MATH.SE

SVERIGES UNIVERSITETS MATEMATIKPORTAL

Online Mathematik Brückenkurs 1

© KTH 2009. Änderungen von TUB.

Online Mathematik
Brückenkurs 1

Inhaltsverzeichnis

Willkommen zum Kurs **3**
Infos zum Kurs . . . 5
Infos zu den Prüfungen . . . 6

1. Numerische Berechnungen **9**
1.1 Verschiedene Zahlen . . . 9
1.2 Brüche . . . 22
1.3 Potenzen . . . 31

2. Algebra **43**
2.1 Algebraische Ausdrücke . . . 43
2.2 Lineare Gleichungen . . . 54
2.3 Quadratische Gleichungen . . . 68

3. Wurzeln und Logarithmen **79**
3.1 Wurzeln . . . 79
3.2 Wurzelgleichungen . . . 88
3.3 Logarithmen . . . 92
3.4 Logarithmusgleichungen . . . 102

4. Trigonometrie **110**
4.1 Winkel und Kreise . . . 110
4.2 Trigonometrische Funktionen . . . 122
4.3 Trigonometrische Eigenschaften . . . 137
4.4 Trigonometrische Gleichungen . . . 144

5. Schriftliche Mathematik **152**
5.1 Mathematische Formeln schreiben . . . 152
5.2 Mathematische Texte schreiben . . . 162

Antworten zu den Aufgaben **174**

Willkommen zum Kurs

Fit fürs Studium mit dem Online-Mathe-Brückenkurs: Teil 1

Der zweiteilige Online-Brückenkurs ist für alle angehenden StudentInnen gedacht, deren Universitätsstudium das Fach Mathematik einschließt, und die zu Beginn des Studiums gut vorbereitet sein möchten.

Als Brücke von der Schule zur Universität will der Kurs den Einstieg ins Studium erleichtern. Wir empfehlen Dir den Kurs, auch wenn Du gute Noten in Mathematik hattest. Der Lehrstoff des Kurses ist am Anfang einfach und wird später — vor allem im 2. Teil — schwieriger. Er kann vollständig online gemacht werden.

Der Kurs besteht aus 2 Teilen. Der erste Teil behandelt Bruchrechnung, Potenzen, Logarithmen und Trigonometrie. Der zweite Teil umfasst hingegen Differenzialrechnung, Integralrechnung und komplexe Zahlen. Daher vergiss nicht, Dich auch zum zweiten Teil anzumelden: `http://kth.nti.se/Enrol/default.asp?fid=228` „Anmeldung zum 2. Teil“ (Wir leiten Dich auf den Server kth1.nti.se unseres schwedischen Kooperationspartners weiter.)

Wie Du mit dem Kurs am besten lernst:

1. Lies zuerst den Theorieabschnitt und die Beispiele durch.
2. Löse danach die Übungen ohne Taschenrechner. Kontrolliere Deine Antworten indem Du auf „Antwort“ klickst. Falls Du Hilfe brauchst, kannst Du Dir eine richtige Lösung anzeigen lassen.
3. Wenn Du mit den Übungen fertig bist, mach die diagnostische Prüfung für das aktuelle Kapitel.
4. Falls Du irgendwelche Schwierigkeiten hast, die Du nicht selbst lösen kannst, suche im Forum nach Beiträgen zu Deiner Frage. Wenn Du keinen hilfreichen Beitrag findest, stelle Deine Frage im Forum. Sie wird Dir vom OMB-Tutor oder von einem anderen Studenten oder einer anderen Studentin beantwortet.
5. Bei Schwierigkeiten oder Fragen zur Mathematik kannst Du auch per Telefon, Mail oder Skype den OMB-Tutor fragen. Die Kontaktadressen findest du in der Student Lounge.
6. Wenn Du die diagnostische Prüfung bestanden hast, geh zu der Schlussprüfung. Um diese zu bestehen, müssen drei aufeinander folgende Fragen richtig beantwortet werden. Du hast mehrere Versuche.

7. Wenn Du die Schlussprüfung zu diesem Kapitel geschafft hast, kannst mit dem nächsten Kapitel beginnen.

P.S. Falls Du mit dem Inhalt eines Kapitels schon gut vertraut bist, kannst Du direkt zu den diagnostischen Prüfungen gehen und prüfen, ob Deine Selbsteinschätzung zutrifft.

Der Kurs ist eine Zusammenarbeit zwischen der TU Berlin, der Uni Stuttgart und dem Zentrum MATH.SE der KTH Stockholm.

Die Betreuung des Kurses für die Studentinnen und Studenten der TU Berlin geht vom 1. September bis zum Vorlesungsbeginn am 11. Oktober. Innerhalb dieser Periode kannst Du Dein Studientempo selbst wählen und an Deine individuellen Pläne anpassen.

Bitte beachte, dass die Verwendung von Taschenrechnern während des Kurses nicht vorgesehen ist.

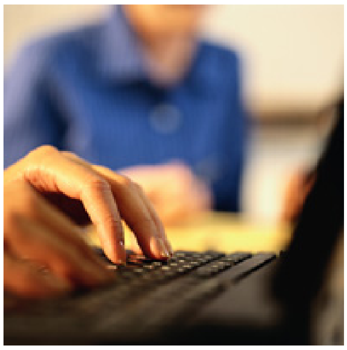
Die Verwendung von Taschenrechnern in Mathematik auf der Universität ist von Fach zu Fach verschieden. An manchen Instituten sind Taschenrechner überhaupt nicht zugelassen, während an anderen Instituten Taschenrechner manchmal verwendet werden dürfen. Für die meisten Aufgaben ist jedenfalls die Verwendung eines Taschenrechners nicht von Vorteil.

Infos zum Kurs

Aktuelles Wissen verbessert Deine Erfolgschancen im Studium

Dies ist ein überbrückender Kurs zwischen allgemeinbildenden Höheren Schulen (Oberstufe) und der Universität. Er umfasst Kenntnisse und Fähigkeiten, die unserer Meinung nach grundlegend wichtig sind, weshalb sie vor Deinem Universitätsstudium aufgefrischt werden sollten. Der Kurs ist flexibel. Du studierst in dem Takt, der für Dich passt.

Folgende Arbeitsweise ist vorgesehen:



- Beginne jeden Abschnitt damit, die Übersicht zu lesen und dann die Beispiele zu studieren.
- Arbeite die Beispiele durch und beantworte dann die Fragen der diagnostischen Prüfung des jeweiligen Abschnittes. Wenn Du nicht weiter kommst, schaue nach, ob jemand eine Frage über diesen bestimmten Kursabschnitt im Forum gestellt hat oder stelle selbst eine Frage.
- Wenn Du mit den Übungen und der diagnostischen Prüfung eines Abschnitt fertig sind, mache die Schlussprüfung des Abschnittes.
- Wenn Du alle Schlussprüfungen bestanden hast, erhälst Du eine persönliche Aufgabe, die Du eigenständig lösen und schriftlich einreichen sollst. Deine Lösung schreibst du online auf dem Computer. Wir zeigen Dir, wie das geht. Danach wirst Du mit anderen in einer Gruppe arbeiten.

Unsere TutorInnen unterstützen Dich

Wenn Du Dich mit Deinem Benutzernamen einloggst, kommst Du zur Student Lounge. Hier findest Du die Emailadresse und die Telefonnummer, unter der Du die TutorInnen des Bruckenkurses kontaktieren kannst. Melde Dich, wenn Du bei einer Frage stecken bleibst oder wann auch immer Du Hilfe brauchst.

Die TutorInnen sind StudentenInnen, die in ihrem Studium das erste Semester schon erfolgreich geschafft haben. Sie sind voll darauf eingestellt, Dir zu helfen. Unser gemeinsames Ziel ist es, dass jeder, der den Kurs begonnen hat, es schafft, diesen zu beenden und somit eine gute Basis für das zukünftige Universitätsstudium hat.

Infos zu den Prüfungen

Alle Prüfungen sind nur dafür da, damit Du Dich selbst testen kannst und merkst, ob Du wirklich schon alles verstanden hast. Es gibt keine Noten und es ist nicht schlimm, wenn Du eine Prüfung nicht beim ersten Mal bestehst!

Prüfungen erfolgen online

Die Prüfung besteht aus zwei Online-Prüfungen pro Abschnitt. Zusätzlich wirst Du am Ende des Kurses sowohl eine persönliche Aufgabe als auch eine Gruppenarbeit machen. Die Prüfungen werden als bestanden gewertet, wenn alle Fragen korrekt beantwortet wurden. Nicht bestandene Prüfungen können und müssen wiederholt werden. Dadurch stellst Du sicher, dass Du den Stoff am Ende wirklich beherrschst.

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung erfolgen online

Für jeden Abschnitt des Kurses gibt es sowohl eine diagnostische Prüfung als auch eine Schlussprüfung. Links zu den Prüfungen findest Du in der Student Lounge, zu der Du gelangst, wenn Du mit Deinem persönlichen Benutzernamen eingeloggt bist. Wenn Du die diagnostische Prüfung beim ersten Anlauf nicht schaffst, wiederhole diese, solange bis Du alle Fragen richtig beantworten kannst.

Die Schlussprüfungen bestehen aus drei auf dem Computer angezeigten, mittels Zufallsgenerator ausgewählten Fragen. Diese Fragen sind auf einem Blatt zu lösen und die Antworten einzugeben. Du musst alle drei Fragen während einer Sitzung richtig beantworten, um durchzukommen.

Ist die Antwort auf eine Frage falsch, kannst Du einen neuen Versuch starten. Du wirst nun drei neue Fragen erhalten. Auch wenn Du eine oder zwei Fragen der vorhergehenden Reihe richtig beantwortet hast, beginnst Du wieder von vorne und musst alle drei Fragen richtig beantworten.

Die Aufgaben sind ein wesentlicher Teil der Prüfung

Kapitel 5 des Kurses besteht aus schriftlichen Aufgaben. Über den Link „Hausaufgabe" in der Student Lounge kannst Du Deine individuelle Aufgabe herunter laden. Der Link wird erst aktiviert, wenn Du die erste Hälfte der Prüfungen bestanden hast.

Wenn Du drei Viertel aller Prüfungen bestanden hast, kannst Du die Lösungen zu der Hausaufgabe einreichen.

Wichtige Kenntnisse darüber, wie man eine mathematische Aufgabe schriftlich und auf dem Computer geschrieben bearbeitet, kannst Du in Kapitel 5 lernen.

Bei der individuellen Hausaufgabe und später bei der Gruppenaufgabe sollst Du eine Idee oder einen Rechenweg mit Deinen eigenen Worten präsentieren und nicht nur eine Zahl als Antwort geben oder eine Alternative wählen. Deine individuelle Aufgabe braucht nicht perfekt zu sein, denn erst im nächsten Schritt — während der Bearbeitung der Gruppenaufgabe zusammen mit den anderen Gruppenteilnehmern — sollt Ihr die endgültigen Lösungen fertiggestellen.

Durch Gruppenaufgaben lernst Du, Mathematik mit anderen zu diskutieren

Wenn Du die Lösung zu Deiner individuellen Aufgabe online einreichst, wirst Du automatisch mit drei anderen Personen, die kürzlich Ihre individuellen Aufgaben abgegeben haben, in eine Gruppe eingeteilt. Die Gruppe erhält automatisch ihr eigenes Gruppenforum, in dem Ihr miteinander kommunizieren könnt und eine Schaltfläche anklicken könnt, wenn Ihr bereit seid, das gemeinsame Projekt online einzureichen.

Aufgabe der Gruppe ist es, alle einzelnen Vorschläge der Gruppenmitglieder durchzugehen und sich dann auf eine gemeinsame „beste" Lösung für jede individuelle Hausaufgabe zu einigen.

Die Gruppe macht dann einen gemeinsamen Vorschlag, und diese Lösungen werden von den TutorInnen überprüft und kommentiert. Die TutorInnen kommunizieren mit der gesamten Gruppe, und wenn Ihr in der Gruppe etwas übersehen habt, habt Ihr die Möglichkeit, einen neuen Gruppenvorschlag einzureichen bis alle Aufgaben korrekt gelöst sind. Um diesen Teil des Kurses zu bestehen, musst Du aktiv teilnehmen, indem Du z.B. im Gruppenforum Fragen stellst, konstruktive Verbesserungsvorschläge für die Lösungen der anderen Gruppenteilnehmer machst und deine eigene Lösung noch einmal kritisch überarbeitest.

Warte mit dem Einreichen Deiner Aufgabe, wenn Du vorhast, vom Kurs zu pausieren.

Manchmal kann es ein paar Tage dauern bis Du einer Gruppe zugeteilt wirst, meist geht es jedoch schneller. Wenn eine Gruppe formiert ist, sollte diese sofort mit ihrer Arbeit beginnen.

Wenn Du z.B. verreist bist und keinen Zugang zum Internet hast, bringt dies Probleme für die anderen Gruppenmitglieder mit sich, da diese nicht mit ihrer Gruppenaufgabe beginnen können. Wenn Du weisst, dass Du eine Pause im Kurs einlegen wirst, warte also bitte mit dem Einreichen Deiner individuellen Aufgabe bis Du wieder zurück bist und aktiv in der Gruppe mitarbeiten kannst.

1.1 Verschiedene Zahlen

Inhalt:

- Natürliche Zahlen
- Negative Zahlen
- Operatorrangfolge und Klammern
- Rationale Zahlen
- Irrationale Zahlen (Übersicht)
- Reelle Zahlen

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Die vier Grundrechenarten der Arithmetik beherrschen.
- Den Unterschied zwischen natürlichen, ganzen, rationalen und irrationalen Zahlen kennen.
- Brüche als Dezimalzahlen schreiben können, und Dezimalzahlen als Brüche.
- Den Wert zweier Zahlen vergleichen können.
- Brüche und Dezimalzahlen korrekt runden können.

A. Rechnungen mit Zahlen

Rechnungen mit Zahlen bestehen aus mehreren Schritten. Diese Schritte bestehen aus den vier Grundrechenarten der Arithmetik. Folgende Begriffe beschreiben die vier Grundrechenarten und sind daher in der Mathematik sehr wichtig:

Bei der Addition ist die Reihenfolge der Zahlen egal

$$3 + 4 + 5 = 3 + 5 + 4 = 5 + 4 + 3 = 12.$$

Bei der Subtraktion dagegen kommt es auf die Reihenfolge an,

$$5 - 2 = 3 \quad \text{während} \quad 2 - 5 = -3.$$

Mit dem Abstand zwischen zwei Zahlen ist eine nicht negative Zahl. Um den Abstand zu berechnen, muss man also die kleinere Zahl von der größeren Zahl subtrahieren.

Addition

Term Summe

$$3 + 4 = 7$$

Subtraktion

Term Differenz

$$13 - 4 = 9$$

Multiplikation

Faktor Produkt

$$3 \cdot 4 = 12$$

Division

Zähler Quotient

$$\frac{8}{4} = 2$$

Nenner

Der Abstand zwischen 2 und 5 ist also 3 und nicht -3. Den Abstand schreibt man als Betrag der Differenz, also

$$|5 - 2| = |2 - 5| = 3.$$

Bei der Multiplikation ist die Reihenfolge der Zahlen auch egal

$$3 \cdot 4 \cdot 5 = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Bei der Division hingegen wieder nicht,

$$\frac{6}{3} = 2 \quad \text{während} \quad \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

Dass bei der Addition, Multiplikation und dem Abstand die Reihenfolge egal ist, bedeutet, dass für diese Operationen das Kommutativgesetz gilt.

Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \\ |a - b| &= |b - a| \end{aligned}$$

für $a, b \in \mathbf{R}$.

Für die Addition und die Multiplikation gilt auch das Assoziativgesetz:

Assoziativgesetz

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

für $a, b \in \mathbf{R}$.

B - Operatorrangfolge

In den Fällen, wo ein mathematischer Ausdruck mehrere Rechenarten enthält, ist es wichtig, die Operatorrangfolge zu kennen. Ein Ausdruck soll in folgender Reihenfolge berechnet werden:

- Klammern (die innersten Klammern zuerst)
- Multiplikation und Division
- Addition und Subtraktion

Man sagt auch „Punktrechnung geht vor Strichrechnung“, wobei die Multiplikation und Division als Punktrechnung gelten und Addition und Subtraktion als Strichrechnung.

Beispiel 1

a) $3 - (2 \cdot (3 + 2) - 5) = 3 - (2 \cdot 5 - 5) = 3 - (10 - 5) = 3 - 5 = -2$

b) $3 - 2 \cdot (3 + 2) - 5 = 3 - 2 \cdot 5 - 5 = 3 - 10 - 5 = -7 - 5 = -12$

c) $5 + 3 \cdot \left(5 - \frac{-4}{2}\right) - 3 \cdot (2 + (2 - 4)) = 5 + 3 \cdot (5 - (-2)) - 3 \cdot (2 + (-2))$
$= 5 + 3 \cdot (5 + 2) - 3 \cdot (2 - 2) = 5 + 3 \cdot 7 - 3 \cdot 0 = 5 + 21 - 0 = 26$

C - „Unsichtbare“ Klammern

Bei der Division sollen Zähler und Nenner zuerst berechnet werden, bevor man dividiert. Man kann also sagen, dass es um den Zähler und Nenner „unsichtbare klammern“ gibt.

Beispiel 2

a) $\dfrac{7+5}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

b) $\dfrac{6}{1+2} = \dfrac{6}{3} = 2$

c) $\dfrac{12+8}{6+4} = \dfrac{20}{10} = 2$

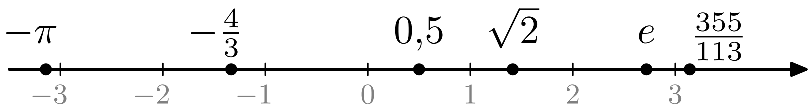
Dies muss man besonders beachten, wenn man einen Taschenrechner benutzt. Die Division

$$\frac{8+4}{2+4}$$

muss als $(8+4)/(2+4)$ geschrieben werden, sodass der Taschenrechner die richtige Antwort 2 gibt. Ein häufiger Fehler ist, dass man stattdessen $8+4/2+4$ schreibt. Dies interpretiert der Rechner als $(8+4)/2+4 = 10$ oder $8+(4/2)+4 = 14$.

D - Verschiedene Zahlen

Die Zahlen, die wir normalerweise verwenden, um beispielsweise Längen und Mengen zu messen, nennt man die reellen Zahlen. Die reellen Zahlen kann man mit einer Zahlengeraden darstellen:



Die reellen Zahlen „füllen“ die ganze Zahlengerade ohne Zwischenräume. Jeder Punkt in der Zahlengeraden kann durch eine Dezimalzahl dargestellt werden. Die Menge der reellen Zahlen, oder alle Dezimalzahlen, nennt man **R**. Die Zahlengerade zeigt auch die Größe der Zahlen an: von zwei Zahlen auf der Zahlengeraden ist diejenige Zahl, die links von der anderen steht, die kleinere der beiden Zahlen. Wir schreiben z.B. $0{,}5 < \sqrt{2}$ oder $-\frac{4}{3} < e$.

In den reellen Zahlen gibt es folgende Mengen von Zahlen:

*Natürliche Zahlen (normalerweise mit **N** bezeichnet)*

Die natürlichen Zahlen verwendet man beim Zählen: 0, 1, 2, 3, 4, ... Wir schreiben auch $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und benutzen $a \in \mathbf{N}$, um auszudrücken, dass a eine natürliche Zahl ist. Dass die natürlichen Zahlen eine Teilmenge der reellen Zahlen sind, schreiben wir als $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$.

*Ganze Zahlen (**Z**)*

Die ganzen Zahlen bestehen aus den natürlichen Zahlen, sowie deren negativen Gegenzahlen: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ Wir schreiben auch $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ und benutzen $n \in \mathbf{Z}$, um auszudrücken, dass n eine ganze Zahl ist. Die ganzen Zahlen sind eine Teilmenge der reellen Zahlen, und die natürlichen Zahlen sind Teil der ganzen Zahlen: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$.

*Rationale Zahlen (**Q**)*

Die rationalen Zahlen sind die Brüche, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind und deren Nenner nicht 0 ist. Die folgenden Zahlen sind Beispiele für rationale Zahlen

$$-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{37}{128} \in \mathbf{Q}.$$

Wir schreiben auch $\mathbf{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$.

Auch die ganzen Zahlen sind rationale Zahlen:

$$-1 = \frac{-1}{1}, \quad 0 = \frac{0}{1}, \quad 1 = \frac{1}{1}, \quad 2 = \frac{2}{1}, \quad \text{etc.}$$

Wir schreiben dafür auch $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Eine rationale Zahl kann in mehreren Varianten dargestellt werden, zum Beispiel:

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{100}{50} = \frac{384}{192} \quad \text{etc.}$$

Der Bruch, bei dem Zähler und Nenner den kleinst möglichen Betrag haben, nennt man den vollständig gekürzten Bruch.

Beispiel 3

a) Wenn man Zähler und Nenner mit der selben Zahl multipliziert, ändert sich der Wert der rationalen Zahl nicht,

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{15} \quad \text{etc.}$$

b) Wenn man Zähler und Nenner mit der selben Zahl dividiert, ändert sich der Wert der rationalen Zahl nicht,

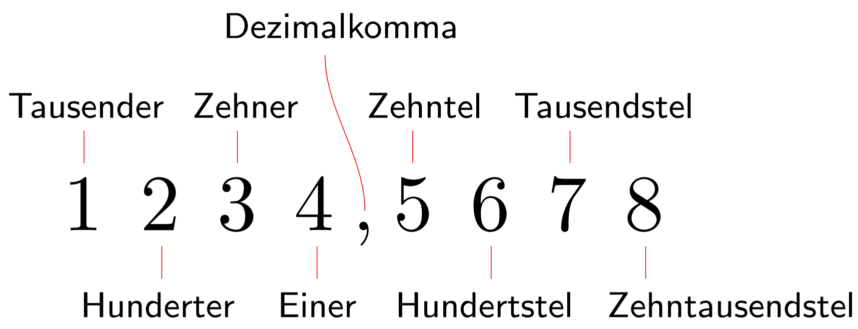
$$\frac{75}{105} = \frac{75/5}{105/5} = \frac{15}{21} = \frac{15/3}{21/3} = \frac{5}{7} \quad \text{etc.}$$

Irrationale Zahlen

Die Zahlen auf der Zahlengeraden, die nicht als rationale Zahlen dargestellt werden können, nennt man irrationale Zahlen. Zum Beispiel sind die meisten Wurzeln irrationale Zahlen: $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$, aber auch andere Zahlen, wie π.

E - Dezimaldarstellung

Alle reellen Zahlen können als Dezimalzahlen dargestellt werden mit einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Dezimalstellen. Dezimalstellen werden auch Nachkommastellen genannt.



Um eine Dezimalzahl als Bruch zu schreiben, werden Ziffern vor dem Komma mit $1, 10, 100, \ldots$ multipliziert, während die Ziffern nach dem Komma mit $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ multipliziert werden.

Beispiel 4

$$1234{,}5678 = 1000 + 200 + 30 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{8}{10000}$$

Die Brüche $\frac{5}{10}$, $\frac{8}{10000}$ und $\frac{12\,345\,678}{10000}$ heißen auch Dezimalbrüche, weil ihr Nenner eine Potenz von 10 ist und zehn auf lateinisch decem heißt.

Eine rationale Zahl kann immer als eine Dezimalzahl dargestellt werden, indem man eine Division ausführt (z.B. ist $\frac{3}{4}$ gleich „3 durch 4", oder 0,75). Manche rationale Zahlen können auch auf einen Dezimalbruch erweitert werden (z.B. ist $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$).

Beispiel 5

a) $\dfrac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}5\underline{0}$

b) $\dfrac{1}{3} = 0{,}333333\ldots = 0{,}\underline{3}$

c) $\dfrac{5}{12} = 0{,}4166666\ldots = 0{,}41\underline{6}$

d) $\dfrac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots = 0{,}\underline{142857}$

(Die unterstrichenen Zahlen wiederholen sich.)

Jede rationale Zahl besitzt eine periodische Dezimalbruchentwicklung, also eine Dezimalentwicklung, die sich endlos lang wiederholt. Dies gilt genau für die rationalen Zahlen. Die irrationalen Zahlen haben im Gegensatz zu den rationalen Zahlen eine nicht-periodische Dezimalbruchentwicklung.

Umgekehrt gilt auch: wenn eine Dezimalzahl eine periodische Dezimalbruchentwicklung hat, ist sie rational.

Beispiel 6

Die Zahlen π und $\sqrt{2}$ sind irrational, und haben daher eine nicht-periodische Dezimalbruchentwicklung.

a) $\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\ldots$

b) $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\ldots$

Beispiel 7

a) $0{,}600\ldots = 0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

b) $0{,}35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

c) $0{,}0025 = \frac{25}{10\,000} = \frac{1}{400}$

Beispiel 8

Die Zahl $x = 0{,}215151515\ldots$ ist rational, weil sie eine periodische Dezimalbruchentwicklung hat. Um die Zahl als Bruch in der Form $x = m/n$ mit $m, n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$ zu schreiben, machen wir folgendes:

Wenn wir die Zahl mit 10 multiplizieren, verschiebt sich das Komma eine Stelle nach rechts,

$$10\,x = 2{,}151515\,\ldots$$

Genauso verschiebt sich das Komma 3 Schritte nach rechts wenn wir die Zahl mit $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ multiplizieren,

$$1000\,x = 215{,}1515\,\ldots$$

Die Zahlen $1000x$ und $10x$ haben nach dem Komma dieselbe Dezimalbruchentwicklung, und die Differenz zwischen den beiden Zahlen,

$$1000x - 10x = 215{,}1515\,\ldots - 2{,}151515\,\ldots,$$

muss eine ganze Zahl sein, weil die Dezimalen nach dem Komma einander aufheben,

$$990x = 213.$$

Also ist

$$x = \frac{213}{990} = \frac{71}{330}.$$

F - Rundung

Um Platz in der Darstellung der Dezimalzahlen zu sparen, rundet man oft die Zahlen. Die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 werden abgerundet, während die Ziffern 5, 6, 7, 8, 9 aufgerundet werden.

Das Symbol $\approx$ (ist ungefähr gleich) zeigt an, dass eine Zahl gerundet ist.

Beispiel 9

Rundung auf 3 Dezimalstellen genau:

a) $1{,}0004 \approx 1,000$

b) $0{,}9999 \approx 1{,}000$

c) $2{,}9994999 \approx 2{,}999$

d) $2{,}99950 \approx 3{,}000$

Beispiel 10

Rundung auf 4 Dezimalstellen nach genau:

a) $\pi \approx 3{,}1416$

b) $\frac{2}{3} \approx 0{,}6667$

G - Zahlen vergleichen

Um das Größenverhältnis zwischen zwei Zahlen zu zeigen, verwendet man die Verhältniszeichen $>$ (größer als), $<$ (kleiner als) und $=$ (Gleichheitszeichen). Das Größenverhältnis zwischen zwei Zahlen kann bestimmt werden, indem man entweder die Zahl als eine Dezimalzahl darstellt, oder indem man rationale Zahlen mit gemeinsamen Nenner schreibt.

Beispiel 11

a) Welche der beiden Zahlen $x = \frac{1}{3}$ und $y = 0{,}33$ ist die größere?

Folgendes gilt: $x = \frac{1}{3}$ und $y = 0{,}33 = \frac{33}{100}$ haben den gemeinsamen Nenner $3 \cdot 100 = 300$, sodass

$$x = \frac{1}{3} = \frac{100}{300} \quad \text{und} \quad y = 0{,}33 = \frac{33}{100} = \frac{99}{300}.$$

Weil $100 > 99$ gilt für die Brüche mit dem selben Nenner 300, dass $\frac{100}{300} > \frac{99}{300}$ und darum ist $x > y$.

Oder man schreibt beide Zahlen als Dezimalzahlen und sieht, dass $\frac{1}{3} > 0{,}33$ weil $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots > 0{,}33$.

b) Welche Zahl ist größer: $\frac{2}{5}$ oder $\frac{3}{7}$?

Wir schreiben die Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner $5 \cdot 7 = 35$,

$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35} \quad \text{und} \quad \frac{3}{7} = \frac{15}{35}.$$

Also ist $\frac{3}{7} > \frac{2}{5}$, weil $\frac{15}{35} > \frac{14}{35}$.

Beispiel 12

a) Gegeben sind die reellen Zahlen x, y, z also $x, y, z \in \mathbf{R}$, für die gilt $x < y$. Frage: Welche der beiden Zahlen ist grösser $x + z$ oder $y + z$?

Antwort: Wegen $x < y$ liegt x links von y auf der Zahlengeraden. Die Addition von z verschiebt die Zahlen x und y auf der Zahlengeraden auf die gleiche Weise: Für $z > 0$ werden x und y um $|z|$ nach rechts verschoben, für $z < 0$ werden x und y um $|z|$ nach links verschoben. Da beide Zahlen gleich weit verschoben werden, ändert sich nicht, dass x links von y liegt und $x + z$ liegt weiterhin links von $y + z$.

Also ist $y + z$ die größere Zahl.

b) Es sind $x, y \in \mathbf{R}$ und $x < y$. Frage: Welche der beiden Zahlen $-x, -y$ ist größter als die andere?

Antwort: Wegen $x < y$ liegt x links von y auf der Zahlengeraden. $-x$ ist die Gegenzahl von x: Wenn $x > 0$ ist, also rechts von 0 liegt, so liegt $-x$ links von der Null und $-x < 0$. Wenn aber $x < 0$ ist, also links von 0 liegt, dann liegt $-x$ rechts von der Null und $-x > 0$. Ebenso ist $-y$ die Gegenzahl von y. Wenn wir statt x und y die Gegenzahlen $-x$ und $-y$ betrachten, ist es dasselbe als wenn wir x und y an 0 spiegeln: Wenn x links von y liegt, dann liegt $-x$ rechts von $-y$ und $-y < -x$.

