t-1)+1$)

Sakregister