Also ist $-x$ die größere der beiden Zahlen.

Dies ist eine bekannte Rechenregel: Bei der Multiplikation mit einer negativen Zahl (z.B. -1) verändert die Ungleichung ihre Richtung: $x < y$ gilt dann und nur dann, wenn $-y < -x$ gilt.

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei `ombTutor`.

Tipps fürs Lernen

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung
Nachdem Du mit der Theorie und den Übungen fertig bist, sollst Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung machen. Du findest die links zu den Prüfungen in deiner „Student Lounge“.

Vorsicht
Sei so genau und exakt, wie es geht, beim Rechnen und beim Eingeben deiner Ergebnisse. So vermeidest du auch Fehler auf Grund von Tippfehlern.

Literaturhinweise
Für die, die tiefer in die Materie einsteigen wollen, sind hier einige Links angeführt:

- Mehr über die Grundrechenarten in der Wikipedia
(http://de.wikipedia.org/wiki/Grundrechenart)
- Wer hat die Null entdeckt? Eine Antwort findest Du im „The MacTutor History of Mathematics archive“ (engl.)
(http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Zero.html)
- Schriftliche Division (engl.)
(http://www.mathsisfun.com/long_division.html)
- Wisst Ihr das $0{,}999\ldots = 1$ gilt?
(http://de.wikipedia.org/wiki/Eins#Periodischer_Dezimalbruch)

Nützliche Websites
Wieviele Farben werden gebraucht um eine Karte einzufärben? Wie oft sollten Karten gemischt werden? Welche Primzahl ist die Größte? Gibt es „Glückszahlen“? Höre dem berühmten Autor und Mathematiker Simon Singh zu, wenn er von Primzahlen, den magischen Zahlen 4 und 7 und dem Konzept der Null erzählt.

- Hör Dir die BBC Sendung „5 Numbers“ an (engl.)
(http://www.bbc.co.uk/radio4/science/5numbers1.shtml)
- Hör Dir die BBC Sendung „Another 5 numbers“ an (engl.)
(http://www.bbc.co.uk/radio4/science/another5.shtml)

1.1 Übungen

Übung 1.1:1

Berechne folgendes (ohne Taschenrechner)

a) $3-7-4+6-5$

b) $3-(7-4)+(6-5)$

c) $3-(7-(4+6)-5)$

d) $3-(7-(4+6))-5$

Übung 1.1:2

Vereinfache

a) $(3-(7-4))(6-5)$

b) $3-(((7-4)+6)-5)$

c) $3\cdot(-7)-4\cdot(6-5)$

d) $3\cdot(-7)-(4+6)/(-5)$

Übung 1.1:3

Welche folgende Zahlen gehören zu den: Natürlichen Zahlen? Ganzen Zahlen? Rationalen Zahlen? Irrationalen Zahlen?

a) 8

b) -4

c) $8-4$

d) $4-8$

e) $8\cdot(-4)$

f) $(-8)\cdot(-4)$

Übung 1.1:4

Welche folgende Zahlen gehören zu den: Natürlichen Zahlen? Ganzen Zahlen? Rationalen Zahlen? Irrationalen Zahlen?

a) $\dfrac{4}{-8}$

b) $\dfrac{-8}{-4}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

d) $\left(\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)^2$

e) $-\pi$

f) $\pi+1$

Übung 1.1:5

Ordne die folgenden Zahlen in aufsteigender Reihenfolge!

a) $2, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}$ und $\frac{7}{3}$

b) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, -\frac{3}{10}$ und $-\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}$ und $\frac{21}{34}$

Übung 1.1:6

Schreibe folgende Zahlen als Dezimalzahlen mit 3 Dezimalstellen!

a) $\frac{7}{6}$

b) $\frac{9}{4}$

c) $\frac{2}{7}$

d) $\sqrt{2}$

Übung 1.1:7

Welche der folgenden Zahlen sind rational? Schreibe alle rationalen Zahlen als Bruch!

a) 3,14

b) 3,1416 1416 1416 ...

c) 0,2 001 001 001 ...

d) 0,10 100 1000 10000 1 ... (ein 1:er, ein 0:er, ein 1:er, zwei 0:er, ein 1:er, drei 0:er etc.)

1.2 Brüche

Inhalt:

- Addition und Subtraktion von Brüchen
- Multiplikation und Division von Brüchen

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Ausdrücke bestehend aus Brüchen, den vier Grundrechnungsarten und Klammern berechnen können.
- Brüche so weit wie möglich kürzen können.
- Den kleinsten gemeinsamen Nenner von Brüchen bestimmen können.

A - Brüche kürzen und erweitern

Eine rationale Zahl kann in mehreren äquivalenten Formen dargestellt werden, je nach der Wahl des Zählers und Nenners. Zum Beispiel:

$$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} \quad \text{etc.}$$

Ein Bruch ändert also nicht seinen Wert, indem man den Zähler und den Nenner jeweils mit der gleichen Zahl multipliziert oder durch die gleiche Zahl teilt. Diesen Vorgang nennt man erweitern bzw. kürzen.

Beispiel 1

Multiplikation mit derselben Zahl:

a) $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$

b) $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{20}{28}$

Division durch dieselbe Zahl:

c) $\frac{9}{12} = \frac{9/3}{12/3} = \frac{3}{4}$

d) $\frac{72}{108} = \frac{72/2}{108/2} = \frac{36}{54} = \frac{36/6}{54/6} = \frac{6}{9} = \frac{6/3}{9/3} = \frac{2}{3}$

Ein Bruch sollte immer so weit wie möglich gekürzt werden. Dies kann bei großen Zahlen schwierig werden. Deshalb sollte man die Brüche so kurz wie möglich in den Rechnungen schreiben.

B - Addition und Subtraktion von Brüchen

Um Brüche addieren und subtrahieren zu können, müssen alle Brüche denselben Nenner haben. Wenn das nicht der Fall ist, muss man zuerst die Brüche mit einer geeigneten Zahl erweitern, sodass sie denselben Nenner bekommen.

Beispiel 2

a) $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{9}{15} + \frac{10}{15} = \frac{9+10}{15} = \frac{19}{15}$

b) $\frac{5}{6} - \frac{2}{9} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{15}{18} - \frac{4}{18} = \frac{15-4}{18} = \frac{11}{18}$

Das wichtigste hier ist, einen gemeinsamen Nenner zu finden. Ideal ist aber, den kleinsten gemeinsamen Nenner zu finden. Einen gemeinsamen Nenner findet man einfach, indem man alle Brüche mit den Nennern der anderen Brüche erweitert. Oft erhält man dadurch aber nicht den *kleinsten* gemeinsamen Nenner.

Der kleinste gemeinsame Nenner zweier oder mehrerer Brüche ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nenner der einzelnen Brüche.

Beispiel 3

a) $\frac{7}{15} - \frac{1}{12} = \frac{7 \cdot 12}{15 \cdot 12} - \frac{1 \cdot 15}{12 \cdot 15} = \frac{84}{180} - \frac{15}{180} = \frac{69}{180} = \frac{69/3}{180/3} = \frac{23}{60}$

b) $\frac{7}{15} - \frac{1}{12} = \frac{7 \cdot 4}{15 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{28}{60} - \frac{5}{60} = \frac{23}{60}$

c) $\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 6}{8 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 8 \cdot 6}{4 \cdot 8 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 8 \cdot 4}{6 \cdot 8 \cdot 4}$

$$= \frac{24}{192} + \frac{144}{192} - \frac{32}{192} = \frac{136}{192} = \frac{136/8}{192/8} = \frac{17}{24}$$

d) $\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1\cdot 3}{8\cdot 3} + \frac{3\cdot 6}{4\cdot 6} - \frac{1\cdot 4}{6\cdot 4} = \frac{3}{24} + \frac{18}{24} - \frac{4}{24} = \frac{17}{24}$

Man sollte die Bruchrechnung so gut beherrschen, dass man direkt den kleinsten gemeinsamen Nenner von nicht all zu großen Brüchen findet. Eine allgemeine Methode um den kleinsten gemeinsamen Nenner zu finden, besteht darin, dass man die Nenner in ihre Primfaktoren zerlegt.

Beispiel 4

a) Vereinfache $\frac{1}{60} + \frac{1}{42}$.

Wir zerlegen die Nenner zuerst in ihre Primfaktoren. Anstatt beide Brüche mit den ganzen Nenner des anderen Bruches zu erweitern, erweitern wir die Brüche nur mit den Primfaktoren, die nicht in beiden Nennern vorkommen. Dies ist der kleinste gemeinsame Nenner,

$$\left.\begin{aligned} 60 &= 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 \\ 42 &= 2\cdot 3\cdot 7 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{kgN} = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 420.$$

Also haben wir

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{42} = \frac{1\cdot 7}{60\cdot 7} + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{42\cdot 2\cdot 5} = \frac{7}{420} + \frac{10}{420} = \frac{17}{420}.$$

b) Vereinfache $\frac{2}{15} + \frac{1}{6} - \frac{5}{18}$.

Wir multiplizieren alle Primfaktoren des Nenners, die nicht in allen Nennern vorkommen, und erhalten dadurch den kleinsten gemeinsamen Nenner,

$$\left.\begin{aligned} 15 &= 3\cdot 5 \\ 6 &= 2\cdot 3 \\ 18 &= 2\cdot 3\cdot 3 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{kgN} = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 90\,.$$

Also haben wir

$$\frac{2}{15} + \frac{1}{6} - \frac{5}{18} = \frac{2\cdot 2\cdot 3}{15\cdot 2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{6\cdot 3\cdot 5} - \frac{5\cdot 5}{18\cdot 5} = \frac{12}{90} + \frac{15}{90} - \frac{25}{90} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}.$$

C - Multiplikation

Wenn man einen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliziert, wird nur der Zähler mit dieser Zahl multipliziert, während der Nenner unverändert bleibt. Es ist offensichtlich, dass zum Beispiel $\frac{1}{3}$ multipliziert mit 2, $\frac{2}{3}$ ergibt, also:

$$\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Wenn man Brüche miteinander multipliziert, multipliziert man die Zähler und die Nenner einzeln.

Beispiel 5

a) $8 \cdot \frac{3}{7} = \frac{8 \cdot 3}{7} = \frac{24}{7}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$

Bevor man Brüche multipliziert, sollte man kontrollieren, ob man den Bruch kürzen kann. Dies kontrolliert man, indem man die Brüche als einen gemeinsamen Bruch schreibt.

Beispiel 6

Vergleiche die beiden Rechnungen:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15} = \frac{6/3}{15/3} = \frac{2}{5}$

b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\cancel{3} \cdot 2}{5 \cdot \cancel{3}} = \frac{2}{5}$

In 6b hat man den Bruch mit einen Schritt vorher 3 gekürzt als in 6a, aber beide Rechnungen ergeben dasselbe.

Beispiel 7

a) $\frac{7}{10} \cdot \frac{2}{7} = \frac{\cancel{7}}{10} \cdot \frac{2}{\cancel{7}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{\cancel{2} \cdot 5} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{5}$

b) $\frac{14}{15} \cdot \frac{20}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot \cancel{7}}{3 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot \cancel{7}} = \frac{2}{3 \cdot \cancel{5}} \cdot \frac{4 \cdot \cancel{5}}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$

D - Division

Wenn man $\frac{1}{4}$ durch 2 teilt, bekommt man $\frac{1}{8}$. Wenn man $\frac{1}{2}$ durch 5 teilt, bekommt man $\frac{1}{10}$. Wir haben also:

$$\frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8} \qquad \text{und} \qquad \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}.$$

Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiert wird, wird also der Nenner mit dieser Zahl multipliziert.

Beispiel 8

a) $\frac{3}{5} \Big/ 4 = \frac{3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$

b) $\frac{6}{7} \Big/ 3 = \frac{6}{7 \cdot 3} = \frac{2 \cdot \cancel{3}}{7 \cdot \cancel{3}} = \frac{2}{7}$

Wenn man eine ganze Zahl durch einen Bruch dividiert, wird die Zahl mit dem Kehrbruch des Bruches multipliziert. Zum Beispiel ist die Division durch $\frac{1}{2}$ dasselbe wie eine Multiplikation mit $\frac{2}{1}$, also 2.

Beispiel 9

a) $\frac{3}{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{2}{1} = \frac{3 \cdot 2}{1} = 6$

b) $\frac{5}{\frac{3}{7}} = 5 \cdot \frac{7}{3} = \frac{5 \cdot 7}{3} = \frac{35}{3}$

c) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 5} = \frac{16}{15}$

d) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{9} = \frac{\cancel{3}}{2 \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot 3} = \frac{5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$

Wie kommt es, dass eine Division mit Brüchen eine Multiplikation wird? Die Erklärung ist, dass ein Bruch multipliziert mit seinem Kehrbruch, immer 1 ergibt. Zum Beispiel:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} = 1 \qquad \text{oder} \qquad \frac{9}{17} \cdot \frac{17}{9} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{17}} \cdot \frac{\cancel{17}}{\cancel{9}} = 1.$$

Bei einer Division von Brüchen erweitert man den ganzen Bruch mit dem Kehrbruch des Nennerbruches. Im Nenner bekommen wir daher nur einen 1:er.

Beispiel 10

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}}{\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$$

E - Brüche als Teil eines Ganzen

Rationale Zahlen können als Dezimalzahlen oder auch als Brüche dargestellt werden. Im Alltag verwendet man oft die rationalen Zahlen, um das Verhältnis von verschiedenen Mengen zu beschreiben. Eine Berechnung von einem Verhältnis kann entweder zu einer Multiplikation oder zu einer Division führen.

Beispiel 11

a) Florian investiert 20 € und Julia 50 €. Mit ihrer Investition erwirtschaften sie einen Gewinn. Wie soll der Gewinn gerecht aufgeteilt werden?

Florians Anteil ist $\dfrac{20}{50+20} = \dfrac{20}{70} = \dfrac{2}{7}$ und also sollte er $\frac{2}{7}$ des Gewinns bekommen.

b) Was ist der Anteil von 45 € an 100 €?

Antwort: 45 € ist $\dfrac{45}{100} = \dfrac{9}{20}$ von 100 €.

c) Was ist der Anteil von $\frac{1}{3}$ Liter an $\frac{1}{2}$ Liter?

Antwort: $\frac{1}{3}$ Liter sind $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{1} = \dfrac{2}{3}$ von $\frac{1}{2}$ Liter.

d) Wie viel ist $\frac{5}{8}$ von 1000?

Antwort: $\frac{5}{8} \cdot 1000 = \frac{5000}{8} = 625$

e) Wie viel ist $\frac{2}{3}$ von $\frac{6}{7}$?

Antwort: $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{2 \cdot \cancel{3}}{7} = \frac{2 \cdot 2}{7} = \frac{4}{7}$

F - Gemischte Ausdrücke

Wenn Brüche in größeren Ausdrücken vorkommen, ist es wichtig sich an die Operatorrangfolge zu erinnern. Wichtig ist auch, dass es um Zähler und Nenner in einem Bruch „unsichtbare Klammern“ gibt. Also muss man den Zähler und Nenner zuerst berechnen, bevor man den Bruch kürzt.

Beispiel 12

a) $$\frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}} = \frac{1}{\frac{8}{12}+\frac{9}{12}} = \frac{1}{\frac{17}{12}} = 1 \cdot \frac{12}{17} = \frac{12}{17}$$

b) $$\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{4}{3}+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{4\cdot 2}{3\cdot 2}-\frac{1}{6}}{\frac{4\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{8}{6}-\frac{1}{6}}{\frac{8}{6}+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{9}{6}} = \frac{7}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{9} = \frac{7}{9}$$

c) $$\frac{3-\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}-2} = \frac{\frac{3\cdot 5}{5}-\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}-\frac{2\cdot 3}{3}} = \frac{\frac{15}{5}-\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}-\frac{6}{3}} = \frac{\frac{12}{5}}{-\frac{4}{3}} = \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$= -\frac{3\cdot \cancel{4}}{5} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} = -\frac{3\cdot 3}{5} = -\frac{9}{5}$$

d) $$\frac{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\Big/\frac{1}{5}-\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}-\frac{3\cdot 1}{5\cdot 3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{1}-\frac{\frac{3}{12}-\frac{4}{12}}{2}} = \frac{\frac{1}{\frac{5}{6}}-\frac{1}{5}}{\frac{10}{3}-\frac{-\frac{1}{12}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{6}{5} - \frac{1}{5}}{\frac{10}{3} + \frac{1}{24}} = \frac{1}{\frac{80}{24} + \frac{1}{24}} = \frac{1}{\frac{81}{24}} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei `ombTutor`.

Tipps fürs Lernen

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung
Nachdem Du mit der Theorie und den Übungen fertig bist, sollst Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung machen. Du findest die links zu den Prüfungen in Deiner „Student Lounge".

Bedenke folgendes:
Versuche Deine Berechnungen so einfach wie möglich zu halten. Was am einfachsten ist, ist verschieden von Fall zu Fall.

Es ist wichtig, die Rechnungen mit Brüchen gut zu beherrschen. Du solltest Bruchrechnungen sowie Divisionen, Multiplikation und Brüche mit gemeinsamen Nennern schreiben und ohne Probleme ausführen können. Bruchrechnungen kommen häufig in rationalen Funktionen vor, aber auch in Grenzwerten und Differentialrechnungen, und sind daher sehr elementar in der Mathematik.

Literaturhinweise
Für die, die tiefer in die Materie einsteigen wollen, sind hier einige Links angeführt:

- Mehr zur Bruchrechnung in der Wikipedia
  (`http://de.wikipedia.org/wiki/Bruchrechnung`)

Nützliche Websites

- Interaktives Programm zu Brüchen (engl.)
  (`http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_105_g_2_t_1.html`)

1.2 Übungen

Übung 1.2:1

Schreibe folgende Ausdrücke als einen einzigen Bruch.

a) $\dfrac{7}{4}+\dfrac{11}{7}$ b) $\dfrac{2}{7}-\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1}{6}-\dfrac{2}{5}$

d) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}$ e) $\dfrac{8}{7}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{3}$

Übung 1.2:2

Bestimme den kleinsten gemeinsamen Nenner von:

a) $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{10}$ b) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}$ c) $\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{14}$ d) $\dfrac{2}{45}+\dfrac{1}{75}$

Übung 1.2:3

Berechne folgende Ausdrücke mit Hilfe des kleinsten gemeinsamen Nenners.

a) $\dfrac{3}{20}+\dfrac{7}{50}-\dfrac{1}{10}$ b) $\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{40}-\dfrac{1}{16}$

Übung 1.2:4

Schreibe folgende Ausdrücke als einen einzigen Bruch, so weit wie möglich gekürzt.

a) $\dfrac{\dfrac{3}{5}}{\dfrac{7}{10}}$ b) $\dfrac{\dfrac{2}{7}}{\dfrac{3}{8}}$ c) $\dfrac{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{3}{10}}$

Übung 1.2:5

Schreibe folgende Ausdrücke als einen einzigen Bruch, so weit wie möglich gekürzt.

a) $\dfrac{2}{\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{15}}$ b) $\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}}$ c) $\dfrac{\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{7}{8}-\dfrac{3}{16}}$

Übung 1.2:6

Vereinfache $\dfrac{\dfrac{2}{3+\dfrac{1}{2}}+\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2-\dfrac{2}{7}}}$.

1.3 Potenzen

Inhalt:

- Positive ganze Exponenten
- Negative ganze Exponenten
- Rationale Exponenten
- Die Rechenregeln für Exponenten

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Die Begriffe Basis und Exponent verstehen.
- Potenzen mit ganzen Exponenten berechnen können.
- Die Rechenregeln für Exponenten beherrschen.
- Wissen, wann die Rechenregeln für Potenzen gültig sind (bei positiven Basen).
- Potenzen der Größe nach vergleichen können (mit Hilfe der Größe des Exponenten/der Basis).

A - Ganze Exponenten

Die Multiplikation ist eine Kurzschreibweise das wiederholte Addieren, zum Beispiel,

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 5.$$

Analog definiert man eine Potenz als eine wiederholte Multiplikation mit derselben Zahl:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5.$$

Die Zahl 4 wird als *Basis* bezeichnet, und die 5 wird als *Exponent* bezeichnet.

Beispiel 1

a) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

b) $10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$

c) $0{,}1^3 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$

d) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$, aber
$-2^4 = -(2^4) = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

e) $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, aber $(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$

Beispiel 2

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

b) $(2 \cdot 3)^4 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^4 = 1296$

Das letzte Beispiel kann durch zwei sehr nützliche Rechenregeln verallgemeinert werden:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad \text{und} \quad (ab)^m = a^m b^m,$$

für $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ und $m \in \mathbf{N}$.

B - Rechenregeln für Potenzen

Weiter können noch einige Rechenregeln für Potenzen hergeleitet werden. Zum Beispiel sieht man, dass

$$2^3 \cdot 2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{3 Faktoren}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{5 Faktoren}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{(3+5) Faktoren}} = 2^{3+5} = 2^8.$$

Was durch folgende Regel für $a \in \mathbf{R}$ und $m, n \in \mathbf{N}$ verallgemeinert werden kann

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Bei der Division mit Potenzen mit derselben Basis gilt folgendes

$$\frac{2^7}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^{7-3} = 2^4.$$

Was durch folgende Regel für $a \in \mathbf{R}$ und $m, n \in \mathbf{N}$ verallgemeinert werden kann

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Wenn die Basis selbst ein Exponent ist, gibt es eine wichtige Rechenregel. Zum Beispiel ist

$$(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = \underbrace{5 \cdot 5}_{\text{2 Faktoren}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{\text{2 Faktoren}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{\text{2 Faktoren}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{3 mal 2 Faktoren}} = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$$

und

$$(5^3)^2 = 5^3 \cdot 5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{3 Faktoren}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{3 Faktoren}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{2 mal 3 Faktoren}} = 5^{3 \cdot 2} = 5^6.$$

Dies kann durch folgende Rechenregel für $a \in \mathbf{R}$ und $m, n \in \mathbf{N}$ verallgemeinert werden

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Beispiel 3

a) $2^9 \cdot 2^{14} = 2^{9+14} = 2^{23}$

b) $5 \cdot 5^3 = 5^1 \cdot 5^3 = 5^{1+3} = 5^4$

c) $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9$

d) $10^5 \cdot 1000 = 10^5 \cdot 10^3 = 10^{5+3} = 10^8$

Beispiel 4

a) $\dfrac{3^{100}}{3^{98}} = 3^{100-98} = 3^2$

b) $\frac{7^{10}}{7} = \frac{7^{10}}{7^1} = 7^{10-1} = 7^9$

Wenn ein Bruch denselben Zähler und Nenner hat, geschieht folgendes:

$$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \quad \text{sowie} \quad \frac{5^3}{5^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{125}{125} = 1.$$

Damit die Rechenregeln für Potenzen gültig sein sollen, definiert man, dass für alle $a \neq 0$,

$$a^0 = 1.$$

Es kann auch vorkommen, dass der Exponent im Nenner größer ist als der Exponent im Zähler. Zum Beispiel:

$$\frac{3^4}{3^6} = 3^{4-6} = 3^{-2} \quad \text{und} \quad \frac{3^4}{3^6} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{3^2}.$$

Dies muss bedeuten dass

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}.$$

Die allgemeine Definition von negativen Exponenten lautet für alle $a \neq 0$,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Beispiel 5

a) $\frac{7^{1293}}{7^{1293}} = 7^{1293-1293} = 7^0 = 1$

b) $3^7 \cdot 3^{-9} \cdot 3^4 = 3^{7+(-9)+4} = 3^2$

c) $0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

d) $0{,}008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{1}} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

f) $\left(\frac{1}{3^2}\right)^{-3} = (3^{-2})^{-3} = 3^{(-2)\cdot(-3)} = 3^6$

g) $0{,}01^5 = (10^{-2})^5 = 10^{-2\cdot 5} = 10^{-10}$

Wenn die Basis einer Potenz -1 ist, ist der Ausdruck entweder -1 oder $+1$ je nach Exponent,

$$\begin{aligned}
(-1)^1 &= -1 \\
(-1)^2 &= (-1)\cdot(-1) = +1 \\
(-1)^3 &= (-1)\cdot(-1)^2 = (-1)\cdot 1 = -1 \\
(-1)^4 &= (-1)\cdot(-1)^3 = (-1)\cdot(-1) = +1 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Die allgemeine Rechenregel ist, dass $(-1)^n$ gleich -1 ist, wenn n ungerade ist, und $+1$, wenn n gerade ist.

Beispiel 6

a) $(-1)^{56} = 1$ weil 56 gerade ist

b) $\frac{1}{(-1)^{11}} = \frac{1}{-1} = -1$ weil 11 ungerade ist

c) $\frac{(-2)^{127}}{2^{130}} = \frac{(-1\cdot 2)^{127}}{2^{130}} = \frac{(-1)^{127}\cdot 2^{127}}{2^{130}} = \frac{-1\cdot 2^{127}}{2^{130}}$

$$= -2^{127-130} = -2^{-3} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}$$

C - Basis wechseln

Beim Vereinfachen von Ausdrücken, geht es oft darum, Zahlen als Potenzen mit derselben Basis zu schreiben. Häufige Basen sind 2, 3, 4 und 5, und daher sollte man

Potenzen von diesen Basen zu erkennen lernen. Zum Beispiel:

$$4 = 2^2,\ \ 8 = 2^3,\ \ 16 = 2^4,\ \ 32 = 2^5,\ \ 64 = 2^6,\ \ 128 = 2^7,\ \dots$$
$$9 = 3^2,\ \ 27 = 3^3,\ \ 81 = 3^4,\ \ 243 = 3^5,\ \dots$$
$$25 = 5^2,\ \ 125 = 5^3,\ \ 625 = 5^4,\ \dots$$

Und auch

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2},\ \ \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3},\ \ \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4},\ \dots$$
$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2},\ \ \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3},\ \dots$$
$$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2},\ \ \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3},\ \dots$$

Usw.

Beispiel 7

a) Schreibe $8^3 \cdot 4^{-2} \cdot 16$ als eine Potenz mit der Basis 2.

$$\begin{aligned} 8^3 \cdot 4^{-2} \cdot 16 &= (2^3)^3 \cdot (2^2)^{-2} \cdot 2^4 = 2^{3\cdot 3} \cdot 2^{2\cdot(-2)} \cdot 2^4 \\ &= 2^9 \cdot 2^{-4} \cdot 2^4 = 2^{9-4+4} = 2^9 \end{aligned}$$

b) Schreibe $\dfrac{27^2 \cdot (1/9)^{-2}}{81^2}$ als eine Potenz mit der Basis 3.

$$\begin{aligned} \frac{27^2 \cdot (1/9)^{-2}}{81^2} &= \frac{(3^3)^2 \cdot (1/3^2)^{-2}}{(3^4)^2} = \frac{(3^3)^2 \cdot (3^{-2})^{-2}}{(3^4)^2} \\ &= \frac{3^{3\cdot 2} \cdot 3^{(-2)\cdot(-2)}}{3^{4\cdot 2}} = \frac{3^6 \cdot 3^4}{3^8} = \frac{3^{6+4}}{3^8} = \frac{3^{10}}{3^8} = 3^{10-8} = 3^2 \end{aligned}$$

c) Vereinfache $\dfrac{81 \cdot 32^2 \cdot (2/3)^2}{2^5 + 2^4}$ so weit wie möglich.

$$\begin{aligned} \frac{81 \cdot 32^2 \cdot (2/3)^2}{2^5 + 2^4} &= \frac{3^4 \cdot (2^5)^2 \cdot \frac{2^2}{3^2}}{2^{4+1} + 2^4} = \frac{3^4 \cdot 2^{5\cdot 2} \cdot \frac{2^2}{3^2}}{2^4 \cdot 2^1 + 2^4} = \frac{3^4 \cdot 2^{10} \cdot \frac{2^2}{3^2}}{2^4 \cdot (2^1 + 1)} \\ &= \frac{\frac{3^4 \cdot 2^{10} \cdot 2^2}{3^2}}{2^4 \cdot 3} = \frac{3^4 \cdot 2^{10} \cdot 2^2}{3^2 \cdot 2^4 \cdot 3} = 3^{4-2-1} \cdot 2^{10+2-4} = 3^1 \cdot 2^8 = 3 \cdot 2^8 \end{aligned}$$

D - Rationale Exponenten

Was geschieht, wenn der Exponent eine rationale Zahl ist? Werden die bisher genannten Definitionen und Rechenregeln auch gültig sein?

Da zum Beispiel

$$2^{1/2} \cdot 2^{1/2} = 2^{1/2+1/2} = 2^1 = 2$$

muss $2^{1/2}$ dasselbe wie $\sqrt{2}$ sein, weil $\sqrt{2}$ definiert wird als die Zahl die $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ erfüllt.

Generell definiert man

$$a^{1/2} = \sqrt{a}.$$

Wir müssen annehmen, dass $a \geq 0$, nachdem keine reelle Zahl mit sich selbst multipliziert eine negative Zahl ergibt.

Wie haben aber zum Beispiel auch

$$5^{1/3} \cdot 5^{1/3} \cdot 5^{1/3} = 5^{1/3+1/3+1/3} = 5^1 = 5.$$

Was bedeuten muss, dass $5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$, was durch folgende Rechenregel für $a \geq 0$ und $n \in \mathbf{N}$ verallgemeinert werden kann

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Indem man diese Regel mit der Regel $((a^m)^n = a^{m \cdot n})$ kombiniert, sieht man, dass für alle $a \geq 0$ folgendes gilt

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

oder

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Beispiel 8

a) $27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3 \quad$ da $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

b) $1000^{-1/3} = \frac{1}{1000^{1/3}} = \frac{1}{(10^3)^{1/3}} = \frac{1}{10^{3\cdot\frac{1}{3}}} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$

c) $\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{8^{1/2}} = \frac{1}{(2^3)^{1/2}} = \frac{1}{2^{3/2}} = 2^{-3/2}$

d) $\frac{1}{16^{-1/3}} = \frac{1}{(2^4)^{-1/3}} = \frac{1}{2^{-4/3}} = 2^{-(-4/3)} = 2^{4/3}$

E - Potenzen vergleichen

Wenn man Potenzen ohne Taschenrechner vergleichen möchte, kann man dies durch das vergleichen von Basis oder Exponent machen.

Wenn die Basis größer als 1 ist, wird die Potenz größer, je größer der Exponent wird. Wenn die Basis kleiner als 1, aber größer als 0 ist, gilt das Umgekehrte. Die Potenz wird kleiner, je größer der Exponent wird.

Beispiel 9

a) $3^{5/6} > 3^{3/4}$ weil die Basis 3 größer als 1 und der erste Exponent $5/6$ größer als der zweite Exponent $3/4$ ist.

b) $3^{-3/4} > 3^{-5/6}$ weil die Basis größer als 1 ist und für die Exponenten gilt, dass $-3/4 > -5/6$.

c) $0{,}3^5 < 0{,}3^4$ da die Basis 0,3 zwischen 0 und 1 ist, und $5 > 4$.

Wenn eine Potenz einen positiven Exponenten hat, wird die Potenz größer, je größer die Basis wird. Das Umgekehrte gilt für negative Exponenten; je größer die Basis, desto kleiner wird die Potenz.

Beispiel 10

a) $5^{3/2} > 4^{3/2}$ weil die Basis 5 größer als die Basis 4 ist und beide Potenzen denselben positiven Exponenten $3/2$ haben.

b) $2^{-5/3} > 3^{-5/3}$ weil für die Basen gilt, dass $2 < 3$, und die Potenzen den negativen Exponenten $-5/3$ haben.

In manchen Fällen muss man die Potenzen zuerst umschreiben, bevor man sie vergleichen kann. Um zum Beispiel 125^2 mit 36^3 zu vergleichen, kann man die Potenzen umschreiben:

$$125^2 = (5^3)^2 = 5^6 \quad \text{und} \quad 36^3 = (6^2)^3 = 6^6$$

womit man sieht, dass $36^3 > 125^2$.

Beispiel 11

Bestimme welche Zahl von folgenden Zahlenpaaren die größere ist.

a) $25^{1/3}$ und $5^{3/4}$.

Die Basis 25 kann durch Umschreiben zur Basis 5 geschrieben werden: $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$. Deshalb ist

$$25^{1/3} = (5^2)^{1/3} = 5^{2 \cdot \frac{1}{3}} = 5^{2/3}.$$

Daher ist

$$5^{3/4} > 25^{1/3}$$

weil $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ und die Basis 5 größer als 1 ist.

b) $(\sqrt{8}\,)^5$ und 128.

8 und 128 können beide mit der Basis 2 geschrieben werden,

$$\begin{aligned} 8 &= 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3, \\ 128 &= 2 \cdot 64 = 2 \cdot 2 \cdot 32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^3 = 2^7. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass

$$\begin{aligned} (\sqrt{8}\,)^5 &= (8^{1/2})^5 = (8)^{5/2} = (2^3)^{5/2} = 2^{3 \cdot \frac{5}{2}} = 2^{15/2}, \\ 128 &= 2^7 = 2^{14/2}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$(\sqrt{8}\,)^5 > 128$$

weil $\frac{15}{2} > \frac{14}{2}$ und die Basis 2 größer als 1 ist.

c) $(8^2)^{1/5}$ und $(\sqrt{27}\,)^{4/5}$.

Wegen $8 = 2^3$ und $27 = 3^3$, können die Basen als Exponenten von 2 bzw. 3 geschrieben werden,

$$\begin{aligned} (8^2)^{1/5} &= (8)^{2/5} = (2^3)^{2/5} = 2^{3 \cdot \frac{2}{5}} = 2^{6/5}, \\ (\sqrt{27}\,)^{4/5} &= (27^{1/2})^{4/5} = 27^{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}} = 27^{2/5} = (3^3)^{2/5} = 3^{3 \cdot \frac{2}{5}} = 3^{6/5}. \end{aligned}$$

Jetzt sieht man, dass
$$(\sqrt{27})^{4/5} > (8^2)^{1/5}$$
weil $3 > 2$ und der Exponent $\frac{6}{5}$ positiv ist.

d) $3^{1/3}$ und $2^{1/2}$

Wir schreiben die Exponenten mit gemeinsamen Nennern
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6}.$$
Dies ergibt
$$\begin{aligned} 3^{1/3} &= 3^{2/6} = (3^2)^{1/6} = 9^{1/6}, \\ 2^{1/2} &= 2^{3/6} = (2^3)^{1/6} = 8^{1/6}. \end{aligned}$$
Daher ist
$$3^{1/3} > 2^{1/2}$$
weil $9 > 8$ und der Exponent $1/6$ positiv ist.

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei `ombTutor`.

Tipps fürs Lernen

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung
Nachdem Du mit der Theorie und den Übungen fertig bist, sollst Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung machen. Du findest die links zu den Prüfungen in Deiner „Student Lounge“.

Bedenke folgendes:
Eine Potenz bei der der Exponent 0 ist, ist immer 1, solange die Basis nicht 0 ist.

Literaturhinweise
Für die, die tiefer in die Materie einsteigen wollen, sind hier einige Links ang eführt:

- Mehr über Potenzen in der Wikipedia
  (`http://de.wikipedia.org/wiki/Potenz_(Mathematik)`)
- Welche ist die größte Primzahl? Lies Mehr auf der Primzahlseite (engl.)
  (`http://primes.utm.edu/`)

Nützliche Websites

- Hier kannst Du die Rechenregeln fü Potenzen üben (engl.) (http://www.ltcconline.net/greenl/java/BasicAlgebra/ExponentRules/ExponentRules.html)

1.3 Übungen

Übung 1.3:1

Berechne

a) $2^3 \cdot 3^2$ b) $3^5 \cdot 9^{-2}$ c) $(-5)^3$ d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$

Übung 1.3:2

Schreibe folgende Ausdrücke als eine Potenz mit der Basis 2

a) $2 \cdot 4 \cdot 8$ b) $0{,}25$ c) 1

Übung 1.3:3

Schreibe folgende Ausdrücke als eine Potenz mit der Basis 3

a) $\dfrac{1}{3}$ b) 243 c) 9^2 d) $\dfrac{1}{27}$ e) $\dfrac{3}{9^2}$

Übung 1.3:4

Berechne

a) $2^9 \cdot 2^{-7}$ b) $3^{13} \cdot 9^{-3} \cdot 27^{-2}$ c) $\dfrac{5^{12}}{5^{-4}} \cdot (5^2)^{-6}$

d) $2^{2^3} \cdot (-2)^{-4}$ e) $625 \cdot (5^8 + 5^9)^{-1}$

Übung 1.3:5

Berechne

a) $4^{1/2}$ b) $4^{-1/2}$

c) $9^{3/2}$ d) $\left(47^{2/3}\right)^3$

e) $3^{1,4} \cdot 3^{0,6}$ f) $\left(125^{1/3}\right)^2 \cdot \left(27^{1/3}\right)^{-2} \cdot 9^{1/2}$

Übung 1.3:6

Bestimme, welche Zahl von folgenden Zahlenpaaren die größte ist.

a) $256^{1/3}$ und $200^{1/3}$ b) $0{,}5^{-3}$ und $0{,}4^{-3}$ c) $0{,}2^5$ und $0{,}2^7$

d) $400^{1/3}$ und $\left(5^{1/3}\right)^4$ e) $125^{1/2}$ und $625^{1/3}$ f) 2^{56} und 3^{40}

2.1 Algebraische Ausdrücke

Inhalt:

- Das Distributivgesetz
- Binomische Formeln
- Differenz von zwei Quadraten
- Rationale Ausdrücke

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Algebraische Ausdrücke vereinfachen.
- Algebraische Ausdrücke mit Hilfe der binomischen Formeln faktorisieren.
- Algebraische Ausdrücke mit Hilfe der binomischen Formeln erweitern.

Was ist eigentlich ein algebraischer Ausdruck?

Statt Ausdruck kann man auch Term sagen: Es sind Summen und Produkte, die Variablen enthalten. Bei einem „algebraischer Ausdruck" kommen von den Variablen auch Potenzen vor. Haben alle Potenzen einen natürlichen Exponenten nennt man den algebraischen Ausdruck auch ganzrationalen Ausdruck oder Polynom in einer bestimmten Variable. Ein Bruch von zwei ganzrationalen Ausdrücken heisst ein gebrochen rationaler Ausdruck.

A - Das Distributivgesetz

Das Distributivgesetz ist die Regel für die Multiplikation von Klammern mit einem Faktor.

$$a(b+c) = ab + ac$$

Beispiel 1

a) $4(x+y) = 4x + 4y$

b) $2(a-b) = 2a - 2b$

c) $x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x \cdot \frac{1}{x} + x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = 1 + \frac{1}{x}$

d) $a(x+y+z) = ax + ay + az$

Das Distributivgesetz erklärt auch, wie ein Minuszeichen vor einer Klammer interpretiert werden soll: Ein Minuszeichen vor einer Klammer entspricht dem Wechsel des Vorzeichens von allen Zahlen in der Klammer. Siehe dazu Beispiel 2a. und 2b.

Beispiel 2

a) $-(x+y) = (-1) \cdot (x+y) = (-1)x + (-1)y = -x - y$

b) $-(x^2 - x) = (-1) \cdot (x^2 - x) = (-1)x^2 - (-1)x = -x^2 + x$
wobei wir im letzten Schritt $-(-1)x = (-1)(-1)x = 1 \cdot x = x$ verwendet haben.

c) $$\begin{aligned} -(x+y-y^3) &= (-1) \cdot (x+y-y^3) = (-1) \cdot x + (-1) \cdot y - (-1) \cdot y^3 \\ &= -x - y + y^3 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x^2 - 2x - (3x+2) &= x^2 - 2x - 3x - 2 = x^2 - (2+3)x - 2 \\ &= x^2 - 5x - 2 \end{aligned}$$

Das Distributivgesetz kann auch in umgekehrter Reihenfolge angewendet werden. Dies nennt man „Ausklammern". Oft möchte man den größten gemeinsamen Teiler (ggT) ausklammern.

Beispiel 3

a) $3x + 9y = 3x + 3 \cdot 3y = 3(x + 3y)$

b) $xy + y^2 = xy + y \cdot y = y(x+y)$

c) $2x^2 - 4x = 2x \cdot x - 2 \cdot 2 \cdot x = 2x(x-2)$

d) $\frac{y-x}{x-y} = \frac{-(x-y)}{x-y} = \frac{-1}{1} = -1$

B - Die binomischen Formeln

Das Distributivgesetz kann angewendet werden, um andere Rechenregeln herzuleiten. Wenn wir folgenden Ausdruck beachten

$$(a+b)(c+d)$$

und $(a+b)$ als einen Faktor betrachten, der mit der Klammer $(c+d)$ multipliziert wird, bekommen wir

$$\begin{aligned} \,(c+d) &= \,c + \,d, \\ (a+b)\,(c+d) &= (a+b)\,c + (a+b)\,d. \end{aligned}$$

Danach verwenden wir wieder das Distributivgesetz zweimal und multiplizieren c und d mit ihren jeweiligen Klammern,

$$(a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd.$$

Um sich an die Formel zu erinnern, kann man wie folgt denken:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Beispiel 4

a) $$\begin{aligned}(x+1)(x-2) &= x \cdot x + x \cdot (-2) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-2) = x^2 - 2x + x - 2 \\ &= x^2 - x - 2\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}3(x-y)(2x+1) &= 3(x \cdot 2x + x \cdot 1 - y \cdot 2x - y \cdot 1) = 3(2x^2 + x - 2xy - y) \\ &= 6x^2 + 3x - 6xy - 3y\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}(1-x)(2-x) &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-x) - x \cdot 2 - x \cdot (-x) = 2 - x - 2x + x^2 \\ &= 2 - 3x + x^2\end{aligned}$$

wobei wir folgende Rechnung benutzt haben $-x \cdot (-x) = (-1)x \cdot (-1)x = (-1)^2 x^2 = 1 \cdot x^2 = x^2$.

Es gibt zwei wichtige Sonderfälle von dieser Regel, nämlich wenn $a+b$ und $c+d$ gleich sind.

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Diese Regeln werden die erste und zweite binomische Formel genannt.

Beispiel 5

a) $(x+2)^2 = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

b) $(-x+3)^2 = (-x)^2 + 2 \cdot 3(-x) + 3^2 = x^2 - 6x + 9$
wobei $(-x)^2 = ((-1)x)^2 = (-1)^2 x^2 = 1 \cdot x^2 = x^2$.

c) $(x^2-4)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 + 4^2 = x^4 - 8x^2 + 16$

d)
$$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x-1)^2 &= (x^2+2x+1) - (x^2-2x+1)\\ &= x^2+2x+1-x^2+2x-1\\ &= 2x+2x = 4x\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}(2x+4)(x+2) &= 2(x+2)(x+2) = 2(x+2)^2 = 2(x^2+4x+4)\\ &= 2x^2+8x+8\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}(x-2)^3 &= (x-2)(x-2)^2 = (x-2)(x^2-4x+4)\\ &= x \cdot x^2 + x \cdot (-4x) + x \cdot 4 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot (-4x) - 2 \cdot 4\\ &= x^3 - 4x^2 + 4x - 2x^2 + 8x - 8 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8\end{aligned}$$

Die binomischen Formeln können auch rückwärts verwendet werden, um einen Summe in ein Produkt zu verwandeln. Weil die Bestandteile eines Produktes Faktoren heissen, sagt man dazu auch: einen Ausdruck faktorisieren.

Beispiel 6

a) $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

b) $x^6 - 4x^3 + 4 = (x^3)^2 - 2 \cdot 2x^3 + 2^2 = (x^3-2)^2$

c) $x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

C - Differenz von zwei Quadraten

Es gibt auch eine dritte binomische Formel, diese lautet:

Die Differenz von zwei Quadraten:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Diese Formel kann hergeleitet werden, indem man das Distributivgesetz zweimal verwendet,

$$(a+b)(a-b) = a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Beispiel 7

a) $(x-4y)(x+4y) = x^2 - (4y)^2 = x^2 - 16y^2$

b) $(x^2+2x)(x^2-2x) = (x^2)^2 - (2x)^2 = x^4 - 4x^2$

c) $(y+3)(3-y) = (3+y)(3-y) = 3^2 - y^2 = 9 - y^2$

d) $$\begin{aligned} x^4 - 16 &= (x^2)^2 - 4^2 = (x^2+4)(x^2-4) = (x^2+4)(x^2-2^2) \\ &= (x^2+4)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

D - Gebrochen rationale Ausdrücke

Rechnungen mit gebrochen rationalen Ausdrücken sind Rechnungen mit Brüchen sehr ähnlich.

Alle Rechenregeln, die für Brüche gelten, gelten auch für gebrochen rationale Ausdrücke.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \text{und} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Beispiel 8

a) $\dfrac{3x}{x-y} \cdot \dfrac{4x}{2x+y} = \dfrac{3x \cdot 4x}{(x-y) \cdot (2x+y)} = \dfrac{12x^2}{(x-y)(2x+y)}$

b) $$\frac{\frac{a}{x}}{\frac{x+1}{a}} = \frac{a^2}{x(x+1)}$$

c) $$\frac{\frac{x}{(x+1)^2}}{\frac{x-2}{x-1}} = \frac{x(x-1)}{(x-2)(x+1)^2}$$

Man kann den Zähler und Nenner eines gebrochen rationalen Ausdruckes mit jeweils demselben Ausdruck multiplizieren. Dies nennt man wie bei Brüchen Erweitern,

$$\frac{x+2}{x+1} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{(x+2)(x+3)(x+4)}{(x+1)(x+3)(x+4)} = \dots$$

Dies gilt auch umgekehrt, nämlich, dass man den Zähler und Nenner eines gebrochen rationalen Ausdrucks jeweils durch denselben Ausdruck dividiert. Dies wird wie bei Brüchen auch kürzen genannt,

$$\frac{(x+2)\cancel{(x+3)}(x+4)}{(x+1)\cancel{(x+3)}(x+4)} = \frac{(x+2)\cancel{(x+4)}}{(x+1)\cancel{(x+4)}} = \frac{x+2}{x+1}.$$

Beispiel 9

a) $$\frac{x}{x+1} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+2}{x+2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)(x+2)}$$

b) $$\frac{x^2-1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x}$$

c) $$\frac{(x^2-y^2)(x-2)}{(x^2-4)(x+y)} = \{\text{ Binomische Formel }\} = \frac{(x+y)(x-y)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x+y)} = \frac{x-y}{x+2}$$

Wenn man Brüche addiert oder subtrahiert, muss man die Brüche zuerst erweitern, sodass sie einen gemeinsamen Nenner haben

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)}.$$

Um die Ausdrücke so klein wie möglich zu behalten, sollte man immer den kleinsten gemeinsamen Nenner der Brüche finden. Der kleinste gemeinsame Nenner von zwei Brüchen ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der beiden Nenner der Brüche.

Beispiel 10

a) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$. Das kleinste gemeinsame Vielfache von $x+1$ und $x+2$ ist $(x+1)(x+2)$. Darum ist $(x+1)(x+2)$ der kleinste gemeinsame Nenner von $1/(x+1)+1/(x+2)$.

Wir erweitern den ersten Bruch mit $(x+2)$ und den zweiten Bruch mit $(x+1)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2} &= \frac{x+2}{(x+1)(x+2)}+\frac{x+1}{(x+2)(x+1)}\\ &= \frac{x+2+x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}.\end{aligned}$$

b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ hat den kleinsten gemeinsamen Nenner x^2.

Wir müssen nur den ersten Bruch erweitern, damit beide Brüche den gleichen Nenner haben,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}.$$

c) $\dfrac{1}{x(x+1)^2}-\dfrac{1}{x^2(x+2)}$ hat den kleinsten gemeinsamen Nenner $x^2(x+1)^2(x+2)$.

Wie erweitern den ersten Bruch mit $x(x+2)$ und den zweiten Bruch mit $(x+1)^2$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+1)^2}-\frac{1}{x^2(x+2)} &= \frac{x(x+2)}{x^2(x+1)^2(x+2)}-\frac{(x+1)^2}{x^2(x+1)^2(x+2)}\\ &= \frac{x^2+2x}{x^2(x+1)^2(x+2)}-\frac{x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2(x+2)}\\ &= \frac{x^2+2x-(x^2+2x+1)}{x^2(x+1)^2(x+2)}\\ &= \frac{x^2+2x-x^2-2x-1}{x^2(x+1)^2(x+2)}\\ &= \frac{-1}{x^2(x+1)^2(x+2)}.\end{aligned}$$

d) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x(x-1)}-1$ hat den kleinsten gemeinsamen Nenner $x(x-1)(x+1)$.

Wir müssen alle Brüche erweitern, sodass sie den gemeinsamen Nenner $x(x-1)(x+1)$ haben,

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x(x-1)} - 1 &= \frac{x^2(x-1)}{x(x-1)(x+1)} - \frac{x+1}{x(x-1)(x+1)} - \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{x^3-x^2}{x(x-1)(x+1)} - \frac{x+1}{x(x-1)(x+1)} - \frac{x^3-x}{x(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{x^3-x^2-(x+1)-(x^3-x)}{x(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{x^3-x^2-x-1-x^3+x}{x(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{-x^2-1}{x(x-1)(x+1)}.
\end{aligned}$$

Um große Ausdrücke zu vereinfachen, kürzt man häufig die Brüche. Um Brüche kürzen zu können, müssen sie in ihre Faktoren zerlegt werden, sodass man die Faktoren erkennt. Deshalb sollten die Ausdrücke immer faktorisiert bleiben, solange man nicht mit den Rechnungen fertig ist.

Beispiel 11

a) $$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} &= \frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x+2)(x-2)} \\
&= \{\text{ Kleinster gemeinsamer Nenner} = (x+2)(x-2) \} \\
&= \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} - \frac{4}{(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{x+2-4}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2}
\end{aligned}$$

b) $$\frac{x+\frac{1}{x}}{x^2+1} = \frac{\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}}{x^2+1} = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x}$$

c) $$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{x+y} &= \frac{\frac{y^2}{x^2y^2}-\frac{x^2}{x^2y^2}}{x+y} = \frac{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}{x+y} = \frac{y^2-x^2}{x^2y^2(x+y)} \\
&= \frac{(y+x)(y-x)}{x^2y^2(x+y)} = \frac{y-x}{x^2y^2}
\end{aligned}$$

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei `ombTutor`.

Tipps fürs Lernen

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung
Nachdem Du mit der Theorie und den Übungen fertig bist, solltest Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung machen. Du findest die Links zu den Prüfungen in Deiner „Student Lounge“.

Bedenke folgendes:
Vorsicht! Ein Rechenfehler kann die ganze Rechnung zerstören.

Rechne lieber in mehreren Schritten als in einem Schritt, falls Du Dich unsicher fühlst.

Das Erweitern von Ausdrücken ist oft unnötig, da Du den Ausdruck später vielleicht kürzen musst.

Literaturhinweise

- Mehr über Algebra in der Wikipedia
  (`http://de.wikipedia.org/wiki/Algebra`)
- Understanding Algebra - ein englischer Text im Web
  (`http://www.jamesbrennan.org/algebra/`)

2.1 Übungen

Übung 2.1:1

Erweitere

a)	$3x(x-1)$	b)	$(1+x-x^2)xy$	c)	$-x^2(4-y^2)$
d)	$x^3y^2\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{xy}+1\right)$	e)	$(x-7)^2$	f)	$(5+4y)^2$
g)	$(y^2-3x^3)^2$	h)	$(5x^3+3x^5)^2$		

Übung 2.1:2

Löse die Klammern auf und vereinfache

a)	$(x-4)(x-5)-3x(2x-3)$	b)	$(1-5x)(1+15x)-3(2-5x)(2+5x)$
c)	$(3x+4)^2-(3x-2)(3x-8)$	d)	$(3x^2+2)(3x^2-2)(9x^4+4)$
e)	$(a+b)^2+(a-b)^2$		

Übung 2.1:3

Faktorisiere und vereinfache so weit wie möglich

a)	x^2-36	b)	$5x^2-20$	c)	x^2+6x+9
d)	$x^2-10x+25$	e)	$18x-2x^3$	f)	$16x^2+8x+1$

Übung 2.1:4

Löse die Klammern auf und bestimme die Koeffizienten von x und x^2.

a)	$(x+2)(3x^2-x+5)$
b)	$(1+x+x^2+x^3)(2-x+x^2+x^4)$
c)	$(x-x^3+x^5)(1+3x+5x^2)(2-7x^2-x^4)$

Übung 2.1:5

Vereinfachen so weit wie möglich

a)	$\dfrac{1}{x-x^2}-\dfrac{1}{x}$	b)	$\dfrac{1}{y^2-2y}-\dfrac{2}{y^2-4}$
c)	$\dfrac{(3x^2-12)(x^2-1)}{(x+1)(x+2)}$	d)	$\dfrac{(y^2+4y+4)(2y-4)}{(y^2+4)(y^2-4)}$

Übung 2.1:6

Vereinfache so weit wie möglich

a) $\left(x - y + \dfrac{x^2}{y - x}\right)\left(\dfrac{y}{2x - y} - 1\right)$ b) $\dfrac{x}{x - 2} + \dfrac{x}{x + 3} - 2$

c) $\dfrac{2a + b}{a^2 - ab} - \dfrac{2}{a - b}$ d) $\dfrac{a - b + \dfrac{b^2}{a + b}}{1 - \left(\dfrac{a - b}{a + b}\right)^2}$

Übung 2.1:7

Vereinfache folgende Ausdrücke, sodass sie nur einen Bruch enthalten

a) $\dfrac{2}{x + 3} - \dfrac{2}{x + 5}$ b) $x + \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x^2}$ c) $\dfrac{ax}{a + 1} - \dfrac{ax^2}{(a + 1)^2}$

Übung 2.1:8

Vereinfache folgende Ausdrücke, sodass sie nur einen Bruch enthalten

a) $\dfrac{\dfrac{x}{x + 1}}{3 + x}$ b) $\dfrac{\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x - 3}}$ c) $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + x}}}$

2.2 Lineare Gleichungen

Inhalt:

- Lineare Gleichungen
- Gleichung einer Geraden
- Geometrische Probleme
- Gebiete definiert durch lineare Gleichungen

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Algebraische Gleichungen, die nach Vereinfachungen lineare Gleichungen ergeben, lösen.
- Gleichungen zwischen den Formen $y = kx + m$ und $ax + by + c = 0$ umwandeln.
- Geraden, die durch eine lineare Gleichung definiert sind, zeichnen.
- Geometrische Probleme mit linearen Gleichungen lösen.
- Gebiete, die durch lineare Gleichungen definiert sind, zeichnen und die Fläche dieser Gebiete berechnen.

A - Lineare Gleichungen

Um Lineare Gleichungen zu lösen, führen wir systematisch arithmetische Operationen auf beiden Seiten der Gleichung aus.

Beispiel 1

a) Löse die Gleichung $x + 3 = 7$.

Wir subtrahieren 3 von beiden Seiten,

$$x + 3 - 3 = 7 - 3.$$

Die linke Seite ist danach x, also ist unsere Gleichung gelöst:

$$x = 7 - 3 = 4.$$

b) Löse die Gleichung $3x = 6$.

Wir dividieren beide Seiten mit 3,

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}.$$

Nachdem wir 3 auf der linken Seite gekürzt haben, bekommen wir die Lösung:

$$x = \frac{6}{3} = 2.$$

c) Löse die Gleichung $2x + 1 = 5$.

Zuerst subtrahieren wir 1 von beiden Seiten, sodass $2x$ alleine links steht

$$2x = 5 - 1.$$

Jetzt dividieren wir beide Seiten durch 2 und bekommen die Lösung:

$$x = \frac{4}{2} = 2.$$

Eine lineare Gleichung kann immer in die Normalform $ax = b$ gebracht werden. Die Lösung bekommen wir einfach mit Division durch a, $x = b/a$ (nur wenn $a \neq 0$).

Die Schwierigkeit in der Lösung von linearen Gleichungen liegt also nicht in der direkten Lösung, sondern in den Vereinfachungen, die notwendig sind, um die Gleichung in die Standardform zu bringen. Hier zeigen wir einige Beispiele von linearen Gleichungen, die alle in die Standardform gebracht werden, wobei wir die Lösung einfach erhalten.

Beispiel 2

Löse die Gleichung $2x - 3 = 5x + 7$.

Nachdem x links und rechts erscheint, subtrahieren wir von beiden Seiten der Gleichung $2x$,

$$2x - 3 - 2x = 5x + 7 - 2x,$$

und jetzt kommt x nur in der rechten Seite vor

$$-3 = 3x + 7.$$

Jetzt subtrahieren wir 7 von beiden Seiten der Gleichung,

$$-3 - 7 = 3x + 7 - 7,$$

und erhalten $3x$ nur auf der rechten Seite der Gleichung,

$$-10 = 3x.$$

Im letzten Schritt dividieren wir beide Seiten durch 3,

$$\frac{-10}{3} = \frac{3x}{3},$$

und erhalten die Lösung

$$x = -\frac{10}{3}.$$

Beispiel 3

Löse die Gleichung $ax + 7 = 3x - b$ nach x auf.

Indem wir $3x$ von beiden Seiten subtrahieren,

$$\begin{aligned} ax + 7 - 3x &= 3x - b - 3x, \\ ax + 7 - 3x &= - b, \end{aligned}$$

und danach 7 von beiden Seiten subtrahieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} ax + 7 - 3x - 7 &= -b - 7, \\ ax - 3x &= -b - 7. \end{aligned}$$

Jetzt sind alle Terme, die x enthalten, auf der linken Seite der Gleichung und alle anderen Terme auf der rechten Seite. Auf der linken Seite können wir den Faktor x ausklammern (Anwendung des Distributivgesetzes),

$$(a - 3)x = -b - 7.$$

Wenn wir beide Seiten durch $a - 3$ dividieren, erhalten wir die Lösung

$$x = \frac{-b - 7}{a - 3}.$$

Man sieht nicht immer deutlich, ob eine Gleichung linear ist oder nicht. In den folgenden Beispielen sehen wir, dass Vereinfachungen eine komplizierte Gleichung in eine lineare Gleichung umwandeln können.

Beispiel 4
Löse die Gleichung $(x-3)^2 + 3x^2 = (2x+7)^2$.

Wir multiplizieren die quadratischen Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung aus,

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 + 3x^2 &= 4x^2 + 28x + 49, \\ 4x^2 - 6x + 9 &= 4x^2 + 28x + 49. \end{aligned}$$

Hier subtrahieren wir $4x^2$ von beiden Seiten,

$$-6x + 9 = 28x + 49,$$

und addieren $6x$ zu beiden Seiten,

$$9 = 34x + 49,$$

und subtrahieren 49 von beiden Seiten,

$$-40 = 34x,$$

und schließlich dividieren wir beide Seiten durch 34,

$$x = \frac{-40}{34} = -\frac{20}{17}.$$

Beispiel 5
Löse die Gleichung $\dfrac{x+2}{x^2+x} = \dfrac{3}{2+3x}$.

Wir sammeln beide Terme auf der linken Seite der Gleichung,

$$\frac{x+2}{x^2+x} - \frac{3}{2+3x} = 0,$$

und schreiben die Brüche mit gemeinsamen Nennern,

$$\frac{(x+2)(2+3x)}{(x^2+x)(2+3x)} - \frac{3(x^2+x)}{(2+3x)(x^2+x)} = 0,$$

und vereinfachen den Zähler

$$\frac{(x+2)(2+3x)-3(x^2+x)}{(x^2+x)(2+3x)} = 0,$$
$$\frac{3x^2+8x+4-(3x^2+3x)}{(x^2+x)(2+3x)} = 0,$$
$$\frac{5x+4}{(x^2+x)(2+3x)} = 0.$$

Diese Gleichung ist nur gültig, wenn der Zähler null ist (und der Nenner nicht gleichzeitig null ist),

$$5x+4=0,$$

und wir haben $x = -\frac{4}{5}$.

B - Geraden

Gleichungen wie

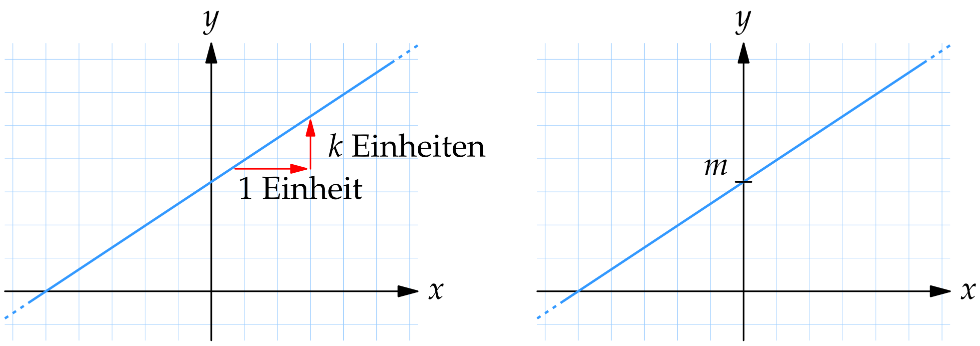
$$y = 2x+1,$$
$$y = -x+3 \quad \text{und}$$
$$y = \tfrac{1}{2}x-5$$

sind Beispiele von linearen Gleichungen, die man wie

$$y = kx + m$$

schreiben kann, wobei k und m Konstanten sind.

Der Funktionsgraph einer linearen Gleichung ist immer eine gerade Linie (auch Gerade genannt). Die Konstante k bestimmt, wie steil die Gerade im Verhältnis zur x-Achse ist und die Konstante m ist der Schnittpunkt von der Gerade mit der y-Achse.



Die Gerade $y = kx + m$ hat die Steigung k und kreuzt die y-Achse im Punkt $(0, m)$.

Die Konstante k wird die Steigung genannt und bedeutet, dass eine Veränderung um eine Einheit in der positiven x-Richtung entlang der Geraden, eine Veränderung um k Einheiten in der positiven y-Richtung ergibt. Also ist die Steigung:

- Aufwärts wenn $k > 0$,
- Abwärts wenn $k < 0$.

Eine horizontale Gerade, die parallel mit der x-Achse ist, hat $k = 0$ während eine vertikale Gerade, parallel mit der y-Achse nicht in der Form $y = kx + m$ geschrieben werden kann. (Wenn die Gerade auf der y-Achse liegt, ist jeder Punkt der Gerade ein Schnittpunkt mit der y-Achse, also gibt es zuviele mögliche m. Wenn die Gerade nicht auf der y-Achse liegt, gibt es keinen reellen Schnittpunkt mit der y-Achse, und darum kein m.)

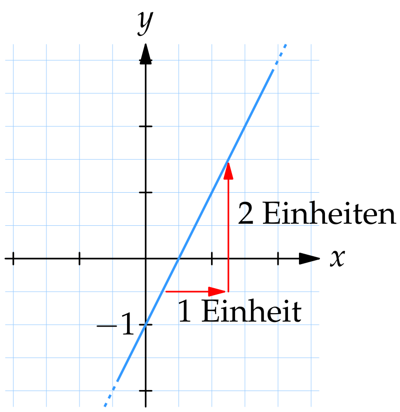
Beispiel 6

a) Zeichne die Gerade $y = 2x - 1$.

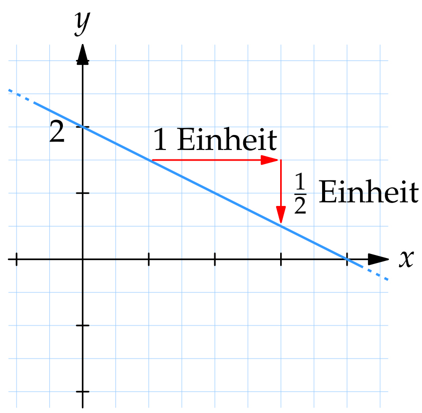
Wenn wir die Gleichung mit der Standardform $y = kx + m$ vergleichen, sehen wir, dass $k = 2$ und $m = -1$. Dies bedeutet, dass die Gerade die Steigung 2 hat und die y-Achse im Punkt $(0, -1)$ kreuzt. Siehe die Zeichnung links unten.

b) Zeichne die Gerade $y = 2 - \frac{1}{2}x$.

Die Gleichung kann wie $y = -\frac{1}{2}x + 2$ geschrieben werden. Wir sehen, dass die Steigung $k = -\frac{1}{2}$ ist, und dass $m = 2$. Siehe die Zeichnung rechts unten.



Die Gerade $y = 2x - 1$

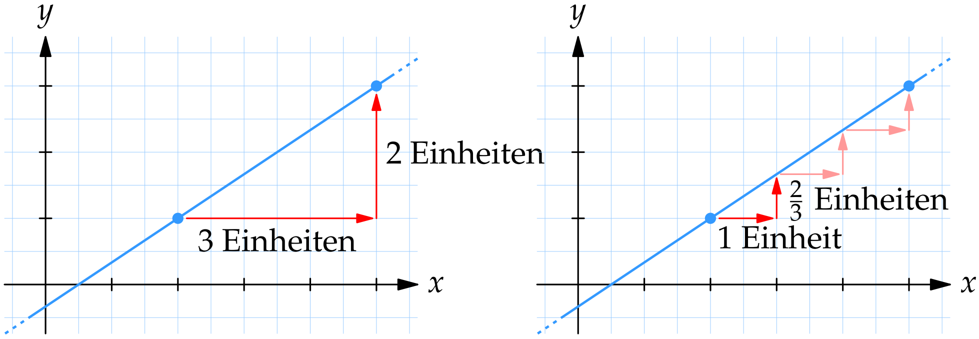


Die Gerade $y = 2 - x/2$

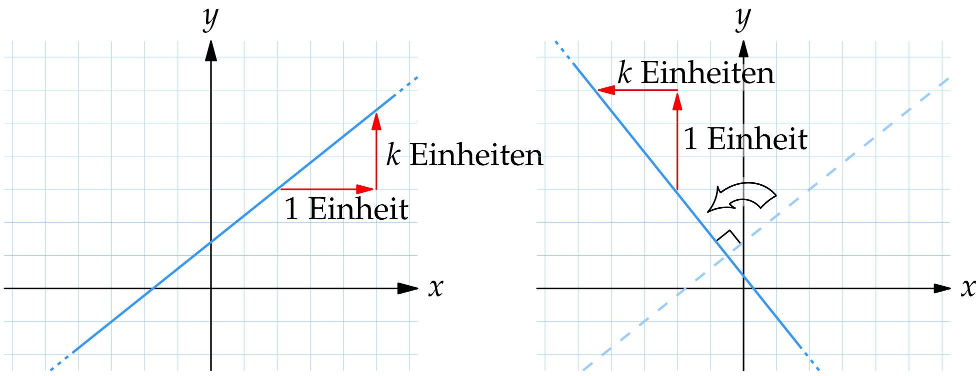
Beispiel 7

Was ist die Steigung der Geraden, die durch die Punkte $(2, 1)$ und $(5, 3)$ geht?

Wenn wir die Punkte zeichnen, sehen wir, dass $5 - 2 = 3$ Einheiten entlang der Geraden in der x-Richtung $3 - 1 = 2$ Einheiten in der y-Richtung entsprechen. Also entspricht 1 Schritt in der x-Richtung $k = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3}$ Schritte in der y-Richtung. Also ist die Steigung $k = \frac{2}{3}$.



Zwei Geraden die parallel sind, haben dieselbe Steigung. Man kann auch zeigen, dass für zwei Geraden, die rechtwinkelig sind und die Steigungen k_1 und k_2 haben, dass $k_2 = -1/k_1$, oder anders geschrieben $k_1 k_2 = -1$.



Die Gerade in der linken Zeichnung hat die Steigung k, also entspricht 1 Einheit in die x-Richtung, k Einheiten in die y-Richtung. Falls die Gerade 90° im Uhrzeigersinn gedreht wird, haben wir die Zeichnung rechts. Wir sehen, dass die Steigung jetzt $-1/k$ ist, nachdem $-k$ Einheiten in die x-Richtung 1 Einheit in die y-Richtung entsprechen.

Beispiel 8

a) Die Geraden $y = 3x - 1$ und $y = 3x + 5$ sind parallel.

b) Die Geraden $y = x + 1$ und $y = 2 - x$ sind orthogonal zueinander.

Alle Geraden (auch die vertikalen) können generell wie

$$ax + by = c$$

geschrieben werden, wobei a, b und c Konstanten sind.

Beispiel 9

a) Bringe die Gerade $y = 5x + 7$ in die Form $ax + by = c$.

Wir subtrahieren den x-Term von beiden Seiten:$-5x + y = 7$.

b) Schreibe die Gerade $2x + 3y = -1$ auf der Form $y = kx + m$.

Wir subtrahieren den x-Term von beiden Seiten,

$$3y = -2x - 1,$$

und dividieren beide Seiten durch 3,

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}.$$

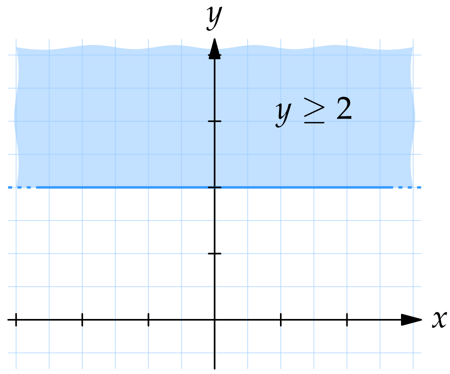
C - Flächen in einem Koordinatensystem

Man kann durch geometrische Interpretation von Ungleichungen Gebiete in einem Koordinatensystem definieren.

Beispiel 10

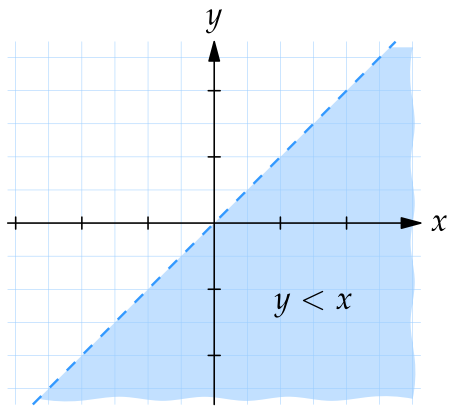
a) Zeichne das Gebiet im x, y-Koordinatensystem, das die Ungleichung $y \geq 2$ erfüllt.

Das Gebiet besteht aus allen Punkten, (x, y), wo die y-Koordinate größer oder gleich 2 ist, also alle Punkte oberhalb der Geraden $y = 2$.



b) Zeichne das Gebiet im x, y-Koordinatensystem, dass die Ungleichung $y < x$ erfüllt.

Ein Punkt (x, y), der die Ungleichung $y < x$ erfüllt, muss eine x-Koordinate haben, die größer als die y-Koordinate ist. Also liegt das Gebiet rechts von der Geraden $y = x$.



Dass die Gerade $y = x$ gepunktet ist, heißt, dass sie nicht zum gefärbten Gebiet gehört.

Beispiel 11

Zeichne das Gebiet im x, y-Koordinatensystem, das die Ungleichung $2 \leq 3x + 2y \leq 4$ erfüllt.

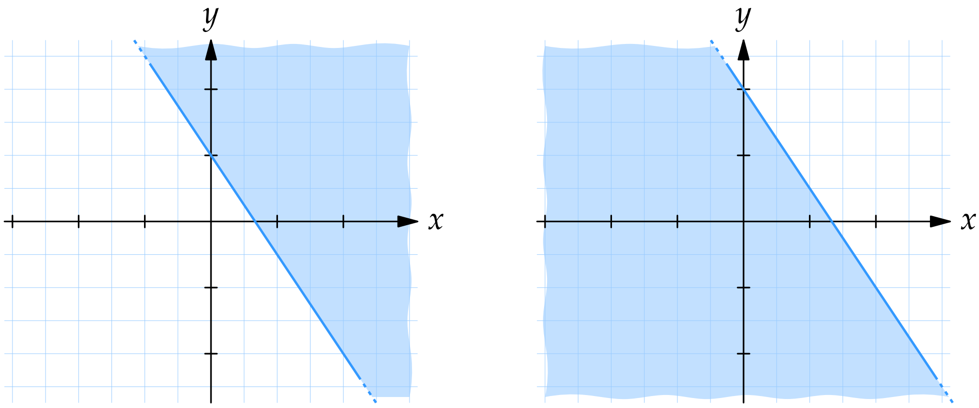
Die doppelte Ungleichung kann in zwei Ungleichungen aufgeteilt werden

$$3x + 2y \geq 2 \quad \text{und} \quad 3x + 2y \leq 4.$$

Wir subtrahieren den x-Term von beiten Seiten und dividieren danach beide Seiden durch 2,

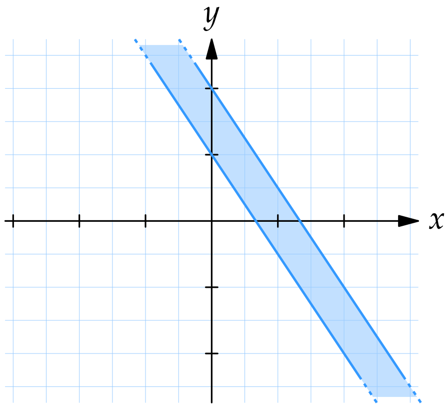
$$y \geq 1 - \frac{3}{2}x \quad \text{und} \quad y \leq 2 - \frac{3}{2}x.$$

Die Punkte, die die erste Ungleichung erfüllen, liegen auf oder oberhalb der Geraden $y = 1 - \frac{3}{2}x$, während die Punkte, welche die zweite Ungleichung erfüllen auf oder unterhalb der Geraden $y = 2 - \frac{3}{2}x$ liegen.



Das linke Bild zeigt das Gebiet $3x + 2y \geq 2$ und das rechte Bild zeigt das Gebiet $3x + 2y \leq 4$.

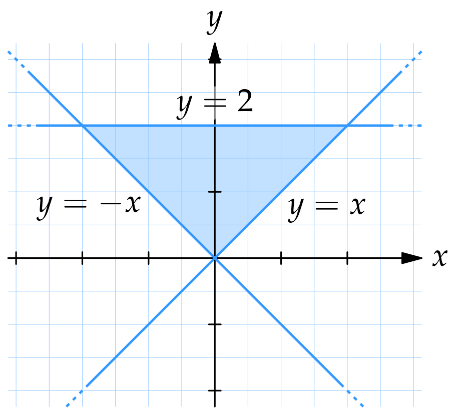
Die Punkte, die beide Ungleichungen erfüllen liegen auch in beiden Gebieten.



Das Bild zeigt das Gebiet $2 \leq 3x + 2y \leq 4$.

Beispiel 12

Die Geraden $y = x$, $y = -x$ und $y = 2$ begrenzen ein Dreieck.



Wir sehen, dass ein Punkt folgende Bedienungen erfüllen muss, um im Dreieck zu liegen:

Die y-Koordinate muss geringer als 2 sein. Die y-Koordinate muss aber auch größer als 0 sein. Also muss gelten, dass $0 \leq y \leq 2$.

Wir sehen auch, dass alle Punkte oberhalb der Geraden $y = -x$ und $y = x$ liegen müssen. Dies entspricht, dass $-y \leq x \leq y$. Nachdem wir Begrenzungen für die y-Koordinate haben, wissen wir auch, dass x kleiner als 2 sein muss und größer als -2.

Die Grundseite (oder Basis) des Dreiecks ist 4 und die Höhe ist 2.

Die Fläche des Dreiecks ist daher $4 \cdot 2/2 = 4$.

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei `ombTutor`.

Tipps fürs Lernen

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung
Nachdem Du mit der Theorie und den Übungen fertig bist, solltest Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung machen. Du findest die Links zu den Prüfungen in Deiner „Student Lounge“.

Bedenke folgendes:
Fertige immer eine eigene kleine Zeichnung an, wenn Du geometrische Probleme lösen willst, und zeichne genau. Mit einer guten Zeichnung ist das Problem oft schon gelöst, während eine schlechte Zeichnung irreführend sein kann.

Nützliche Websites

- Experimente mit Geradengleichungen (engl.)
  (`http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Calculus/StraightLine.shtml`)
- Experimente mit Archimedischen Dreiecken (engl.)
  (`http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/ArchimedesTriangle.shtml`)

2.2 Übungen

Übung 2.2:1

Löse die Gleichungen

a) $x - 2 = -1$

b) $2x + 1 = 13$

c) $\frac{1}{3}x - 1 = x$

d) $5x + 7 = 2x - 6$

Übung 2.2:2

Löse die Gleichungen

a) $\dfrac{5x}{6} - \dfrac{x+2}{9} = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{8x+3}{7} - \dfrac{5x-7}{4} = 2$

c) $(x+3)^2 - (x-5)^2 = 6x + 4$

d) $(x^2 + 4x + 1)^2 + 3x^4 - 2x^2 = (2x^2 + 2x + 3)^2$

Übung 2.2:3

Löse die Gleichungen

a) $\dfrac{x+3}{x-3} - \dfrac{x+5}{x-2} = 0$

b) $\dfrac{4x}{4x-7} - \dfrac{1}{2x-3} = 1$

c) $\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) = \dfrac{6x-1}{3x-3}$

d) $\left(\dfrac{2}{x} - 3\right)\left(\dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{2}\right) - \left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{2}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3}\right) = 0$

Übung 2.2:4

a) Schreibe die Gleichung für die Gerade $y = 2x + 3$ auf der Form $ax + by = c$.

b) Schreibe die Gleichung für die Gerade $3x + 4y - 5 = 0$ in der Form $y = kx + m$.

Übung 2.2:5

a) Berechne die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte $(2, 3)$ und $(3, 0)$ geht.

b) Berechne die Gleichung der Geraden, die die Steigung -3 hat, und durch den Punkt $(1, -2)$ geht.

c) Berechne die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $(-1, 2)$ geht und parallel zur Geraden $y = 3x + 1$ ist.

d) Berechne die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $(2, 4)$ geht und rechtwinklig zur Geraden $y = 2x + 5$ ist.

e) Berechne die Steigung k für die Gerade, die die x-Achse im Punkt $(5, 0)$ kreuzt und die y-Achse im Punkt $(0, -8)$ kreuzt.

Übung 2.2:6

Berechne den Schnittpunkt der Geraden

a) $y = 3x + 5$ und der x-Achse

b) $y = -x + 5$ und der y-Achse

c) $4x + 5y + 6 = 0$ und der y-Achse

d) $x + y + 1 = 0$ und $x = 12$

e) $2x + y - 1 = 0$ und $y - 2x - 2 = 0$

Übung 2.2:7

Zeichne die Graphen der Geraden

a) $f(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = 2 - x$

c) $f(x) = 2$

Übung 2.2:8

Zeichne die Gebiete, die durch die folgenden Ungleichungen definiert werden

a) $y \geq x$

b) $y < 3x - 4$

c) $2x + 3y \leq 6$

Übung 2.2:9

Berechne die Fläche des Dreiecks, das

a) Ecken in den Punkten $(1,4)$, $(3,3)$ und $(1,0)$.

b) Begrenzt von den Geraden $x = 2y$, $y = 4$ und $y = 10 - 2x$.

c) Die Ungleichungen $x + y \geq -2$, $2x - y \leq 2$ und $2y - x \leq 2$ erfüllt.

2.3 Quadratische Gleichungen

Inhalt:

- Quadratische Ergänzung
- Quadratische Funktionen
- Faktorisierung
- Parabeln

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Quadratische Ergänzungen für quadratische Ausdrücke ausführen.
- Quadratische Gleichungen durch quadratische Ergänzung lösen und die Lösungen kontrollieren.
- Wenn möglich, eine quadratische Gleichung faktorisieren.
- Faktorisierte, oder fast faktorisierte quadratische Gleichungen direkt lösen.
- Den kleinsten und größten Wert eines quadratischen Ausdruckes finden.
- Parabeln zeichnen mittels quadratischer Ergänzung.

A - Quadratische Gleichungen

Eine quadratische Gleichung kann in der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

geschrieben werden, wobei x unbekannt ist, und p und q Konstanten sind.

Einfache quadratische Gleichungen kann man lösen, indem man die Wurzeln zieht.

Die einfache quadratische Gleichung $x^2 = a$ mit $a > 0$, hat zwei Lösungen, nämlich $x = \sqrt{a}$ und $x = -\sqrt{a}$.

Beispiel 1

a) $x^2 = 4$ hat die Lösungen $x = \sqrt{4} = 2$ und $x = -\sqrt{4} = -2$.

b) $2x^2 = 18$ kann man als $x^2 = 9$ schreiben, also gibt es die Lösungen $x = \sqrt{9} = 3$ und $x = -\sqrt{9} = -3$.

c) $3x^2 - 15 = 0$ kann man als $x^2 = 5$ schreiben, also gibt es die Lösungen $x = \sqrt{5} \approx 2{,}236$ und $x = -\sqrt{5} \approx -2{,}236$.

d) $9x^2 + 25 = 0$ hat keine (reelle) Lösung, weil die linke Seite der Gleichung immer größer als 25 ist (denn $x^2 \geq 0$). (Man kann diese Gleichung im Komplexen lösen und man erhält dann komplexe Lösungen.)

Beispiel 2

a) Löse die einfache quadratische Gleichung $(x-1)^2 = 16$.

Wir gehen genauso vor wie in Beispiel 1a und erhalten

- $x - 1 = \sqrt{16} = 4$ also $x = 1 + 4 = 5$,
- $x - 1 = -\sqrt{16} = -4$ also $x = 1 - 4 = -3$.

b) Löse die Gleichung $2(x+1)^2 - 8 = 0$.

Wir addieren 8 auf beiden Seiten der Gleichung und dividieren danach durch 2,

$$(x+1)^2 = 4.$$

Wir haben eine einfach quadratische Gleichung erhalten. Diese lösen wir, indem wir die Wurzel ziehen. Die Lösungen sind

- $x + 1 = \sqrt{4} = 2$, also $x = -1 + 2 = 1$,
- $x + 1 = -\sqrt{4} = -2$, also $x = -1 - 2 = -3$.

Um eine allgemeine quadratische Gleichung zu lösen, kann man das Prinzip der quadratischen Ergänzung oder die p-q-Formel benutzen. Wir erklären erst die quadratische Ergänzung an Beispielen und dann die p-q-Formel. Die p-q-Formel kann aus der quadratischen Ergänzung hergeleitet werden.

Die binomische Formel lautet

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2.$$

Subtrahieren wir a^2 von beiden Seiten, bekommen wir

Quadratische Ergänzung:

$$x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$$

und $(a+x)^2 = a^2$ ist eine einfache quadratische Gleichung, die wir durch Wurzelziehen lösen können.

Beispiel 3

a) Löse die Gleichung $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Wir benutzen die quadratische Ergänzung: $x^2 + 2x$ (hier ist also $a = 1$),

$$\underline{x^2 + 2x} - 8 = \underline{(x+1)^2 - 1^2} - 8 = (x+1)^2 - 9,$$

wo wir bei den unterstrichenen Termen die quadratische Ergänzung benutzt haben. Die Gleichung kann also wie

$$(x+1)^2 - 9 = 0,$$

geschrieben werden, und diese Gleichung hat die Lösungen

- $x + 1 = \sqrt{9} = 3\,,\quad$ also $\quad x = -1 + 3 = 2,$
- $x + 1 = -\sqrt{9} = -3\,,\quad$ also $\quad x = -1 - 3 = -4.$

b) Löse die Gleichung $2x^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0$.

Wir dividieren zuerst beide Seiten durch 2,

$$x^2 - x - \tfrac{3}{4} = 0.$$

Jetzt benutzen wir quadratische Ergänzung auf der linken Seite (mit $a = -\frac{1}{2}$),

$$\underline{x^2 - x} - \tfrac{3}{4} = \underline{\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} - \tfrac{3}{4} = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 1.$$

Dies ergibt die Gleichung

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$$

mit den Lösungen

- $x - \frac{1}{2} = \sqrt{1} = 1,\quad$ also $\quad x = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2},$
- $x - \frac{1}{2} = -\sqrt{1} = -1,\quad$ also $\quad x = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$

Hinweis:

Für jede gefundene Lösung können wir die Probe machen, indem wir die gefundene Lösung in die ursprüngliche Gleichung einsetzen. Im Beispiel 3a oben, haben wir zwei Lösungen zu prüfen:

- $x = 2$ ergibt: Linke Seite $= 2^2 + 2 \cdot 2 - 8 = 4 + 4 - 8 = 0 =$ Rechte Seite.
- $x = -4$ ergibt: Linke Seite $= (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 8 = 16 - 8 - 8 = 0 =$ Rechte Seite.

In beide Fällen erhalten wir linke Seite = rechte Seite. Also sind unsere Lösungen richtig.

Mit der quadratischen Ergänzung kann man eine generelle Lösungsformel für quadratische Gleichungen herleiten. Die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

hat die (rellen) Lösungen

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

solange der Ausdruck in der Wurzel nicht negativ ist.

Wir benutzen die quadratische Ergänzung mit $a = p/2$,

$$x^2 + px + q \;=\; x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \;=\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

Damit hat die allgemeine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die selben Lösungen wie die einfache quadratische Gleichung

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Die einfache quadratische Gleichung lösen wir durch das Ziehen der Wurzel.

Wir erhalten die beiden Lösungen

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

und damit hat man die p-q-Formel.

In manchen Fällen kann man eine quadratische Gleichung einfach faktorisieren, um die Lösungen zu erhalten.

Beispiel 4

a) Löse die Gleichung $x^2 - 4x = 0$.

Wir können die linke Seite faktorisieren, weil der Faktor x in allen Termen auftritt. Nach Anwendung des Distributivgesetzes

$$x(x-4) = 0.$$

Die linke Seite der Gleichung ist nur dann null, wenn einer ihrer Faktoren null ist:

- $x = 0$, oder
- $x - 4 = 0$. Dies ergibt die Lösungen $x = 4$.

B - Quadratische Funktionen

Die Funktionen

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x + 5, \\ y &= 4 - 3x^2 \quad \text{und} \\ y &= \tfrac{1}{5}x^2 + 3x \end{aligned}$$

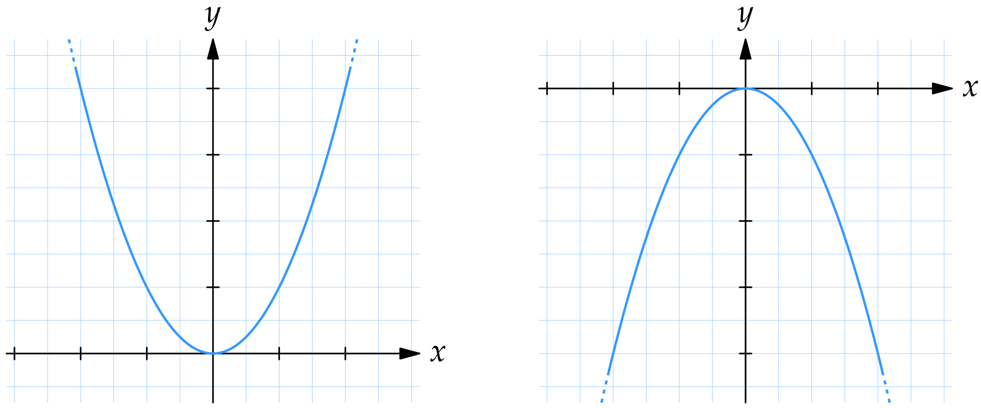
sind Beispiele von quadratischen Funktionen. Die allgemeine Formel für eine quadratische Funktion ist

$$y = ax^2 + bx + c,$$

wobei a, b und c Konstanten sind und $a \neq 0$.

Andere Schreibweisen für diese Funktionen sind $f(x) = ax^2 + bx + c$ oder $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Der Funktionsgraph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel. Folgende Zeichnungen zeigen zwei typische Parabeln, die Graphen von $y = x^2$ und $y = -x^2$.



Die linke Zeichnung zeigt die Parabel $y = x^2$ und die rechte Zeichnung zeigt die Parabel $y = -x^2$.

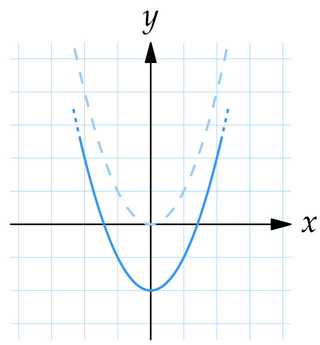
Weil der x^2-Term minimal ist, wenn $x = 0$, hat die Parabel $y = x^2$ ein Minimum in $x = 0$ und die Parabel $y = -x^2$ hat ein Maximum in $x = 0$.

Jede der beiden Parabeln oben ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, weil der Wert von x^2 derselbe ist, egal ob x positiv oder negativ ist.

Beispiel 5

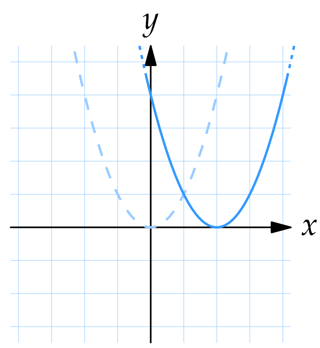
a) Zeichne die Parabel $y = x^2 - 2$.

Im Vergleich zur Parabel $y = x^2$ hat diese Parabel ($y = x^2 - 2$) einen y-Wert, der 2 Einheiten kleiner ist. Also schieben wir die Parabel $y = x^2$ einfach zwei Einheiten herunter.



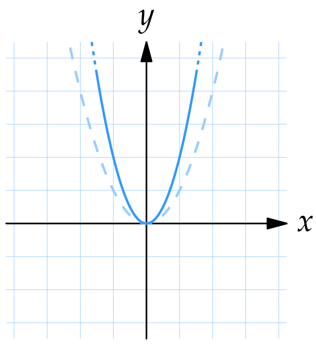
b) Zeichne die Parabel $y = (x - 2)^2$.

Für die Parabel $y = (x - 2)^2$ müssen wir den x-Wert um zwei Einheiten größer wählen als für die Parabel $y = x^2$, um denselben y-Wert zu bekommen. Also ist die Parabel $y = (x - 2)^2$, die Parabel $y = x^2$ zwei Einheiten nach rechts verschoben.



c) Zeichne die Parabel $y = 2x^2$.

Jeder Punkt auf der Parabel $y = 2x^2$ hat für denselben x-Wert einen zwei Mal so großen y-Wert als die Parabel $y = x^2$. Also müssen wir die Parabel $y = x^2$ um einen Faktor 2 in der y-Richtung vergrößern, um die Parabel $y = 2x^2$ zu bekommen.



Eine allgemeine Parabel kann einfach gezeichnet werden, indem man die quadratische Ergänzung verwendet.

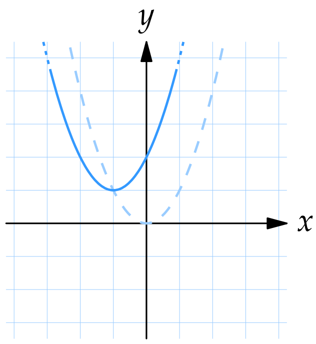
Beispiel 6

Zeichne die Parabel $y = x^2 + 2x + 2$.

Wenn wir die rechte Seite der Gleichung mit der quadratischer Ergänzung umschreiben, bekommen wir

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 - 1^2 + 2 = (x+1)^2 + 1$$

und sehen, dass die Parabel $y = (x+1)^2 + 1$ um eine Einheit nach links und um eine Einheit nach oben verschoben ist, im Vergleich zur Parabel $y = x^2$.



Beispiel 7

Bestimme den Schnittpunkt der Parabel $y = x^2 - 4x + 3$ mit der x-Achse.

Alle Punkte auf der x-Achse haben den y-Koordinaten 0. Die Punkte, die auf der Parabel und auch auf der x-Achse liegen, haben also die y-Koordinate 0 und erfüllen die Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Die quadratische Ergänzung ergibt

$$x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 2^2 + 3 = (x-2)^2 - 1$$

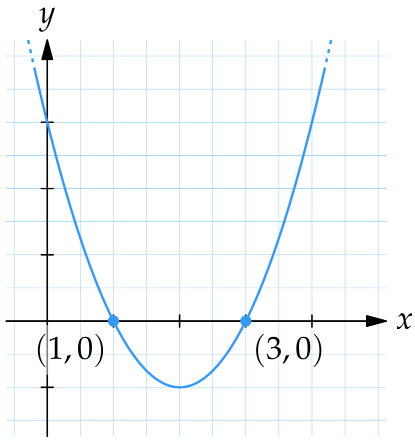
und schließlich

$$(x-2)^2 = 1.$$

Wir ziehen die Wurzel und erhalten die Lösungen

- $x-2=\sqrt{1}=1, \quad \text{also} \quad x=2+1=3,$
- $x-2=-\sqrt{1}=-1, \quad \text{also} \quad x=2-1=1.$

Die Schnittpunkte der x-Achse mit der Parabel $y = x^2 - 4x + 3$ sind $(1,0)$ und $(3,0)$.



Beispiel 8

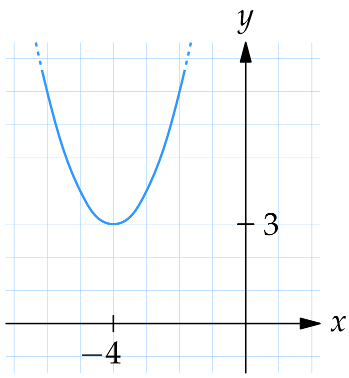
Bestimme den kleinsten Wert des Ausdruckes $x^2 + 8x + 19$.

Wir verwenden die quadratische Ergänzung

$$x^2 + 8x + 19 = (x+4)^2 - 4^2 + 19 = (x+4)^2 + 3$$

und sehen hier, dass der Ausdruck immer gleich oder größer als 3 ist, nachdem die Quadrate $(x+4)^2$ immer größer oder gleich 0 ist.

In der Zeichnung unten sehen wir, dass die Parabel $y = x^2 + 8x + 19$ oberhalb der x-Achse liegt und den kleinsten Wert 3 hat, wenn $x = -4$.



Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor

Tipps fürs Lernen

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung

Nachdem Du mit der Theorie und den Übungen fertig bist, solltest Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung machen. Du findest die Links zu den Prüfungen in Deiner „Student Lounge".

Bedenken Sie folgendes:
Nimm dir viel Zeit, um Algebra ordentlich zu lernen. Algebra ist das Alphabet der Mathematik, und kommt überall sonst in der Mathematik vor.

Literaturhinweise
Für die, die sich weiter mit der Materie beschäftigen wollen, sind hier einige Links angeführt:

- Mehr über Quadratische Gleichungen in der Wikipedia (`http://de.wikipedia.org/wiki/Quadratische_Gleichung`)
- Mehr über quadratische Gleichungen auf mathworld (engl.) (`http://mathworld.wolfram.com/QuadraticEquation.html`)
- 101 uses of a quadratic equation — von Chris Budd und Chris Sangwin (`http://plus.maths.org/issue29/features/quadratic/index-gifd.html`)

2.3 Übungen

Übung 2.3:1

Führe die quadratische Ergänzung für folgende Ausdrücke aus

a) x^2-2x b) x^2+2x-1 c) $5+2x-x^2$ d) x^2+5x+3

Übung 2.3:2

Löse folgende Gleichungen durch quadratische Ergänzung und durch Anwendung der p-q-Formel.

a) $x^2-4x+3=0$ b) $y^2+2y-15=0$ c) $y^2+3y+4=0$

d) $4x^2-28x+13=0$ e) $5x^2+2x-3=0$ f) $3x^2-10x+8=0$

Übung 2.3:3

Löse folgende Gleichungen direkt

a) $x(x+3)=0$ b) $(x-3)(x+5)=0$

c) $5(3x-2)(x+8)=0$ d) $x(x+3)-x(2x-9)=0$

e) $(x+3)(x-1)-(x+3)(2x-9)=0$ f) $x(x^2-2x)+x(2-x)=0$

Übung 2.3:4

Bestimme eine quadratische Funktion, die folgende Nullstellen hat

a) -1 und 2

b) $1+\sqrt{3}$ und $1-\sqrt{3}$

c) 3 und $\sqrt{3}$

Übung 2.3:5

a) Bestimme eine quadratische Funktion, die nur die Nullstelle -7 hat.

b) Bestimme einen x-Wert, der den Ausdruck $4x^2-28x+48$ negativ macht.

c) Die Gleichung $x^2+4x+b=0$ hat eine Nullstelle $x=1$. Bestimme die Konstante b.

Übung 2.3:6

Bestimme den kleinsten Wert der folgenden Ausdrücke.

a) x^2-2x+1 b) x^2-4x+2 c) x^2-5x+7

Übung 2.3:7

Bestimme den grössten Wert der folgenden Ausdrücke.

a) $1 - x^2$ b) $-x^2 + 3x - 4$ c) $x^2 + x + 1$

Übung 2.3:8

Zeichne die Parabeln

a) $f(x) = x^2 + 1$ b) $f(x) = (x-1)^2 + 2$ c) $f(x) = x^2 - 6x + 11$

Übung 2.3:9

Finde die Schnittpunkte der x-Achse mit den folgenden Funktionen.

a) $y = x^2 - 1$ b) $y = x^2 - 5x + 6$ c) $y = 3x^2 - 12x + 9$

Übung 2.3:10

Zeichne das Gebiet definiert durch folgende Ungleichungen.

a) $y \geq x^2$ und $y \leq 1$ b) $y \leq 1 - x^2$ und $x \geq 2y - 3$

c) $1 \geq x \geq y^2$ d) $x^2 \leq y \leq x$

3.1 Wurzeln

Inhalt:

- Quadratische und allgemeine Wurzeln
- Wurzelausdrücke

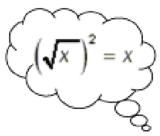
Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Die Quadratwurzel von kleinen ganzen Zahlen berechnen.
- Wissen, dass die Quadratwurzel nicht für negative Zahlen definiert ist.
- Wissen, dass die Quadratwurzel immer nicht-negativ ist.
- Wurzelausdrücke vereinfachen.
- Wissen, welche Vereinfachungen von Wurzeln gültig sind.
- Wissen, wann die n-te Wurzel von negativen Zahlen definiert ist.

A - Quadratwurzeln

Das schon bekannte Symbol $\sqrt{a}$ bezeichnet die Quadratwurzel einer positiven Zahl a, mit anderen Worten diejenige, die mit sich selbst multipliziert, a ergibt. Es gibt aber eine genauere Definition der Quadratwurzel.



Der Ausdruck $x^2 = 4$ hat wie bekannt zwei Wurzeln, $x = 2$ und $x = -2$, da $2 \cdot 2 = 4$ und $(-2) \cdot (-2) = 4$. Daher scheint es natürlich, dass $\sqrt{4}$ entweder -2 oder 2, also $\sqrt{4} = \pm 2$. Dies ist aber nicht der Fall, sondern $\sqrt{4}$ bezeichnet nur die positive Wurzel 2.

Die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ ist die **nicht negative** Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt, also die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$. Es gilt also $\sqrt{x^2} = |x|$.

Die Quadratwurzel von a kann auch als $a^{1/2}$ geschrieben werden.

Deshalb ist es falsch, $\sqrt{4} = \pm 2$, zu schreiben, aber richtig, dass die Gleichung $x^2 = 4$ die Wurzeln (Lösungen) $x = \pm 2$ hat.

Beispiel 1

a) $\sqrt{0} = 0$ nachdem $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ und 0 nicht negativ ist.

b) $\sqrt{100} = 10$ nachdem $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$ und 10 eine positive Zahl ist.

c) $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ nachdem $0{,}5^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ und 0,5 eine positive Zahl ist.

d) $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ nachdem $1{,}4142 \cdot 1{,}4142 \approx 2$ und 1,4142 positiv ist.

e) Die Gleichung $x^2 = 2$ hat die Wurzeln (Lösungen) $x = \sqrt{2} \approx 1{,}414$ und $x = -\sqrt{2} \approx -1{,}414$.

f) $\sqrt{-4}$ ist nicht definiert, nachdem es keine reelle Zahl x gibt, die, die Gleichung $x^2 = -4$ erfüllt.

g) $\sqrt{(-7)^2} = 7$ nachdem $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{(-7) \cdot (-7)} = \sqrt{49} = \sqrt{7 \cdot 7} = 7$.

Nachdem die Quadratwurzel von a auch als $\sqrt{a} = a^{1/2}$ geschrieben werden kann, gelten die Rechenregeln für Potenzen auch für Wurzeln. Zum Beispiel haben wir

$$\sqrt{9 \cdot 4} = (9 \cdot 4)^{1/2} = 9^{1/2} \cdot 4^{1/2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4}.$$

Auf diese Weise können wir folgende Rechenregeln herleiten, die für alle reellen Zahlen $a, b \geq 0$ gelten.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$

(Bei der Division darf b natürlich nicht Null sein.)

Beispiel 2

a) $\sqrt{64 \cdot 81} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{81} = 8 \cdot 9 = 72$

b) $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$

c) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6$

d) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

e) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Wir müssen beachten, dass die Rechenregeln nur gelten, wenn $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Wenn a und b beide negativ sind, sind die Wurzeln $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ nicht definiert (zumindest nicht als reelle Zahlen). Deshalb kann man zum Beispiel nicht

$$-1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

schreiben. Und zwar deshalb, weil $\sqrt{-1}$ keine reelle Zahl ist und die Rechenregeln für Wurzeln daher nicht definiert sind.

B - Allgemeine Wurzeln

Die Kubikwurzel von a wird durch die Zahl definiert, die mit sich selbst drei Mal multipliziert a ergibt, und wird $\sqrt[3]{a}$ geschrieben.

Beispiel 3

a) $\sqrt[3]{8} = 2$ nachdem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

b) $\sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$ nachdem $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}027$.

c) $\sqrt[3]{-8} = -2$ nachdem $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Zum Unterschied von Quadratwurzeln sind Kubikwurzeln auch für negative Zahlen definiert.

Für jede positive Zahl n kann man die n-te Wurzel definieren:

- Wenn n gerade und $a \geq 0$ ist, ist $\sqrt[n]{a}$ die nicht negative Zahl, die hoch n a ergibt,
- Wenn n ungerade ist, ist $\sqrt[n]{a}$ die Zahl, die hoch n a ergibt,

Die Wurzel $\sqrt[n]{a}$ kann auch als $a^{1/n}$ geschrieben werden.

Beispiel 4

a) $\sqrt[4]{625} = 5$ nachdem $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

b) $\sqrt[5]{-243} = -3$ nachdem $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$.

c) $\sqrt[6]{-17}$ ist nicht definiert, nachdem 6 gerade ist und -17 negativ ist.

Für die n-te Wurzel gelten dieselben Rechenregeln wir für die Quadratwurzel, falls $a, b \geq 0$. Falls n ungerade ist, gelten die Regeln auch für negative a und b, also für alle reellen Zahlen a und b.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

(Bei der Division darf b natürlich nicht Null sein.)

C - Vereinfachungen von Wurzelausdrücken

Oft können Ausdrücke, die Wurzeln enthalten, wesentlich vereinfacht werden. Generell will man einen Ausdruck mit so kleinen Wurzeln wie möglich erhalten. Zum Beispiel ist die folgende Vereinfachung sinnvoll,

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

und ähnlich für die Division:

$$\frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Indem man Ausdrücke mit mehreren Termen Term für Term vereinfacht, kann man Terme mit derselben Wurzel addieren,

$$\sqrt{8} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2+1)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Beispiel 5

a) $$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2\cdot 4}}{\sqrt{2\cdot 9}} = \frac{\sqrt{2\cdot 2\cdot 2}}{\sqrt{2\cdot 3\cdot 3}} = \frac{\sqrt{2\cdot 2^2}}{\sqrt{2\cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$$

b) $$\frac{\sqrt{72}}{6} = \frac{\sqrt{8\cdot 9}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 2}}{2\cdot 3} = \frac{2\cdot 3\sqrt{2}}{2\cdot 3} = \sqrt{2}$$

c) $$\begin{aligned}\sqrt{45}+\sqrt{20} &= \sqrt{9\cdot 5}+\sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{3^2\cdot 5}+\sqrt{2^2\cdot 5} = 3\sqrt{5}+2\sqrt{5}\\ &= (3+2)\sqrt{5} = 5\sqrt{5}\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\sqrt{50}+2\sqrt{3}-\sqrt{32}+\sqrt{27} &= \sqrt{5\cdot 10}+2\sqrt{3}-\sqrt{2\cdot 16}+\sqrt{3\cdot 9}\\ &= \sqrt{5\cdot 2\cdot 5}+2\sqrt{3}-\sqrt{2\cdot 4\cdot 4}+\sqrt{3\cdot 3\cdot 3}\\ &= \sqrt{5^2\cdot 2}+2\sqrt{3}-\sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 2}+\sqrt{3\cdot 3^2}\\ &= 5\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\cdot 2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\\ &= (5-4)\sqrt{2}+(2+3)\sqrt{3}\\ &= \sqrt{2}+5\sqrt{3}\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}\frac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{12}} &= \frac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3\cdot 4}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2\cdot 2}}\\ &= \frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

f) $$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2 = 3-2 = 1$$

Wo wir die binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ mit $a=\sqrt{3}$ und $b=\sqrt{2}$ benutzt haben.

D - Rationale Wurzelausdrücke

Wenn man rationale Wurzelausdrücke vereinfacht, will man so weit wie möglich Wurzeln im Nenner vermeiden. Im folgenden Fall können wir den Bruch zum Beispiel mit $\sqrt{2}$ erweitern,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dieser Ausdruck ist viel einfacher zu berechnen oder zu schätzen als der vorherige.

Wenn der Nenner aus zwei Wurzeln besteht, kann man die binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ benutzen, um den Bruch zu vereinfachen. Indem man den Bruch mit dem konjugierten Nenner erweitert, erhält man immer einen Bruch ohne Wurzeln im Nenner,

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot 1}{(\sqrt{2}\,)^2-1^2} = \frac{\sqrt{3\cdot 2}-\sqrt{3}}{2-1} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{1} = \sqrt{6}-\sqrt{3}.$$

Beispiel 6

a) $\dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{15}}{5} = 2\sqrt{15}$

b) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-2} = \dfrac{3(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)} = \dfrac{3\sqrt{2}+6}{(\sqrt{2}\,)^2-2^2} = \dfrac{3\sqrt{2}+6}{2-4} = -\dfrac{3\sqrt{2}+6}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}\,(\sqrt{6}-\sqrt{3}\,)}{(\sqrt{6}+\sqrt{3}\,)(\sqrt{6}-\sqrt{3}\,)} = \dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{6}-\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{(\sqrt{6}\,)^2-(\sqrt{3}\,)^2}$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{2\cdot 3}-\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{6-3} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{3} = \frac{(2-\sqrt{2}\,)\sqrt{3}}{3}$$

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

Tipps fürs Lernen

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung
Nachdem du mit der Theorie und den Übungen fertig bist, solltest Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung machen. Du findest die Links zu den Prüfungen in Deiner „Student Lounge“.

Bedenken Sie folgendes:
Die Quadratwurzel ist immer nicht-negativ, das heißt, positiv oder null.

Die Rechenregeln für Wurzeln sind nur Spezialfälle der Rechenregeln für Potenzen. Zum Beispiel: $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

Literaturhinweise
Für die, die sich genauer mit der Materie beschäftigen wollen, sind hier einige Links angeführt:

- Mehr über Wurzeln in der Wikipedia
  (`http://de.wikipedia.org/wiki/Wurzel_(Mathematik)`)
- Warum wissen wir, dass Wurzel 2 kein Bruch ist? (engl.)
  (`http://www.mathacademy.com/pr/prime/articles/irr2/`)

Nützliche Websites

- Wie findet man die Wurzel einer Zahl ohne Taschenrechner? (engl.)
  (`http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.sqrt.by.hand.html`)

3.1 Übungen

Übung 3.1:1

Schreibe folgende Ausdrücke als Potenzen

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{7^5}$ c) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^4$ d) $\sqrt{\sqrt{3}}$

Übung 3.1:2

Vereinfache so weit wie möglich

a) $\sqrt{3^2}$ b) $\sqrt{(-3)^2}$ c) $\sqrt{-3^2}$ d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot 5$

e) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}$ f) $\sqrt[3]{8}$ g) $\sqrt[3]{-125}$

Übung 3.1:3

Vereinfache so weit wie möglich

a) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$ b) $\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{18}}$

c) $\sqrt{16 + \sqrt{16}}$ d) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)$

Übung 3.1:4

Vereinfache so weit wie möglich

a) $\sqrt{0{,}16}$ b) $\sqrt[3]{0{,}027}$

c) $\sqrt{50} + 4\sqrt{20} - 3\sqrt{18} - 2\sqrt{80}$ d) $\sqrt{48} + \sqrt{12} + \sqrt{3} - \sqrt{75}$

Übung 3.1:5

Schreibe folgende Ausdrücke ohne Wurzeln im Nenner

a) $\dfrac{2}{\sqrt{12}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}$ c) $\dfrac{2}{3 + \sqrt{7}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{17} - \sqrt{13}}$

Übung 3.1:6

Schreibe folgende Ausdrücke ohne Wurzeln im Nenner

a) $\dfrac{\sqrt{2} + 3}{\sqrt{5} - 2}$ b) $\dfrac{1}{(\sqrt{3} - 2)^2 - 2}$

c) $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$

Übung 3.1:7

Vereinfache so weit wie möglich

a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{5\sqrt{7}-7\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{153}-\sqrt{68}$

Übung 3.1:8

Bestimme, welche der Zahlen am größten sind

a) $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt[3]{6}$

b) $\sqrt{7}$ und 7

c) $\sqrt{7}$ und $2{,}5$

d) $\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{3}\right)^3$ und $\sqrt[3]{2}\cdot 3$

3.2 Wurzelgleichungen

Inhalt:

- Gleichungen auf der Form $\sqrt{ax+b} = cx + d$
- Scheinlösungen

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Einfache Wurzelgleichungen durch Quadrieren lösen.
- Scheinlösungen erkennen.

A - Gleichungen mit Wurzeln

Es gibt viele verschiedene Arten von Wurzelgleichungen, zum Beispiel:

$$\sqrt{x} + 3x = 2,$$
$$\sqrt{x-1} - 2x = x^2,$$
$$\sqrt[3]{x+2} = x.$$

Um Wurzelgleichungen zu lösen, vereinfacht man die Gleichung zuerst, sodass die Wurzeln nur auf einer Seite der Gleichung vorkommen. Danach quadriert man die Gleichung (im Fall, wo wir Quadratwurzeln haben) und löst die quadratische Gleichung, die daraus entsteht. Bei diesem Schritt muss man aber bedenken, dass die Lösungen der quadratischen Gleichung nicht unbedingt auch Lösungen der Wurzelgleichung sind. Nachdem positive und negative Zahlen nach dem Quadrieren positiv werden, entstehen sogenannte Scheinlösungen, welche die quadrierte Gleichung lösen, nicht aber die ursprüngliche Gleichung.

Beispiel 1

Wir betrachten folgende einfache Gleichung:

$$x = 2.$$

Wenn wir beide Seiten der Gleichung quadrieren, erhalten wir

$$x^2 = 4.$$

Die neue Gleichung hat die Lösungen $x = 2$ und $x = -2$. Die Lösung $x = 2$ erfüllt die ursprüngliche Gleichung, während die Lösung $x = -2$ die ursprüngliche Gleichung nicht löst. Die Lösung $x = -2$ ist also eine Scheinlösung, die durch das Quadrieren der ursprünglichen Gleichung entstand.

Beispiel 2

Löse die Gleichung $2\sqrt{x-1} = 1 - x$.

Wir quadrieren die Gleichung auf beiden Seiten und erhalten

$$4(x-1) = (1-x)^2.$$

Wir multiplizieren die rechte Seite aus (binomischen Formel),

$$4(x-1) = 1 - 2x + x^2.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung, die wir als

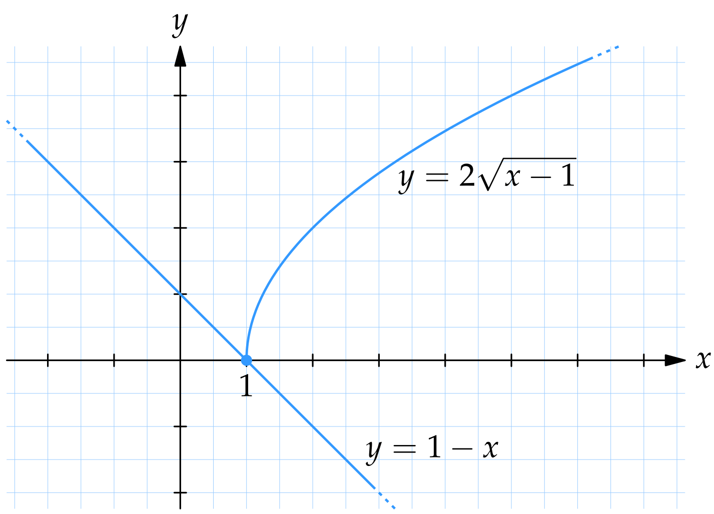
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

schreiben können. Diese Gleichung lösen wir mit quadratischer Ergänzung oder mit der allgemeinen Lösungsformel. Die Lösungen sind $x = 3 \pm 2$, also $x = 1$ und $x = 5$.

Nachdem wir die ursprüngliche Gleichung quadriert haben, besteht das Risiko, dass Scheinlösungen entstanden sind. Wir müssen daher testen, ob die beiden Lösungen die ursprüngliche Gleichung erfüllen

- $x = 1$ gibt: Linke Seite $= 2\sqrt{1-1} = 0$ und Rechte Seite $= 1 - 1 = 0$. Also Linke Seite $=$ Rechte Seite und die Gleichung ist erfüllt.
- $x = 5$ gibt: Linke Seite $= 2\sqrt{5-1} = 2 \cdot 2 = 4$ und Rechte Seite $= 1 - 5 = -4$. Also Linke Seite $\neq$ Rechte Seite und die Gleichung ist nicht erfüllt.

Die Gleichung hat daher nur die eine Lösung $x = 1$.



Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

Tipps fürs Lernen

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung
Nachdem du mit der Theorie und den Übungen fertig bist, solltest Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung machen. Du findest die Links zu den Prüfungen in Deiner „Student Lounge“.

Bedenken Sie folgendes:
Wenn man eine Gleichung quadriert, können Scheinlösungen entstehen, weil eventuelle negative Ausdrücke positiv werden. Deshalb sind die Lösungen der quadrierten Gleichung nicht unbedingt Lösungen der ursprünglichen Gleichung.

Du solltest immer testen, ob Deine Lösungen die ursprüngliche Gleichung erfüllen.

Literaturhinweise
Für die, die tiefer in die Materie einsteigen wollen, sind hier einige Links angeführt:

- Understanding Algebra - ein englischer Text im Web (`http://www.jamesbrennan.org/algebra/`)

Nützliche Websites

- Was ist die Wurzel aus – ? Webmath.com hilft Quadratwurzeln zu vereinfachen (eng.) (`http://www.webmath.com/simpsqrt.html`)

3.2 Übungen

Übung 3.2:1

Löse die Gleichung $\sqrt{x-4} = 6 - x$.

Übung 3.2:2

Löse die Gleichung $\sqrt{2x+7} = x + 2$.

Übung 3.2:3

Löse die Gleichung $\sqrt{3x-8} + 2 = x$.

Übung 3.2:4

Löse die Gleichung $\sqrt{1-x} = 2 - x$.

Übung 3.2:5

Löse die Gleichung $\sqrt{3x-2} = 2 - x$.

Übung 3.2:6

Löse die Gleichung $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+5} = 4$.

3.3 Logarithmen

Inhalt:

- Logarithmen
- Die Logarithmengesetze

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Mit Basen und Exponenten rechnen.
- Die Bedeutung der Ausdrücke ln, lg, log und $\log_a$ kennen.
- Einfache Logarithmen mit der Definition des Logarithmus berechnen.
- Wissen, dass Logarithmen nur für positive Zahlen definiert sind.
- Die Bedeutung der Zahl e kennen.
- Die Logarithmengesetze verwenden, um logarithmische Ausdrücke zu vereinfachen.
- Wissen, wann die Logarithmengesetze gültig sind.
- Basis von Logarithmen ändern.

A - Logarithmus zur Basis 10

Oft verwendet man Potenzen mit der Basis 10, um große Zahlen zu schreiben, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} 10^3 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000, \\ 10^{-2} &= \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100} = 0{,}01. \end{aligned}$$

Wenn man den Exponenten betrachten, sieht man, dass:

> „der Exponent von 1000 3 ist“, oder dass
> „der Exponent von 0,01 -2 ist“.

Genauso wird der *Logarithmus* definiert. Formaler geschrieben haben wir:

> „*Der Logarithmus* von 1000 ist 3“. Dies schreibt man $\lg 1000 = 3$,
> „*Der Logarithmus* von 0,01 ist -2“. Dies schreibt man $\lg 0{,}01 = -2$.

Allgemeiner gilt folgendes:

> Der Logarithmus einer Zahl y wird $\lg y$ genannt und ist der Exponent, der die Gleichung
>
> $$10^{\quad} = y$$
>
> erfüllt.

Die Zahl y muss eine positive Zahl sein, damit der Logarithmus $\lg y$ definiert sein soll, nachdem eine Potenz mit einer positiven Basis (wie 10) immer positiv ist.

Beispiel 1

a) $\lg 100000 = 5$ denn $10^{5} = 100\,000$.

b) $\lg 0{,}0001 = -4$ denn $10^{-4} = 0{,}0001$.

c) $\lg \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ denn $10^{1/2} = \sqrt{10}$.

d) $\lg 1 = 0$ denn $10^{0} = 1$.

e) $\lg 10^{78} = 78$ denn $10^{78} = 10^{78}$.

f) $\lg 50 \approx 1{,}699$ denn $10^{1{,}699} \approx 50$.

g) $\lg(-10)$ existiert nicht, da 10^{a} nie -10 werden kann, egal wie man a wählt.

Im Beispiel oben kann man leicht sehen, dass $\lg 50$ zwischen 1 und 2 liegen muss, nachdem $10^1 < 50 < 10^2$. Um einen genaueren Wert von $\lg 50 = 1{,}69897\ldots$ zu erhalten, braucht man aber einen Taschenrechner.

Beispiel 2

a) $10^{\lg 100} = 100$

b) $10^{\lg a} = a$

c) $10^{\lg 50} = 50$

B - Verschiedene Basen

Man kann auch Logarithmen für andere Basen als 10 definieren (außer die Basis 1). In diesem Fall muss man aber deutlich zeigen, welche Zahl die Basis ist. Wenn man zum Beispiel die Basis 2 benutzt, schreibt man $\log_2$ und dies bedeutet „der Logarithmus zur Basis 2“.

Beispiel 3

a) $\log_2 8 = 3 \quad \text{denn } 2^{3} = 8.$

b) $\log_2 2 = 1 \quad \text{denn } 2^{1} = 2.$

c) $\log_2 1024 = 10 \quad \text{denn } 2^{10} = 1024.$

d) $\log_2 \frac{1}{4} = -2 \quad \text{denn } 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$

Die Rechnungen mit anderen Basen als 2 sind ganz ähnlich.

Beispiel 4

a) $\log_3 9 = 2 \quad \text{denn } 3^{2} = 9.$

b) $\log_5 125 = 3 \quad \text{denn } 5^{3} = 125.$

c) $\log_4 \frac{1}{16} = -2 \quad \text{denn } 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$

d) $\log_b \frac{1}{\sqrt{b}} = -\frac{1}{2} \quad \text{denn } b^{-1/2} = \frac{1}{b^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$ (wenn $b > 0$ und $b \neq 1$).

Wenn man zur Basis 10 rechnet, schreibt man selten $\log_{10}$, sondern man schreibt ganz einfach lg oder log.

C - Der natürliche Logarithmus

Die zwei am häufigsten verwendeten Logarithmen sind die mit der Basis 10, und der Zahl e ($\approx 2{,}71828\ldots$). Die Logarithmen zur Basis e werden *natürliche Logarithmen* genannt. Statt $\log_e$ schreibt man ln, wenn man natürliche Logarithmen berechnet.

Beispiel 5

a) $\ln 10 \approx 2{,}3$ denn $e^{\boxed{2{,}3}} \approx 10$.

b) $\ln e = 1$ denn $e^{\boxed{1}} = e$.

c) $\ln \frac{1}{e^3} = -3$ denn $e^{\boxed{-3}} = \frac{1}{e^3}$.

d) $\ln 1 = 0$ denn $e^{\boxed{0}} = 1$.

e) Wenn $y = e^a$ dann ist $a = \ln y$.

f) $e^{\boxed{\ln 5}} = 5$

g) $e^{\boxed{\ln x}} = x$

Die meisten guten Taschenrechner können 10-Logarithmen und natürliche Logarithmen berechnen.

D - Logarithmengesetze

In den Jahren 1617–1624 veröffentlichte Henry Biggs eine Tabelle mit allen Logarithmen der Zahlen bis zu 20000, und im Jahr 1628 erweiterte Adriaan Vlacq die Tabelle mit Zahlen bis zu 100000. Der Grund dieser Riesenarbeit war, dass man statt zwei Zahlen zu multiplizieren, die Logarithmen der beiden Zahlen addieren kann und danach die Zahl aus dem Logarithmus berechnen kann (dies ist viel effektiver als die Zahlen direkt zu multiplizieren).

Beispiel 6

Berechnen Sie $35 \cdot 54$.

Wenn wir wissen, dass $35 \approx 10^{1{,}5441}$ und $54 \approx 10^{1{,}7324}$ (also $\lg 35 \approx 1{,}5441$ und $\lg 54 \approx 1{,}7324$), können wir das Produkt einfach berechnen:

$$35 \cdot 54 \approx 10^{1{,}5441} \cdot 10^{1{,}7324} = 10^{1{,}5441+1{,}7324} = 10^{3{,}2765}.$$

Wenn wir auch wissen, dass $10^{3{,}2765} \approx 1890$ (also $\lg 1890 \approx 3{,}2765$) haben wir es geschafft, das Produkt

$$35 \cdot 54 = 1890$$

nur mit Addition der Exponenten 1,5441 und 1,7324 zu berechnen.

Dies ist ein Beispiel der Logarithmengesetze, nämlich

$$\log(ab) = \log a + \log b.$$

Dies kommt von den Rechenregeln für Potenzen. Einerseits haben wir

$$a \cdot b = 10^{\log a} \cdot 10^{\log b} = 10^{\log a + \log b}$$

aber anderseits haben wir auch

$$a \cdot b = 10^{\log(ab)}.$$

Mit den Rechenregeln für Potenzen kann man ähnlich folgende Logarithmengesetze herleiten:

$$\begin{aligned} \log(ab) &= \log a + \log b, \\ \log \frac{a}{b} &= \log a - \log b, \\ \log a^b &= b \cdot \log a. \end{aligned}$$

Die Logarithmengesetze gelten unabhängig von der Basis.

Beispiel 7

a) $\lg 4 + \lg 7 = \lg(4 \cdot 7) = \lg 28$

b) $\lg 6 - \lg 3 = \lg \frac{6}{3} = \lg 2$

c) $2 \cdot \lg 5 = \lg 5^2 = \lg 25$

d) $\lg 200 = \lg(2 \cdot 100) = \lg 2 + \lg 100 = \lg 2 + 2$

Beispiel 8

a) $\lg 9 + \lg 1000 - \lg 3 + \lg 0{,}001 = \lg 9 + 3 - \lg 3 - 3 = \lg 9 - \lg 3 = \lg \frac{9}{3} = \lg 3$

b) $\ln\frac{1}{e} + \ln\sqrt{e} = \ln\Big(\frac{1}{e}\cdot\sqrt{e}\Big) = \ln\Big(\frac{1}{(\sqrt{e})^2}\cdot\sqrt{e}\Big) = \ln\frac{1}{\sqrt{e}}$

$$= \ln e^{-1/2} = -\tfrac{1}{2}\cdot\ln e = -\tfrac{1}{2}\cdot 1 = -\tfrac{1}{2}$$

c)
$$\begin{aligned}
\log_2 36 - \tfrac{1}{2}\log_2 81 &= \log_2(6\cdot 6) - \tfrac{1}{2}\log_2(9\cdot 9)\\
&= \log_2(2\cdot 2\cdot 3\cdot 3) - \tfrac{1}{2}\log_2(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)\\
&= \log_2(2^2\cdot 3^2) - \tfrac{1}{2}\log_2(3^4)\\
&= \log_2 2^2 + \log_2 3^2 - \tfrac{1}{2}\log_2 3^4\\
&= 2\log_2 2 + 2\log_2 3 - \tfrac{1}{2}\cdot 4\log_2 3\\
&= 2\cdot 1 + 2\log_2 3 - 2\log_2 3 = 2
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
\lg a^3 - 2\lg a + \lg\frac{1}{a} &= 3\lg a - 2\lg a + \lg a^{-1}\\
&= (3-2)\lg a + (-1)\lg a = \lg a - \lg a = 0
\end{aligned}$$

E - Basis ändern

Manchmal will man Logarithmen in einer Basis als Logarithmen in einer anderen Basis schreiben.

Beispiel 9

a) Schreibe $\lg 5$ als einen natürlichen Logarithmus.

Laut Definition ist $\lg 5$ die Zahl, die die Gleichung

$$10^{\lg 5} = 5$$

erfüllt. Indem wir den natürlichen Logarithmus von beiden Seiten berechnen, erhalten wir

$$\ln 10^{\lg 5} = \ln 5.$$

Mit dem Logarithmengesetz $\ln a^b = b\ln a$ schreiben wir die linke Seite wie $\lg 5\cdot\ln 10$ und bekommen die Gleichung

$$\lg 5\cdot\ln 10 = \ln 5.$$

Division durch $\ln 10$ ergibt die Antwort

$$\lg 5 = \frac{\ln 5}{\ln 10} \qquad (\approx 0{,}699\,,\quad \text{also ist } 10^{0{,}699}\approx 5).$$

b) Schreibe den 2-Logarithmus von 100 als einen 10-Logarithmus, lg.

Laut Definition des Logarithmus steht fest, dass $\log_2 100$ die Gleichung

$$2^{\log_2 100} = 100$$

erfüllt. Wir logarithmieren beide Seiten (mit dem 10-Logarithmus) und erhalten

$$\lg 2^{\log_2 100} = \lg 100.$$

Nachdem $\lg a^b = b \lg a$, erhalten wir $\lg 2^{\log_2 100} = \log_2 100 \cdot \lg 2$ und die rechte Seite ist einfach $\lg 100 = 2$. Dies gibt die Gleichung

$$\log_2 100 \cdot \lg 2 = 2.$$

Mit Division durch $\lg 2$ ergibt sich, dass

$$\log_2 100 = \frac{2}{\lg 2} \qquad (\approx 6{,}64\,, \quad \text{also ist } 2^{6{,}64} \approx 100).$$

Die allgemeine Formel, um die Basis von a zu b in Logarithmen zu ändern, lautet

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Wenn wir zum Beispiel 2^5 zur Basis 10 schreiben möchten, schreiben wir zuerst 2 zur Basis 10,

$$2 = 10^{\lg 2},$$

und verwenden die Rechenregeln für Potenzen,

$$2^5 = (10^{\lg 2})^5 = 10^{5 \cdot \lg 2} \quad (\approx 10^{1{,}505}\,).$$

Beispiel 10

a) Schreibe 10^x zur natürlichen Basis e.

Zuerst schreiben wir 10 zur Basis e,

$$10 = e^{\ln 10},$$

und verwenden die Rechenregeln für Potenzen,

$$10^x = (e^{\ln 10})^x = e^{x \cdot \ln 10} \approx e^{2{,}3x}.$$

b) Schreibe e^a zur Basis 10.

Die Zahl e kann wie $e = 10^{\lg e}$ geschrieben, und daher ist

$$e^a = (10^{\lg e})^a = 10^{a \cdot \lg e} \approx 10^{0{,}434a}.$$

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor

Tipps fürs Lernen

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung
Nachdem du mit der Theorie und den Übungen fertig bist, solltest Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung machen. Du findest die Links zu den Prüfungen in Deiner „Student Lounge“.

Bedenke folgendes:
Lerne die Logarithmengesetze ordentlich.

Viele StudentenInnen an den Universitäten haben Schwierigkeiten mit den Logarithmengesetzen.

Literaturhinweise
Für die, die tiefer in die Materie einsteigen wollen, sind hier einige Links angeführt:

- Mehr über Logarithmen in der Wikipedia
(`http://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmus`)
- Mehr über die Zahl e im „The MacTutor History of Mathematics“ Archiv (engl.)
(`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/e.html`)

Nützliche Websites

- Experimente mit Logarithmen und Potenzen (engl.)
(`http://www.ltcconline.net/greenl/java/IntermedCollegeAlgebra/LogGraph/logGraph.html`)
- Spiel logarithmus Memory (engl.)
(`http://www.ltcconline.net/greenl/java/IntermedCollegeAlgebra/LogConcentration/LogConcentration.htm`)

- Hilf dem Frosch auf seine Seerose im „log"-Spiel (engl.) (`http://www.ltcconline.net/greenl/java/IntermedCollegeAlgebra/logger.htm`)

3.3 Übungen

Übung 3.3:1

Was ist x wenn

a) $10^x = 1\,000$

b) $10^x = 0{,}1$

c) $\dfrac{1}{10^x} = 100$

d) $\dfrac{1}{10^x} = 0{,}000\,1$

Übung 3.3:2

Berechne

a) $\lg 0{,}1$

b) $\lg 10\,000$

c) $\lg 0{,}001$

d) $\lg 1$

e) $10^{\lg 2}$

f) $\lg 10^3$

g) $10^{-\lg 0{,}1}$

h) $\lg \dfrac{1}{10^2}$

Übung 3.3:3

Berechne

a) $\log_2 8$

b) $\log_9 \dfrac{1}{3}$

c) $\log_2 0{,}125$

d) $\log_3 \left(9 \cdot 3^{1/3}\right)$

e) $2^{\log_2 4}$

f) $\log_2 4 + \log_2 \dfrac{1}{16}$

g) $\log_3 12 - \log_3 4$

h) $\log_a \left(a^2 \sqrt{a}\,\right)$

Übung 3.3:4

Vereinfache

a) $\lg 50 - \lg 5$

b) $\lg 23 + \lg \dfrac{1}{23}$

c) $\lg 27^{1/3} + \dfrac{\lg 3}{2} + \lg \dfrac{1}{9}$

Übung 3.3:5

Vereinfache

a) $\ln e^3 + \ln e^2$

b) $\ln 8 - \ln 4 - \ln 2$

c) $(\ln 1) \cdot e^2$

d) $\ln e - 1$

e) $\ln \dfrac{1}{e^2}$

f) $\left(e^{\ln e}\right)^2$

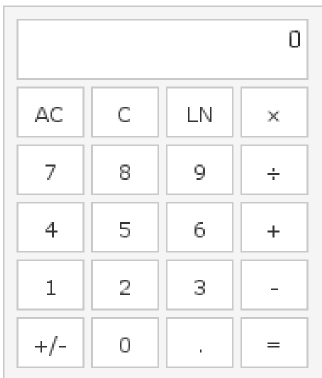
Übung 3.3:6

Verwende den Taschenrechner, um folgende Ausdrücke mit 3 Dezimalstellen zu berechnen (der `LN`-Knopf bezeichnet den natürlichen Logarithmus)

a) $\log_3 4$

b) $\lg 46$

c) $\log_3 \log_2 \left(3^{118}\right)$



3.4 Logarithmusgleichungen

Inhalt:

- Logarithmusgleichungen
- Potenzgleichungen
- Scheinlösungen

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Einfache Logarithmusgleichungen durch Logarithmieren lösen.
- Kompliziertere Logarithmusgleichungen lösen, die in lineare oder quadratische Gleichungen umgeschrieben werden können.
- Scheingleichungen erkennen.
- Logarithmische Ausdrücke vergleichen mit Hilfe der Basis und des Exponenten.

A - Einfache Gleichungen

Es gibt viele verschiedene Arten von Logarithmusgleichungen. Hier sind ein paar Beispiele, wo wir die Lösung der Gleichung mit der Definition des Logarithmus direkt erhalten:

$$\begin{aligned} 10^x &= y \quad \Leftrightarrow \quad x = \lg y, \\ e^x &= y \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y. \end{aligned}$$

(Wir betrachten hier nur den 10-Logarithmus und den natürlichen Logarithmus.)

Beispiel 1

Löse die Gleichungen

a) $10^x = 537$ hat die Lösung $x = \lg 537$.

b) $10^{5x} = 537$ gibt $5x = \lg 537$, also $x = \frac{1}{5} \lg 537$.

c) $\dfrac{3}{e^x} = 5$ Wir erweitern beide Seiten mit e^x und dividieren beide Seiten durch 5, und erhalten $\frac{3}{5} = e^x$, also $x = \ln \frac{3}{5}$.

d) $\lg x = 3$ hat die Lösung $x = 10^3 = 1000$.

e) $\lg(2x-4) = 2$ Von der Definition des Logarithmus bekommen wir $2x - 4 = 10^2 = 100$ und also $x = 52$.

Beispiel 2

a) Löse die Gleichung $(\sqrt{10}\,)^x = 25$.

Nachdem $\sqrt{10} = 10^{1/2}$ ist die linke Seite $(\sqrt{10}\,)^x = (10^{1/2})^x = 10^{x/2}$ und wir haben die Gleichung

$$10^{x/2} = 25.$$

Diese Gleichung hat die Lösung $x/2 = \lg 25$, also $x = 2 \lg 25$.

b) Löse die Gleichung $\dfrac{3 \ln 2x}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$.

Wir multiplizieren beide Seiten mit 2, und subtrahieren danach 2 von beiden Seiten,

$$3 \ln 2x = -1.$$

Jetzt dividieren wir beide Seiten durch 3,

$$\ln 2x = -\frac{1}{3},$$

und erhalten durch die Definition, dass $2x = e^{-1/3}$, und daher ist

$$x = \tfrac{1}{2}\, e^{-1/3} = \frac{1}{2\, e^{1/3}}.$$

In der Praxis erscheinen Gleichungen in der Form

$$a^x = b,$$

wobei a und b positive Zahlen sind. Diese Gleichungen löst man am einfachsten, indem man beide Seiten der Gleichung logarithmiert,

$$\lg a^x = \lg b.$$

Und durch die Logarithmengesetze erhalten wir

$$x \cdot \lg a = \lg b,$$

also ist die Lösung $x = \dfrac{\lg b}{\lg a}$.

Beispiel 3

a) Löse die Gleichung $3^x = 20$.

Wir logarithmieren beide Seiten,

$$\lg 3^x = \lg 20.$$

Die linke Seite ist $\lg 3^x = x \cdot \lg 3$, und daher haben wir

$$x = \frac{\lg 20}{\lg 3} \quad (\approx 2{,}727).$$

b) Löse die Gleichung $5000 \cdot 1{,}05^x = 10\,000$.

Wir dividieren beide Seiten durch 5000,

$$1{,}05^x = \frac{10\,000}{5\,000} = 2.$$

Indem wir beide Seiten logarithmieren und die linke Seite umschreiben, bekommen wir die Lösung, $\lg 1{,}05^x = x \cdot \lg 1{,}05$,

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}05} \quad (\approx 14{,}2).$$

Beispiel 4

a) Löse die Gleichung $2^x \cdot 3^x = 5$.

Wir schreiben die linke Seite als $2^x \cdot 3^x = (2 \cdot 3)^x$ mit den Potenzgesetzen und erhalten

$$6^x = 5.$$

Wir logarithmieren beide Seiten und erhalten so

$$x = \frac{\lg 5}{\lg 6} \quad (\approx 0{,}898).$$

b) Löse die Gleichung $5^{2x+1} = 3^{5x}$.

Wir logarithmieren beide Seiten und verwenden das Logarithmengesetz

$\lg a^b = b \cdot \lg a$,

$$\begin{aligned}(2x+1)\lg 5 &= 5x \cdot \lg 3,\\ 2x \cdot \lg 5 + \lg 5 &= 5x \cdot \lg 3.\end{aligned}$$

Wir bringen x auf eine Seite,

$$\begin{aligned}\lg 5 &= 5x \cdot \lg 3 - 2x \cdot \lg 5,\\ \lg 5 &= x\,(5\lg 3 - 2\lg 5).\end{aligned}$$

Die Lösung ist also

$$x = \frac{\lg 5}{5\lg 3 - 2\lg 5}.$$

B - Kompliziertere Gleichungen

Gleichungen mit mehreren Logarithmustermen können in manchen Fällen wie lineare oder quadratische Gleichungen geschrieben werden, indem man „$\ln x$“ oder „e^x“ als unbekannte Variable betrachtet.

Beispiel 5

Löse die Gleichung $\dfrac{6e^x}{3e^x+1} = \dfrac{5}{e^{-x}+2}$.

Wir multiplizieren beide Seiten mit $3e^x+1$ und $e^{-x}+2$, um den Nenner zu eliminieren,

$$6e^x(e^{-x}+2) = 5(3e^x+1).$$

Nachdem e^x und e^{-x} für alle x immer positiv sind, sind auch die Faktoren $3e^x+1$ und $e^{-x}+2$ positiv (und nie null). Deshalb können hier keine Scheingleichungen entstehen.

Wir vereinfachen beide Seiten der Gleichung,

$$6 + 12e^x = 15e^x + 5.$$

Dabei haben wir $e^{-x} \cdot e^x = e^{-x+x} = e^0 = 1$ verwendet. Wir betrachten jetzt e^x als unbekannte Variable. Die Lösung der Gleichung ist dann

$$e^x = \frac{1}{3}.$$

Logarithmieren wir beide Seiten der Gleichung, erhalten wir die Antwort

$$x = \ln\frac{1}{3} = \ln 3^{-1} = -1 \cdot \ln 3 = -\ln 3.$$

Beispiel 6

Löse die Gleichung $\dfrac{1}{\ln x} + \ln \dfrac{1}{x} = 1.$

Der Term $\ln(1/x)$ kann als $\ln(1/x) = \ln x^{-1} = -1 \cdot \ln x = -\ln x$ geschrieben werden und wir erhalten so die Gleichung

$$\frac{1}{\ln x} - \ln x = 1,$$

wo wir $\ln x$ als unbekannte Variabel betrachten. Wir multiplizieren beide Seiten mit $\ln x$ (dieser Faktor ist nicht null wenn $x \neq 1$) und erhalten die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} 1 - (\ln x)^2 &= \ln x, \\ (\ln x)^2 + \ln x - 1 &= 0, \end{aligned}$$

für $\ln x$. Quadratische Ergänzung gibt

$$\begin{aligned} (\ln x)^2 + \ln x - 1 &= \left(\ln x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 1 \\ &= \left(\ln x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{5}{4}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\ln x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

und daher die Lösungen

$$x = e^{(-1+\sqrt{5})/2} \quad \text{und} \quad x = e^{-(1+\sqrt{5})/2}.$$

C - Scheinlösungen

Wenn wir Logarithmusgleichungen lösen, müssen wir daran denken, dass das Argument der Logarithmusfunktion immer positiv sein muss, und dass $e^{(\cdots)}$ immer positiv ist. Sonst besteht das Risiko, dass wir Scheinlösungen bekommen.

Beispiel 7

Löse die Gleichung $\ln(4x^2 - 2x) = \ln(1 - 2x)$.

Wir suchen Lösungen der Gleichung

$$4x^2 - 2x = 1 - 2x, \tag{$*$}$$

wobei beide Seiten zusätzlich positiv ein müssen. Diese Gleichung kann auch als

$$4x^2 - 1 = 0$$

geschrieben werden und wir erhalten die Wurzeln

$$x = -\tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad x = \tfrac{1}{2}.$$

Jetzt testen wir, ob für unsere Lösungen beide Seiten von $(*)$ positiv werden:

- Wenn $x = -\frac{1}{2}$, sind beide Seiten $4x^2 - 2x = 1 - 2x = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 1 = 2 > 0$.
- Wenn $x = \frac{1}{2}$, sind beide Seiten $4x^2 - 2x = 1 - 2x = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0 \not> 0$.

Die Gleichung hat also nur die eine Lösung $x = -\frac{1}{2}$.

Beispiel 8

Lösen Sie die Gleichung $e^{2x} - e^x = \frac{1}{2}$.

Der erste Term kann als $e^{2x} = (e^x)^2$ geschrieben werden. Also haben wir eine quadratische Gleichung mit der unbekannten Variablen e^x,

$$(e^x)^2 - e^x = \tfrac{1}{2}.$$

Wir ersetzen e^x mit t, um die Rechnungen zu vereinfachen,

$$t^2 - t = \tfrac{1}{2}.$$

Die quadratische Ergänzung ergibt

$$\begin{aligned} \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 &= \tfrac{1}{2}, \\ \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^2 &= \tfrac{3}{4}, \end{aligned}$$

und wir haben die Lösungen

$$t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad t = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nachdem $\sqrt{3} > 1$, ist $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} < 0$ und also ist nur $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ eine mögliche Lösung, da e^x immer positiv ist. Wir logarithmieren beide Seiten und erhalten

$$x = \ln\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$

als die einzige Lösung der Gleichung.

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

Tipps fürs Lernen

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung
Nachdem du mit der Theorie und den Übungen fertig bist, solltest Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung machen. Du findest die Links zu den Prüfungen in Deiner „Student Lounge“.

Bedenke folgendes:
Lerne die Logarithmengesetze ordentlich.

Viele StudentenInnen an den Universitäten haben Schwierigkeiten mit den Logarithmengesetzen.

3.4 Übungen

Übung 3.4:1

Löse die Gleichungen

a) $e^x = 13$ b) $13e^x = 2 \cdot 3^{-x}$ c) $3e^x = 7 \cdot 2^x$

Übung 3.4:2

Löse die Gleichungen

a) $2^{x^2-2} = 1$ b) $e^{2x} + e^x = 4$ c) $3e^{x^2} = 2^x$

Übung 3.4:3

Löse die Gleichungen

a) $2^{-x^2} = 2e^{2x}$ b) $\ln(x^2 + 3x) = \ln(3x^2 - 2x)$

c) $\ln x + \ln(x + 4) = \ln(2x + 3)$

4.1 Winkel und Kreise

Inhalt:

- Verschiedene Winkelmaße (Grade und Radianten)
- Der Satz des Pythagoras
- Die Formel für den Abstand zwischen zwei Punkten
- Die Gleichung eines Kreises

Lernziele:

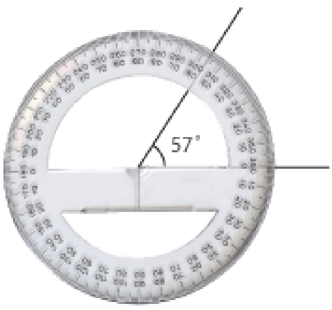
Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können :

- Winkel von Graden auf Radianten umwandeln.
- Die Fläche und Länge eines Kreissektors berechnen.
- Die Begriffe Kathete und Hypotenuse kennen.
- Das Gesetz des Pythagoras kennen und beherrschen.
- Den Abstand zwischen zwei Punkten berechnen.
- Kreise zeichnen, die durch eine Gleichung definiert sind.
- Die Begriffe Einheitskreis, Tangente, Radius, Durchmesser, Umkreis, Sehne und Kreissektor kennen.
- Geometrische Probleme mit Kreisen lösen.

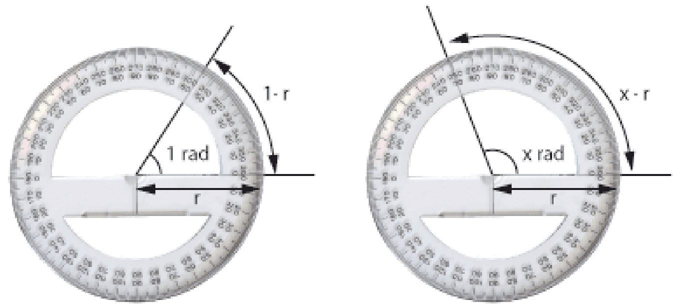
A - Winkeleinheiten

Es gibt viele verschiedene Winkeleinheiten, die in verschiedenen Bereichen verwendet werden. Die zwei häufigsten sind Grad und Radiant.

- **Grad.** Wenn man einen Kreis in 360 gleich große Stücke aufteilt, wird jedes Teil ein Grad genannt. Man bezeichnet die Einheit Grad mit °.



- **Radiant.** Eine andere Winkeleinheit ist der Radiant. Der Radiant wird oft *rad* geschrieben. Ein Radiant wird definiert dadurch, dass ein Kreis den Winkel 2π rad hat.



Ein Vollwinkel besteht aus 360° oder 2π rad, also ist

$$\begin{aligned} 1^\circ &= \frac{1}{360} \cdot 2\pi \text{ radians} = \frac{\pi}{180} \text{ radians}, \\ 1 \text{ radian} &= \frac{1}{2\pi} \cdot 360^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}. \end{aligned}$$

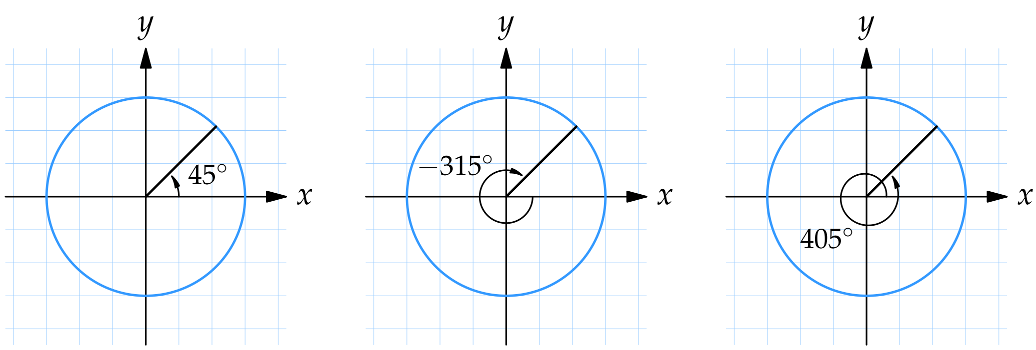
Mit diesem Verhältnis kann man Winkel von den Einheiten Grad in Radiant umwandeln.

Beispiel 1

a) $30^\circ = 30 \cdot 1^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

b) $\frac{\pi}{8} \text{ radians} = \frac{\pi}{8} \cdot (1 \text{ rad}) = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 22{,}5^\circ$

Manchmal spricht man von Winkeln, die negativ oder größer als 360° sind. Dies bedeutet, dass ein Punkt am Kreis durch mehrere Winkel repräsentiert werden kann.



Beispiel 2

a) Die Winkel -55° und 665° repräsentieren denselben Punkt, weil

$$-55^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 665^\circ.$$

b) Die Winkel $\frac{3\pi}{7}$ und $-\frac{11\pi}{7}$ repräsentieren denselben Punkt, weil

$$\frac{3\pi}{7} - 2\pi = -\frac{11\pi}{7}.$$

c) Die Winkel 36° und 216° repräsentieren nicht denselben Punkt, weil

$$36^\circ + 180^\circ = 216^\circ.$$

Neben dem Vollwinkel sind noch folgende Ausdrücke von Bedeutung:

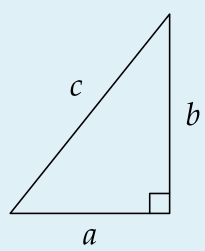
- *Spitzer Winkel:* Ein Winkel, der kleiner ist als $\frac{1}{4}$ des Vollwinkels. Also für einen Winkel x: $0 < x < 90^\circ$ bzw. $\pi/2$.
- *Rechter Winkel:* Ein Winkel von genau 90° bzw. $\pi/2$.
- Stumpfer Winkel: Ein Winkel, der größer als $\frac{1}{4}$ aber kleiner als $\frac{1}{2}$ des Vollwinkels ist. Also für einen Winkel x: 90° bzw. $\pi/2 < x < 180^\circ$ bzw. π.

B - Abstand zwischen zwei Punkten

Der Satz des Pythagoras ist einer der berühmtesten Sätze der Mathematik. Der Satz des Pythagoras sagt: wenn a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind und c die Hypotenuse, dann gilt:

Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

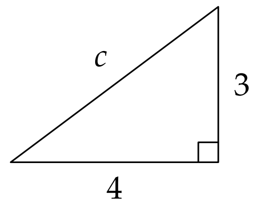


Beispiel 3
Wir erhalten c durch den Satz des Pythagoras:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

und daher ist

$$c = \sqrt{25} = 5.$$

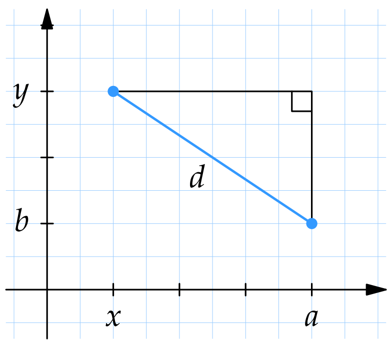


Der Satz des Pythagoras kann verwendet werden, um den Abstand zwischen zwei Punkten zu bestimmen.

Abstand zwischen zwei Punkten:
Der Abstand d zwischen den Punkten (x, y) und (a, b) ist

$$d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Die Gerade zwischen den beiden Punkten ist die Hypotenuse eines Dreiecks, wobei die Katheten parallel zu den Koordinatenachsen sind.



Die Katheten des Dreiecks sind die Unterschiede in x- bzw. in y-Richtung der Punkte, also $|x-a|$ und $|y-b|$. Durch den Satz des Pythagoras erhalten wir den Abstand zwischen den Punkten.

Beispiel 4

a) Der Abstand zwischen $(1, 2)$ und $(3, 1)$ ist

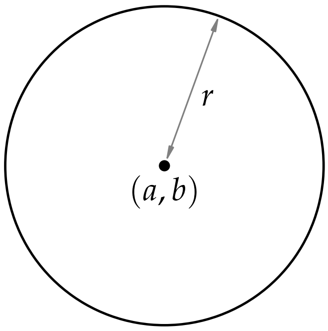
$$d = \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

b) Der Abstand zwischen $(-1,0)$ und $(-2,-5)$ ist

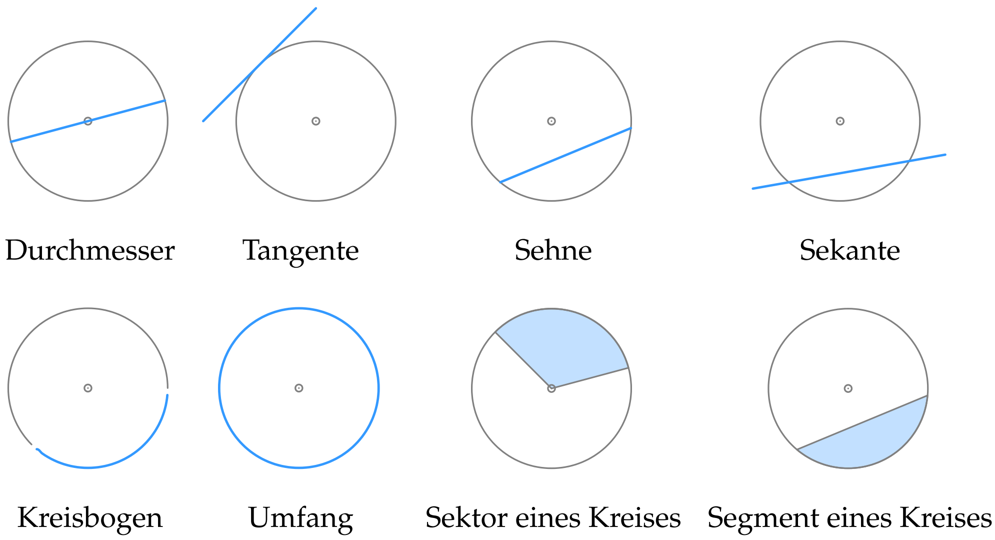
$$d = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (0-(-5))^2} = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}.$$

C - Kreise

Ein Kreis besteht aus allen Punkten, die auf dem Abstand r von einem bestimmten Punkt (a,b) liegen.



Der Abstand r ist der Radius des Kreises und der Punkt (a,b) dessen Mittelpunkt. Das Bild zeigt andere wichtige Begriffe eines Kreises.



Nützliche Formeln zur Berechnung des Kreisumfanges und der Kreisfläche:

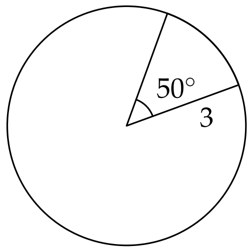
$$\text{Kreisumfang} = 2\pi r \quad \text{und} \quad \text{Kreisfläche} = \pi r^2.$$

Beispiel 5

Ein Kreisbogen ist in der Figur eingezeichnet.

a) Bestimme die Länge des Kreisbogens.

Der Winkel 50° ist in Radianten



$$50^\circ = 50 \cdot 1^\circ = 50 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5\pi}{18} \text{ rad.}$$

Laut Definition des Radianten ist die Länge des Kreisbogens der Winkel in Radianten multipliziert mit dem Radius,

$$3 \cdot \frac{5\pi}{18} \text{ Einheiten} = \frac{5\pi}{6} \text{ Einheiten.}$$

b) Bestimmen sie die Fläche des Kreissektors.

Der Kreissektor nimmt den Anteil

$$\frac{50^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{36}$$

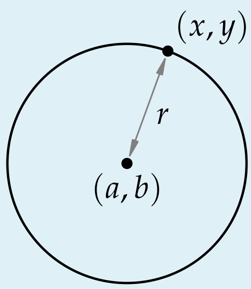
der Fläche des Kreises ein. Deshalb ist die Fläche des Kreissektors $\frac{5}{36}$ von der ganzen Fläche des Kreises, welche $\pi r^2 = \pi 3^2 = 9\pi$ ist. Also ist die Fläche des Kreissektors

$$\frac{5}{36} \cdot 9\pi \text{ Einheten} = \frac{5\pi}{4} \text{ Einheiten.}$$

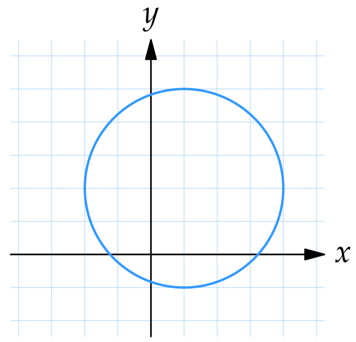
Die Punkte (x, y), die auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt (a, b) und dem Radius r liegen, können durch die Formel für den Abstand zwischen zwei Punkten beschrieben werden.

Die Gleichung eines Kreises:

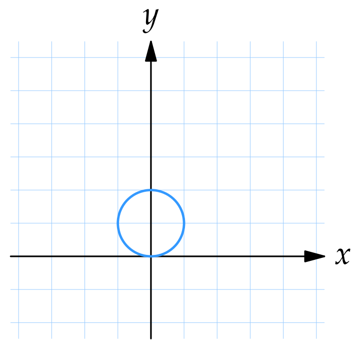
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$



Beispiel 6



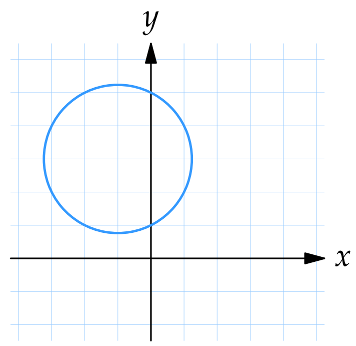
a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ ist die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $(1,2)$ und dem Radius $\sqrt{9} = 3$.



b) $x^2 + (y-1)^2 = 1$: Es gilt

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 1,$$

also ist dies die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $(0,1)$ und dem Radius $\sqrt{1} = 1$.



c) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$: Es ist

$$(x-(-1))^2 + (y-3)^2 = 5,$$

also ist dies Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $(-1,3)$ und dem Radius $\sqrt{5} \approx 2{,}236$.

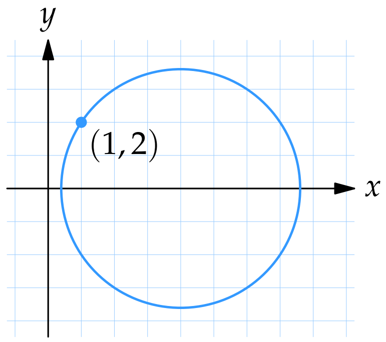
Beispiel 7

a) Liegt der Punkt $(1,2)$ auf dem Kreis $(x-4)^2 + y^2 = 13$?

Wir kontrollieren, ob $x = 1$ und $y = 2$ die Gleichung des Kreises erfüllen:

$$\text{Linke Seite} = (1-4)^2 + 2^2 = (-3)^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13 = \text{Rechte Seite.}$$

Nachdem der Punkt die Gleichung des Kreises erfüllt, liegt er auf dem Kreis.



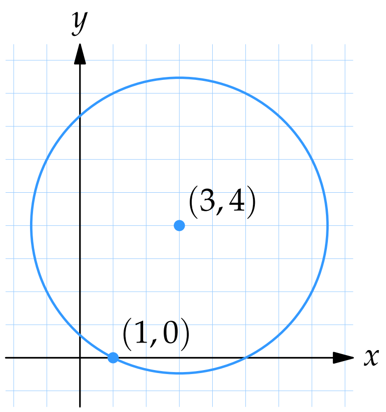
b) Bestimmen Sie die Gleichung für den Kreis, der den Mittelpunkt $(3,4)$ hat und durch den Punkt $(1,0)$ geht.

Nachdem der Punkt $(1,0)$ auf dem Kreis liegt, muss der Abstand zwischen diesem Punkt und dem Mittelpunkt $(3,4)$ der Radius des Kreises sein. Also haben wir

$$c = \sqrt{(3-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

und die Gleichung des Kreises lautet:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 20 \; .$$



Beispiel 8

Bestimme den Mittelpunkt und Radius des Kreises mit der Gleichung $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

Wir wollen die Gleichung des Kreises auf die Form

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

bringen. Dann können wir den Mittelpunkt direkt als (a, b) ablesen, und den Radius als r.

Wir benutzen zuerst die quadratische Ergänzung für alle x-Terme auf der linken Seite,

$$\underline{x^2 - 2x} + y^2 + 4y + 1 = \underline{(x-1)^2 - 1^2} + y^2 + 4y + 1.$$

(Wir haben nur die unterstrichenen Terme verändert.)

Jetzt benutzen wir die quadratische Ergänzung für alle y-Terme,

$$(x-1)^2 - 1^2 + \underline{y^2 + 4y} + 1 = (x-1)^2 - 1^2 + \underline{(y+2)^2 - 2^2} + 1.$$

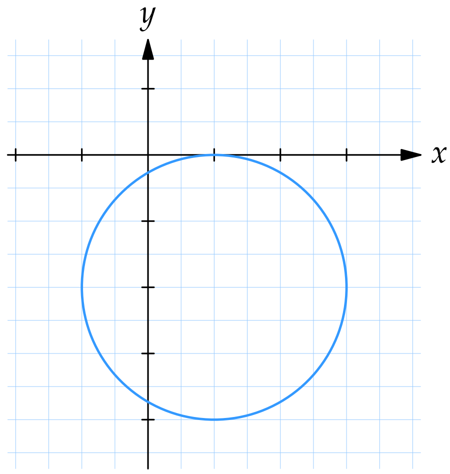
Die linke Seite ist also

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 4.$$

Wenn wir 4 zu beiden Seiten addieren, erhalten wir

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4.$$

Also hat der Kreis den Mittelpunkt $(1, -2)$ und den Radius $\sqrt{4} = 2$.



Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor

Tipps fürs Lernen

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung
Nachdem du mit der Theorie und den Übungen fertig bist, solltest Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung machen. Du findest die Links zu den Prüfungen in Deiner „Student Lounge“.

Literaturhinweise
Für die, die tiefer in die Materie einsteigen wollen, sind hier einige Links angeführt:

- Mehr über den Satz des Pythagoras in der Wikipedia
  (`http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras`)
- Lies mehr über Kreise auf Mathworld (engl.)
  (`http://mathworld.wolfram.com/Circle.html`)

Nützliche Websites

- Interaktive Experimente: Sinus und Cosinus im Einheitskreis (Flash)
  (`http://www.math.kth.se/online/images/sinus_och_cosinus_i_enhetscirkeln.swf`)

4.1 Übungen

Übung 4.1:1

Schreibe folgende Winkel in Radianten und Grad.

a) $\frac{1}{4}$ Vollwinkel b) $\frac{3}{8}$ Vollwinkel

c) $-\frac{2}{3}$ Vollwinkel d) $\frac{97}{12}$ Vollwinkel

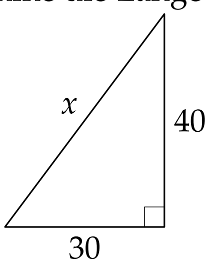
Übung 4.1:2

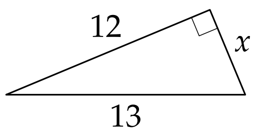
Schreibe folgende Winkel in Radianten.

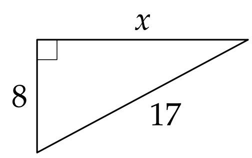
a) 45° b) 135° c) -63° d) 270°

Übung 4.1:3

Bestimme die Länge der Seite x.

a)


b)


c)


Übung 4.1:4

a) Bestimme den Abstand zwischen den Punkten $(1,1)$ und $(5,4)$.

b) Bestimme den Abstand zwischen den Punkten $(-2,5)$ und $(3,-1)$.

c) Finde den Punkt auf der x-Achse, der denselben Abstand zum Punkt $(3,3)$ wie zum Punkt $(5,1)$ hat.

Übung 4.1:5

a) Bestimme die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt $(1,2)$ und dem Radius 2.

b) Bestimme die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt $(2,-1)$, der den Punkt $(-1,1)$ enthält.

Übung 4.1:6

Zeichne folgende Kreise

a) $x^2 + y^2 = 9$ b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

c) $(3x-1)^2 + (3y+7)^2 = 10$

Übung 4.1:7

Zeichne folgende Kreise

a) $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 1$

b) $x^2 + y^2 + 4y = 0$

c) $x^2 - 2x + y^2 + 6y = -3$

d) $x^2 - 2x + y^2 + 2y = -2$

Übung 4.1:8

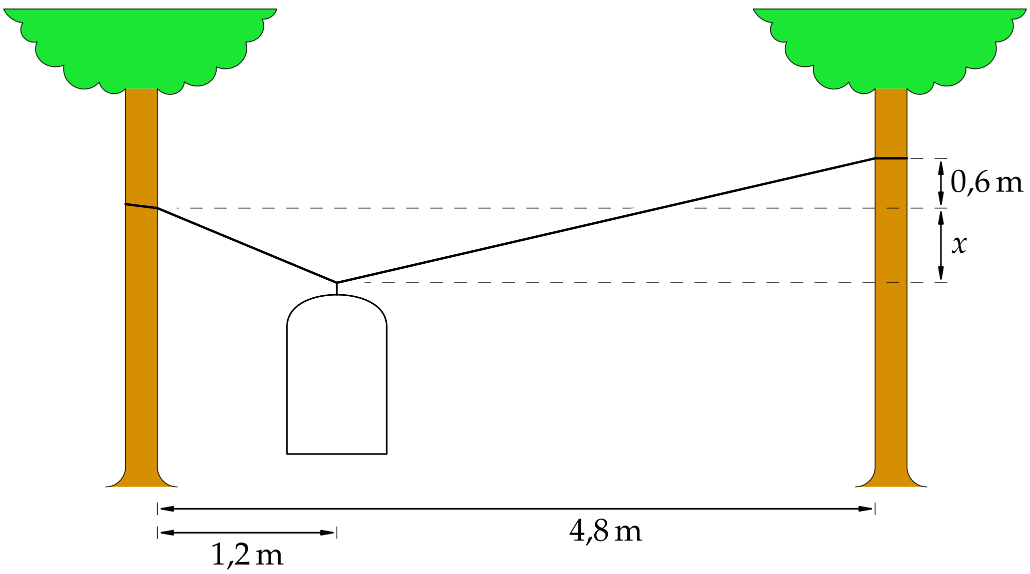
Wie viele Mal dreht sich ein Rad mit dem Radius 50 cm, wenn es 10 m rollt?

Übung 4.1:9

Der Sekundenzeiger einer Uhr ist 8 cm lang. Wie groß ist die Fläche, die der Zeiger in 10 Sekunden durchlaufen hat?

Übung 4.1:10

Eine Wäscheleine, die 5,4 m lang ist, ist zwischen zwei senkrechten Bäumen aufgehängt. Der Abstand zwischen den beiden Bäumen ist 4,8 m. Das eine Ende der Leine ist 0,6 m höher aufgehängt als das andere Ende. Bestimme wie weit unterhalb des linken Baumes die Wäsche hängt, also den Abstand x auf dem Bild.



4.2 Trigonometrische Funktionen

Inhalt:

- Die trigonometrischen Funktionen Cosinus, Sinus und Tangens.

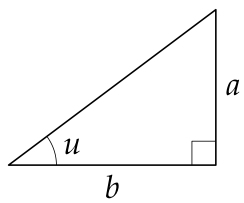
Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Die Begriffe Ankathete, Gegenkathete, Hypotenuse und rechtwinklige Dreiecke kennen.
- Die Definitionen von Sinus, Cosinus und Tangens durch den Einheitskreis.
- Die Werte von Sinus, Cosinus und Tangens für die Winkel 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ und $\pi/2$ auswendig können.
- Die Werte von Sinus, Cosinus und Tangens durch Drehungen des Einheitskreises für andere Winkel berechnen.
- Die Graphen der trigonometrischen Funktionen zeichnen.
- Trigonometrische Probleme mit rechtwinkligen Dreiecken lösen.

A - Rechtwinklige Dreiecke

In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man das Verhältnis zwischen der Gegenkathete a und der Ankathete b den Tangens des Winkels u, und wird $\tan u$ geschrieben.

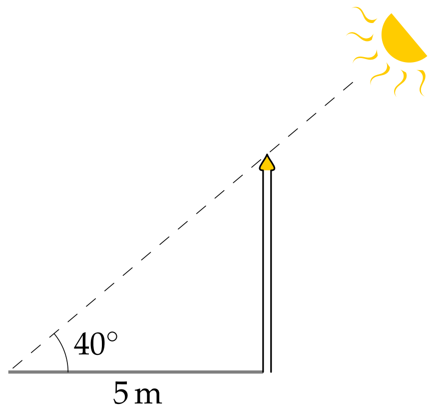


$$\tan u = \frac{a}{b}$$

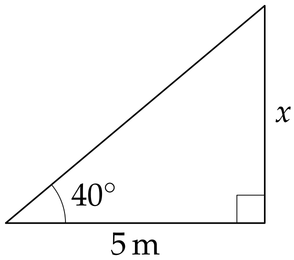
Der Wert des Bruches a/b verändert sich nicht, wenn a und b mit der selben Zahl multipliziert werden. Das heißt, die tatsächliche Länge der Seiten ist egal, es zählt nur das Verhältnis der Längen zueinander. Daraus können wir schließen, dass der Bruch auch unabhängig davon ist, ob die Längen in Metern, Zentimetern, Inchs etc gemessen werden. Verschiedene Winkel ergeben verschiedene Werte des Tangens. Die Werte der Tangensfunktion kann man mittels einer Tabelle oder mit Hilfe eines Taschenrechner erhalten.

Beispiel 1

Wie hoch ist der Flaggenmast?



Der Flaggenmast und sein Schatten bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der unbekannten Seite x.



Aus der Definition des Tangens erhalten wir

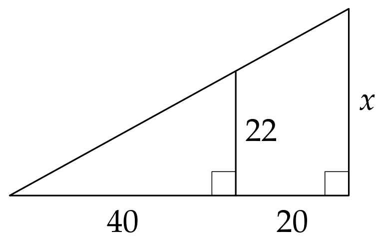
$$\tan 40^\circ = \frac{x}{5\,\mathrm{m}}$$

Nachdem $\tan 40^\circ \approx 0{,}84$ erhalten wir

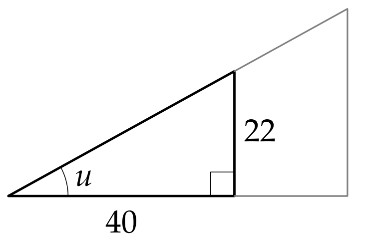
$$x = 5\,\mathrm{m} \cdot \tan 40^\circ \approx 5\,\mathrm{m} \cdot 0{,}84 = 4{,}2\,\mathrm{m}.$$

Beispiel 2

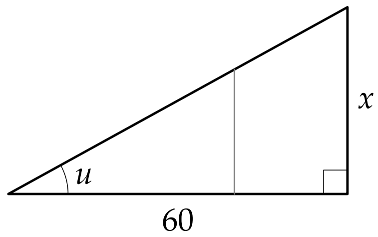
Bestimme die Länge der Seite x in der Figur.



Wir nennen den Winkel links u und schreiben $\tan u$ auf zwei verschiedene Weisen:



$$\tan u = \frac{22}{40}$$



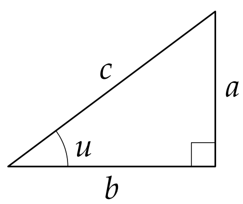
$$\tan u = \frac{x}{60}$$

Nachdem die beiden Gleichungen für $\tan u$ gleich sind, erhalten wir

$$\frac{22}{40} = \frac{x}{60}.$$

Wir erhalten $x = 60 \cdot \dfrac{22}{40} = 33$.

Es gibt noch zwei Verhältnisse zwischen den Seiten in einem Dreieck, die besondere Namen besitzen, nämlich $\cos u = b/c$ („Cosinus von u“), und $\sin u = a/c$ („Sinus von u“).



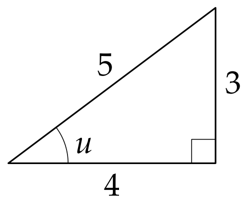
$$\cos u = \frac{b}{c}$$

$$\sin u = \frac{a}{c}$$

Genau wie für die Tangensfunktion sind die Werte der Sinus- und Cosinusfunktion nur von dem Winkel u abhängig, also nicht von der Größe des Dreiecks.

Beispiel 3

a)

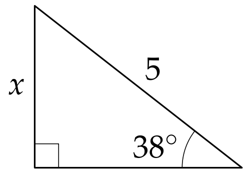


Im linken Dreieck

$$\cos u = \frac{4}{5},$$

$$\sin u = \frac{3}{5}.$$

b)



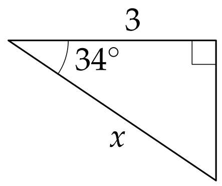
Durch die Definition des Sinus erhalten wir

$$\sin 38^\circ = \frac{x}{5}$$

und $\sin 38^\circ \approx 0{,}616$ gibt uns

$$x = 5 \cdot \sin 38^\circ \approx 5 \cdot 0{,}616 \approx 3{,}1.$$

c)



Der Cosinus ist das Verhältnis zwischen der Ankathete und der Hypotenuse,

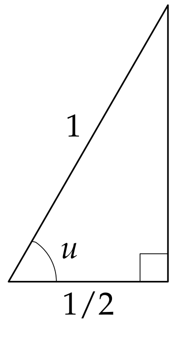
$$\cos 34^\circ = \frac{3}{x}.$$

Also haben wir

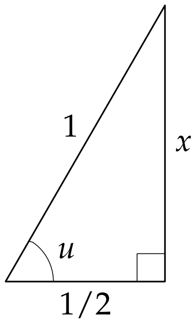
$$x = \frac{3}{\cos 34^\circ}.$$

Beispiel 4

Bestimme $\sin u$ im Dreieck



Mit dem Gesetz des Pythagoras können wir die Länge der rechten Seite bestimmen,



$$1^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

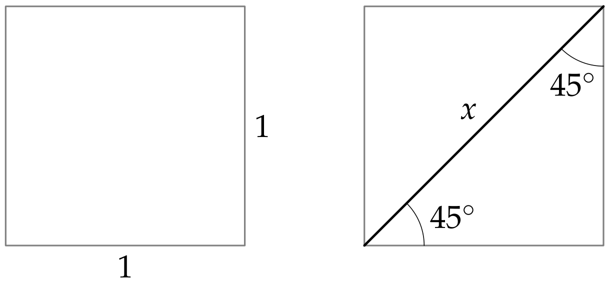
Daher ist $\sin u = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

B - Wichtige Winkel

Für die Winkel 30°, 45° und 60° ist es einfach, die Werte der trigonometrischen Funktionen zu berechnen.

Beispiel 5

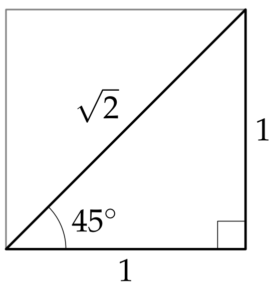
Wir betrachten ein Quadrat mit der Seite 1. Die Diagonale dieses Quadrates teilt einen rechten Winkel in zwei, also in zwei Winkeln von 45°.



Durch das Gesetz des Pythagoras erhalten wir die Länge x der Diagonale,

$$x^2 = 1^2 + 1^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Jedes Dreieck hat die Diagonale als Hypotenuse, und daher bekommen wir die Werte der trigonometrischen Funktionen für den Winkel 45°.



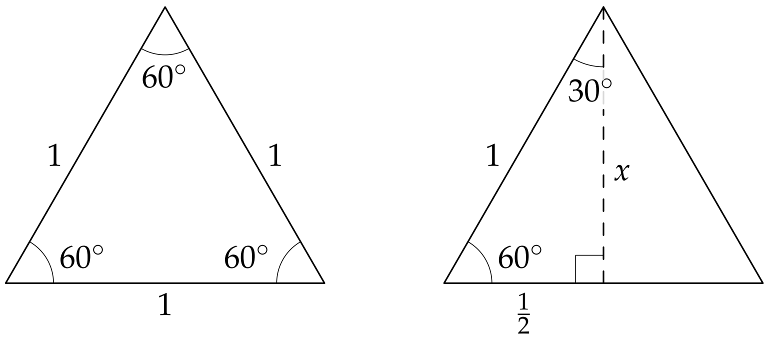
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

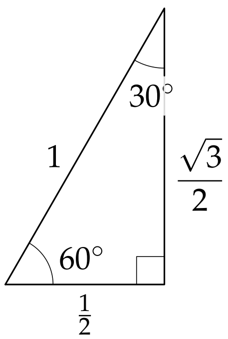
$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

Beispiel 6

Wir betrachten ein Dreieck, wo alle Seiten die Länge 1 haben, und daher alle Winkel 60° sind. Teilen wir dieses Dreieck in zwei gleich große Dreiecke, haben diese Dreiecke einen Winkel, der 30 ° ist.



Durch das Gesetz des Pythagoras erhalten wir die Länge der Höhe $x = \sqrt{3}/2$. Betrachten wir eines der kleineren Dreiecke, erhalten wir



$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos 60^\circ = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}; \qquad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

Zusammenfassung:

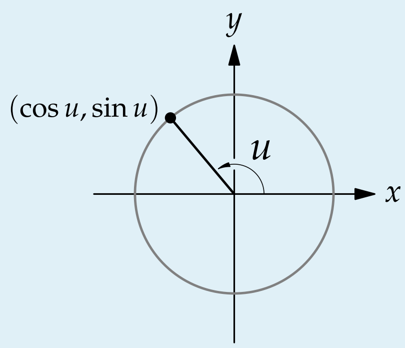
x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	0	1	0
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
π	0	-1	0

Radiant-Grad Umwandlung: π rad $= 180^\circ$, also π/x rad $= 180^\circ/x$. Beispiel: $\pi/6$ rad $= 180^\circ/6 = 30^\circ$.

C - Trigonometrische Funktionen für allgemeine Winkeln

Die trigonometrischen Funktionen für Winkel kleiner als 0° oder größer als 90° definiert man durch den Einheitskreis.

Die trigonometrische Funktionen $\cos u$ und $\sin u$ sind die x- und y-Werte des Schnittpunktes des Einheitskreises mit der Geraden mit dem Winkel u zur x-Achse.



Die Definition der Tangensfunktion ist

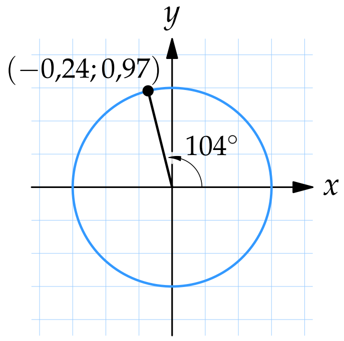
$$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$$

und daher ist der Steigungswinkel der Geraden u.

Beispiel 7

Bestimme in den Figuren die Cosinus- und Sinuswerte der Winkel:

a)

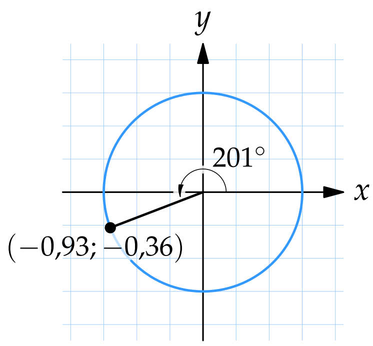


$$\cos 104^\circ \approx -0{,}24$$

$$\sin 104^\circ \approx 0{,}97$$

$$\tan 104^\circ \approx \frac{0{,}97}{-0{,}24} \approx -4{,}0$$

b)



$$\cos 201^\circ \approx -0{,}93$$

$$\sin 201^\circ \approx -0{,}36$$

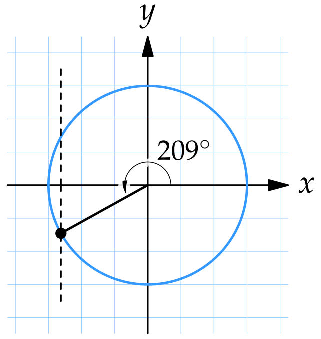
$$\tan 201^\circ \approx \frac{-0{,}36}{-0{,}93} \approx 0{,}4$$

Beispiel 8

Sind die folgenden Ausdrücke positiv oder negativ?

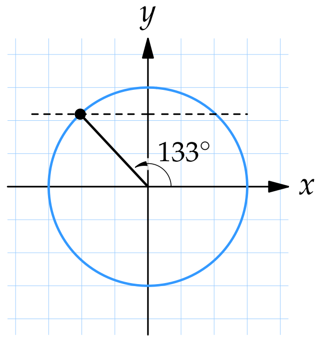
a) $\cos 209^\circ$

Nachdem $209^\circ = 180^\circ + 29^\circ$ ist, liegt der Punkt im dritten Quadranten, und daher ist der x-Wert des Punktes negativ und daher auch der Cosinuswert. Also ist $\cos 209^\circ$ negativ.



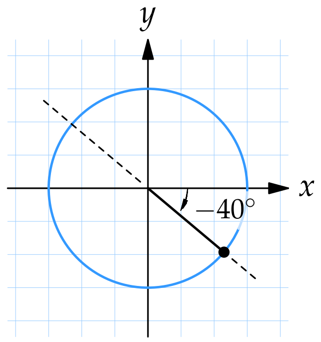
b) $\sin 133^\circ$

Nachdem $133^\circ = 90^\circ + 43^\circ$, liegt der Punkt im zweiten Quadranten, wo die y-Werte Positiv sind. Also ist $\sin 133^\circ$ positiv.



c) $\tan(-40^\circ)$

Indem wir den Winkel -40° im Einheitskreis einzeichnen, sehen wir, dass die Steigung der entsprechenden Geraden negativ ist. Also ist $\tan(-40^\circ)$ negativ.



Beispiel 9

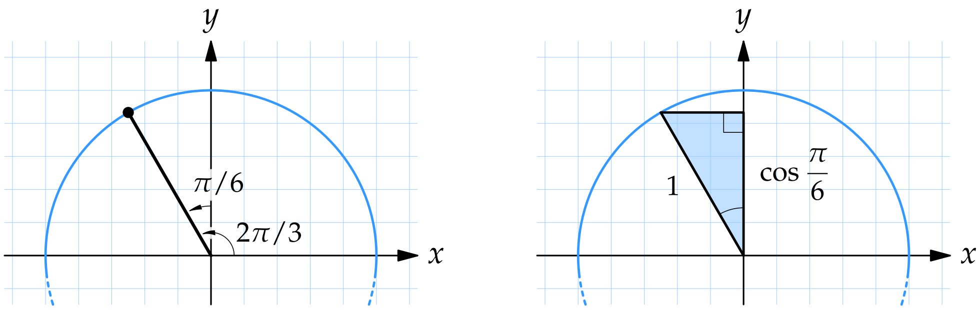
Berechne $\sin \dfrac{2\pi}{3}$.

Wir schreiben $\sin(2\pi/3)$ wie

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} = \frac{3\pi + \pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}.$$

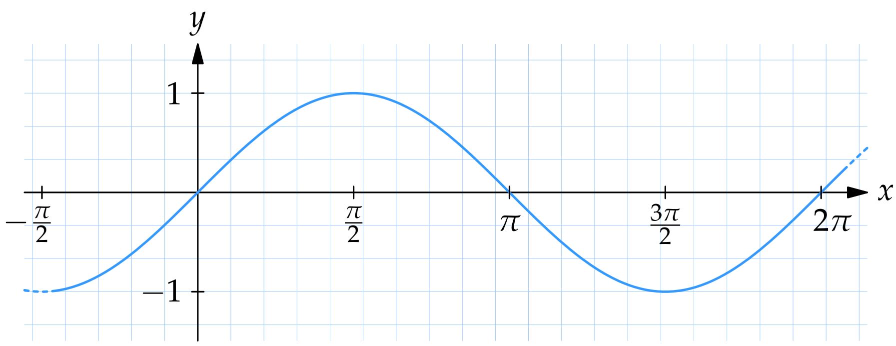
Daher liegt $2\pi/3$ im zweiten Quadranten und bildet den positiven Winkel $\pi/6$ mit der y-Achse. Zeichnen wir das Dreieck wie in der unteren Figur, sehen wir, dass die y-Koordinate von $2\pi/3$, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ ist. Also erhalten wir

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

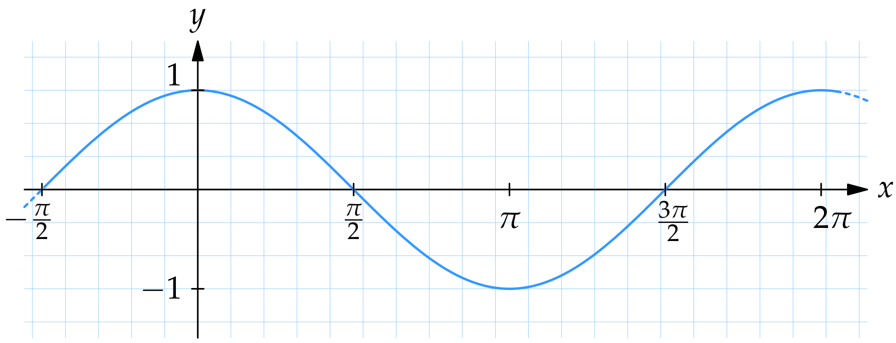


D - Die Funktionsgraphen der trigonometrischen Funktionen

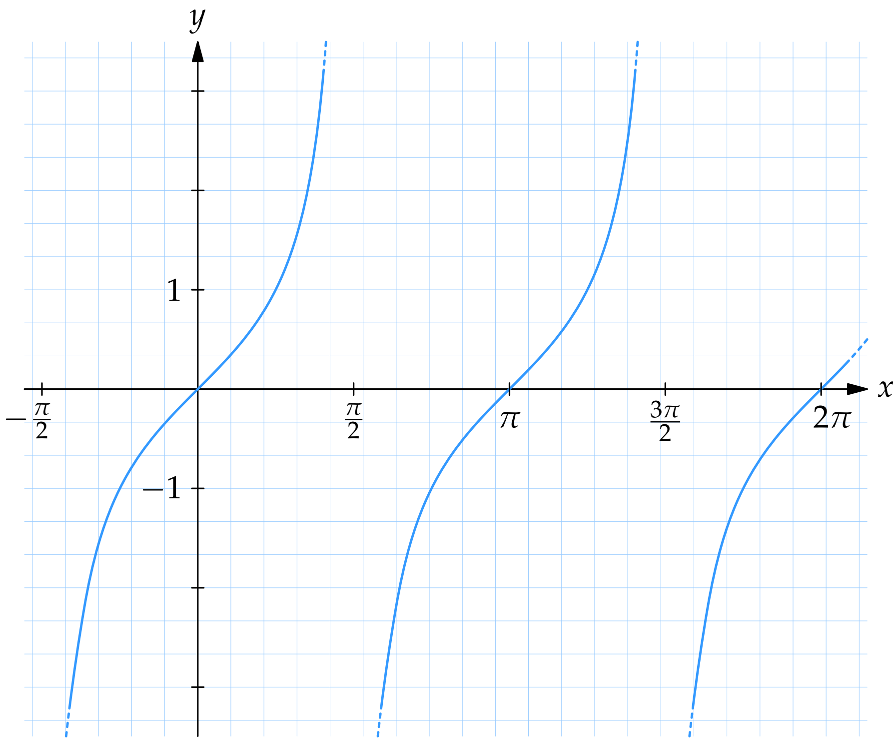
In diesen Abschnitt haben wir den Einheitskreis verwendet, um Funktionswerte von beliebigen Winkeln zu finden. Mit dem Einheitskreis können wir auch die Graphen der trigonometrischen Funktionen zeichnen.



Der Graph der Sinusfunktion



Der Graph der Cosinusfunktion



Der Graph der Tangensfunktion

Hier beobachten wir einige interessante Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen:

- Die Cosinus- und Sinusfunktionen sind periodisch, mit der kleinsten Periode 2π. Dies bedeutet, dass $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ und $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Im Einheitskreis entspricht das einer Drehung von 2π, wobei wir wieder denselben Winkel erhalten.

- Die Tangensfunktion ist periodisch mit der kleinsten Periode π. Also ist $\tan(x + \pi) = \tan x$. Zwei Winkel mit der Differenz π haben dieselbe Gerade und daher dieselbe Steigung.

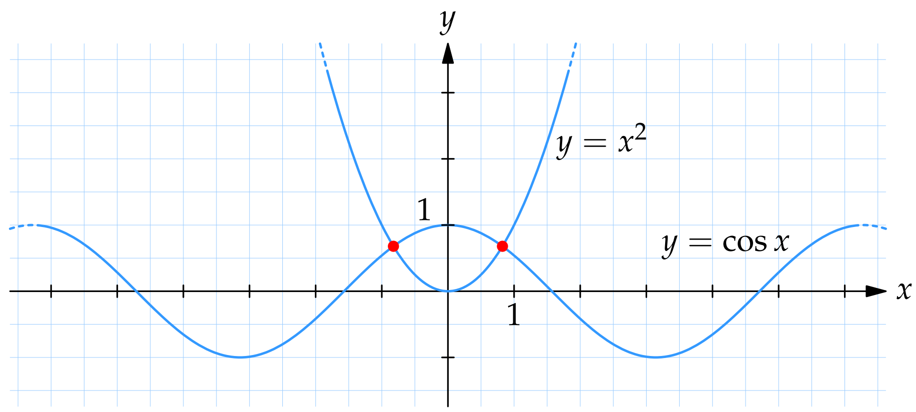
- Außer eine Verschiebung von $\pi/2$, sind die Cosinus- und Sinusfunktionen identisch. Genauer ist $\cos x = \sin(x + \pi/2)$. Dies untersuchen wir näher im nächsten Abschnitt.

Die Funktionsgraphen spielen auch eine wichtige Rolle bei trigonometrischen Gleichungen, da sie graphische Lösungen von Gleichungen ermöglichen.

Beispiel 10

Wie viele Lösungen hat die Gleichun $\cos x = x^2$ (wobei x der Winkel in Radianten ist)?

Wir zeichnen die Graphen von $y = \cos x$ und $y = x^2$ und sehen, dass die Graphen zwei Schnittpunkte haben. Also hat die Gleichung zwei Lösungen x, wo die y-Werte der beiden Funktionen gleich sind. Die Gleichung hat also zwei Lösungen.



Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

Tipps fürs lernen

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung
Nachdem du mit der Theorie und den Übungen fertig bist, solltest Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung machen. Du findest die Links zu den Prüfungen in Deiner „Student Lounge“.

Bedenke folgendes:
Die Verwendung von Trigonoetrie vereinfacht viele geometrische Probleme.

Versichere Dich, dass Du die Definition der trigonometrischen Funktionen durch den Einheitskreis wirklich verstehst.

Literaturhinweise
Für die, die tiefer in die Materie einsteigen wollen, sind hier einige Links angeführt:

- Mehr über trigonometrische Funktionen in der Wikipedia
(`http://de.wikipedia.org/wiki/Trigonometrische_Funktion`)
- Mehr über den Einheitskreis in der Wikipedia
(`http://de.wikipedia.org/wiki/Einheitskreis`)

Nützliche Websites

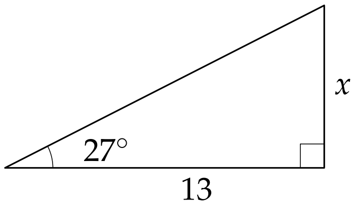
- Experimente mit Sinus und Cosinus im Einheitskreis
(`http://www.math.kth.se/online/images/sinus_och_cosinus_i_enhetscirkeln.swf`)
- Experimentiere mit euklidischer Geometrie (engl.)
(`http://www.math.psu.edu/dlittle/java/geometry/euclidean/toolbox.html`)

4.2 Übungen

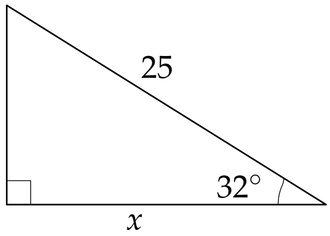
Übung 4.2:1

Verwende trigonometrische Funktionen, um die Länge der unbekannten Seite x zu bestimmen.

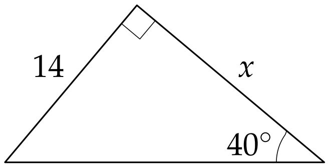
a)



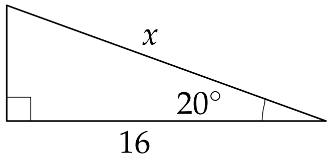
b)



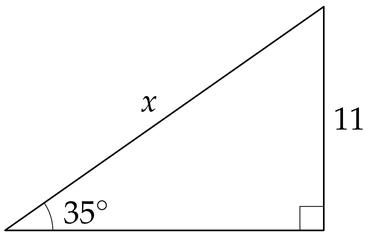
c)



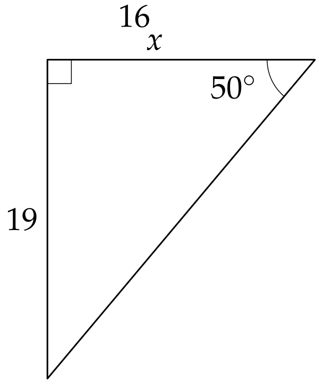
d)



e)



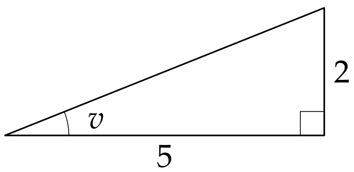
f)



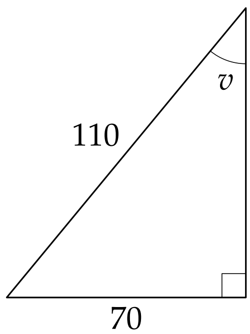
Übung 4.2:2

Finde eine trigonometrische Gleichung, die den Winkel v enthält.

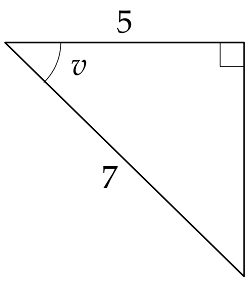
a)



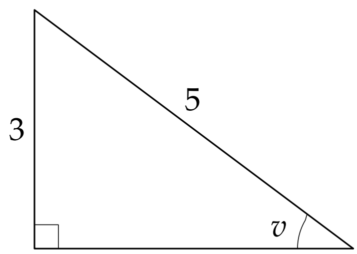
b)

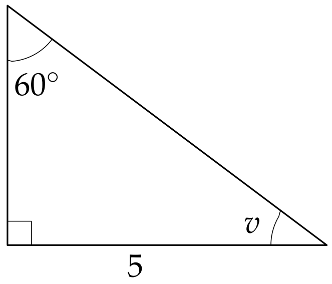


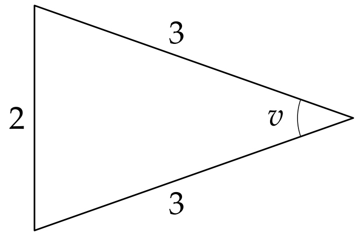
c)



d)



e) 

f) 

Übung 4.2:3

Berechne

a)	$\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$	b)	$\cos 2\pi$	c)	$\sin 9\pi$
d)	$\cos\dfrac{7\pi}{2}$	e)	$\sin\dfrac{3\pi}{4}$	f)	$\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Übung 4.2:4

Berechne

a)	$\cos\dfrac{11\pi}{6}$	b)	$\cos\dfrac{11\pi}{3}$	c)	$\tan\dfrac{3\pi}{4}$
d)	$\tan\pi$	e)	$\tan\dfrac{7\pi}{6}$	f)	$\tan\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$

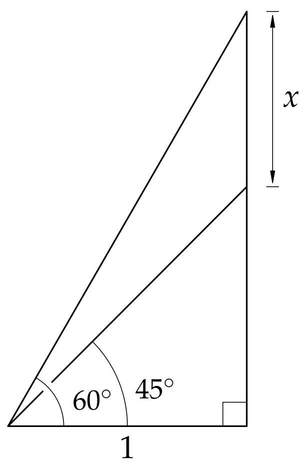
Übung 4.2:5

Berechne

a)	$\cos 135^\circ$	b)	$\tan 225^\circ$	c)	$\cos 330^\circ$	d)	$\tan 495^\circ$

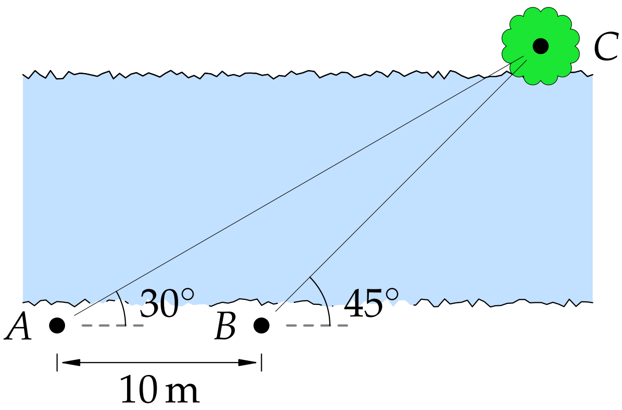
Übung 4.2:6

Berechne die Länge der Seite x.



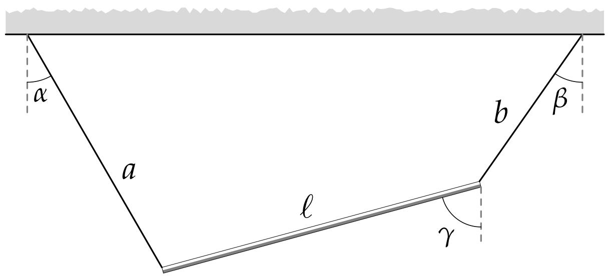
Übung 4.2:7

Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, messen wir die Winkel zu einem Fixpunkt auf dem Ufer von zwei verschiedenen Stellen. Wie breit ist der Fluss?



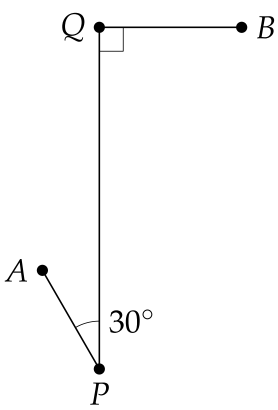
Übung 4.2:8

Eine Stange mit der Länge ℓ hängt an zwei Schnüren mit den Längen a und b wie im Bild. Die Schnüre bilden die Winkel α und β. Bestimme den Winkel γ.



Übung 4.2:9

Eine Strasse von A nach B besteht aus den drei geraden Strecken AP, PQ und QB, die jeweils 4,0 km, 12,0 km und 5,0 km lang sind. Die Winkel P und Q sind jeweils 30° und 90°. Bestimme die Länge des Luftweges zwischen A und B. (Diese Übung stammt aus einer schwedischen Abiturprüfung im November 1976.)



4.3 Trigonometrische Eigenschaften

Inhalt:

- Der trigonometrische Pythagoras
- Die Doppelwinkelfunktionen und die Halbwinkelformeln
- Die Additionstheoreme

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Trigonometrische Identitäten durch den Einheitskreis herleiten.
- Trigonometrische Ausdrücke mit den trigonometrischen Identitäten vereinfachen.

A - Einführung

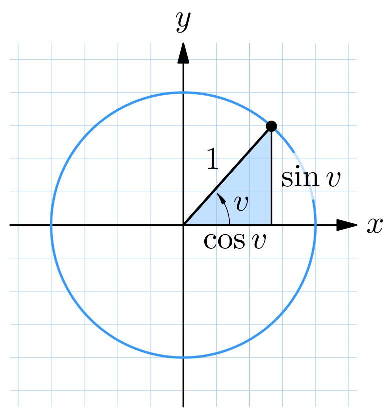
Es gibt viele trigonometrische Formeln, um verschiedene trigonometrische Ausdrücke umzuwandeln. Diese Formeln nennt man meist die trigonometrischen Identitäten. Wir werden hier einige trigonometrische Identitäten zeigen, aber es gibt noch viele mehr. Die meisten können durch die Doppelwinkelfunktionen und durch den trigonometrischen Pythagoras hergeleitet werden, die deshalb zentrale Identitäten sind.

B - Der trigonometrische Pythagoras

Dieses Gesetz ist eigentlich nur ein Sonderfall des Gesetzes von Pythagoras für Dreiecke im Einheitskreis. Durch das rechtwinklige Dreieck im Bild sehen wir, dass

$$(\sin v)^2 + (\cos v)^2 = 1,$$

das normalerweise als $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ geschrieben wird.



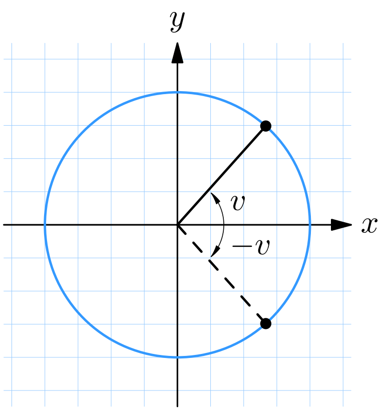
C - Symmetrien

Mit Spiegelungen im Einheitskreis kann man viele Symmetrien der trigonometrischen Funktionen zeigen.

$$\begin{aligned} \cos(-v) &= \cos v & \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) &= \sin v \\ \sin(-v) &= -\sin v & \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) &= \cos v \\ \cos(\pi - v) &= -\cos v & \cos\left(v + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin v \\ \sin(\pi - v) &= \sin v & \sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos v \end{aligned}$$

Wie gesagt kann man diese Symmetrien einfach mit dem Einheitskreis herleiten.

Spiegelung an der x-Achse

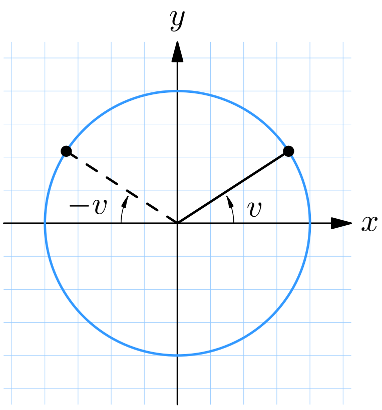


Durch Spiegelung an der x-Achse wird der Winkel v, $-v$.

Die Spiegelung wirkt sich nicht auf die x-Koordinate aus, während die y-Koordinate ihr Vorzeichen tauscht,

$$\begin{aligned} \cos(-v) &= \cos v, \\ \sin(-v) &= -\sin v. \end{aligned}$$

Spiegelung an der y-Achse

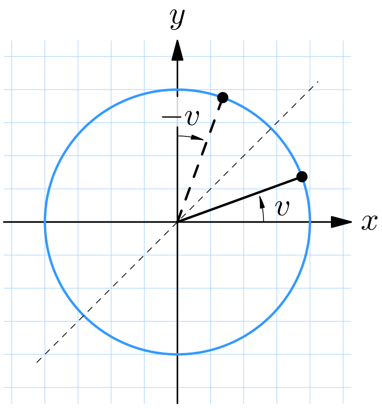


Durch Spiegelung an der y-Achse wird der Winkel v, $\pi - v$. (Der gespiegelte Winkel bildet den Winkel v mit der negativen x-Achse.)

Die Spiegelung wirkt sich nicht auf die y-Koordinate aus, während die x-Koordinate ihr Vorzeichen tauscht,

$$\begin{aligned} \cos(\pi - v) &= -\cos v, \\ \sin(\pi - v) &= \sin v. \end{aligned}$$

Spiegelung an der Geraden $y = x$

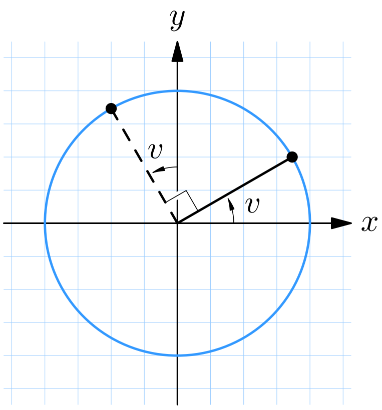


Durch eine Spiegelung an der Geraden wird der Winkel v, $\pi/2 - v$. (Der gespiegelte Winkel bildet den Winkel v mit der positiven y-Achse.)

Durch die Spiegelung tauschen die x- und die y- Koordinaten ihre Plätze,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin v,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v.$$

Drehung um den Winkel $\pi/2$



Durch eine Umdrehung von $\pi/2$ wird der Winkel v zu $v + \pi/2$.

Durch die Drehung wird die Koordinate (x, y) zu $(-y, x)$,

$$\cos\left(v + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin v,$$
$$\sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right) = \cos v.$$

D - Die Additionstheoreme, die Doppelwinkelfunktionen und die Halbwinkelformeln

Oft kommen Ausdrücke mit Summen von Winkeln vor, sowie $\sin(u + v)$. Sehr hilfreich sind bei solchen Ausdrücken die Additionstheoreme. Für Sinus und Cosinus lauten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\sin(u+v) &= \sin u \, \cos v + \cos u \, \sin v,\\
\sin(u-v) &= \sin u \, \cos v - \cos u \, \sin v,\\
\cos(u+v) &= \cos u \, \cos v - \sin u \, \sin v,\\
\cos(u-v) &= \cos u \, \cos v + \sin u \, \sin v.
\end{aligned}$$

Um die Doppelwinkelfunktionen $\sin 2v$ und $\cos 2v$ zu erhalten, kann man die Sonderfälle $\sin(v + v)$ und $\cos(v + v)$ der Additionstheoreme betrachten

$$\sin 2v = 2\sin v \cos v,$$
$$\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v.$$

Indem man in diese Formel $2v$ mit v ersetzt und natürlich auch v mit $v/2$, erhält man für $\cos 2v$,

$$\cos v = \cos^2\frac{v}{2} - \sin^2\frac{v}{2}.$$

Durch den trigonometrischen Pythagoras werden wir den Term $\cos^2(v/2)$ los

$$\cos v = 1 - \sin^2\frac{v}{2} - \sin^2\frac{v}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{v}{2}$$

also

$$\sin^2\frac{v}{2} = \frac{1-\cos v}{2}.$$

Man kann natürlich auch den trigonometrischen Pythagoras verwenden, um den Term $\sin^2(v/2)$ loszuwerden. So erhalten wir statt dessen

$$\cos^2\frac{v}{2} = \frac{1+\cos v}{2}.$$

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

Tipps fürs Lernen

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung

Nachdem du mit der Theorie und den Übungen fertig bist, solltest Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung machen. Du findest die Links zu den Prüfungen in Deiner „Student Lounge“.

Bedenken folgendes:

Der Einheitskreis ist ein sehr nützliches Hilfsmittel, um trigonometrische Identitäten herzuleiten. Es gibt sehr viele verschiedene trigonometrische Identitäten, und man kann sie nicht alle auswendig lernen. Deshalb ist es gut, sie herleiten zu können. Der trigonometrische Pythagoras ist zum Beispiel nur ein Sonderfall des Gesetzes von Pythagoras im Einheitskreis.

Nützliche Websites

- Experimentiere mit der „Cosinuskiste“ (engl.) (`http://www.ies.co.jp/math/java/trig/cosbox/cosbox.html`)

4.3 Übungen

Übung 4.3:1

Bestimme den Winkel v zwischen $\dfrac{\pi}{2}$ und 2π, der folgende Gleichung erfüllt:

a) $\cos v = \cos\dfrac{\pi}{5}$ b) $\sin v = \sin\dfrac{\pi}{7}$ c) $\tan v = \tan\dfrac{2\pi}{7}$

Übung 4.3:2

Bestimme den Winkel v zwischen 0 und π, der die folgende Gleichung erfüllt:

a) $\cos v = \cos\dfrac{3\pi}{2}$ b) $\cos v = \cos\dfrac{7\pi}{5}$

Übung 4.3:3

Angenommen, $-\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2}$ und $\sin v = a$. Schreibe folgende Ausdrücke mit a:

a) $\sin(-v)$ b) $\sin(\pi - v)$

c) $\cos v$ d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)$

e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + v\right)$ f) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + v\right)$

Übung 4.3:4

Angenommen, $0 \le v \le \pi$ und $\cos v = b$. Schreibe folgende Ausdrücke mit b:

a) $\sin^2 v$ b) $\sin v$

c) $\sin 2v$ d) $\cos 2v$

e) $\sin\left(v + \dfrac{\pi}{4}\right)$ f) $\cos\left(v - \dfrac{\pi}{3}\right)$

Übung 4.3:5

Bestimme $\cos v$ und $\tan v$, wenn v ein spitzer Winkel ist und $\sin v = \dfrac{5}{7}$ ist.

Übung 4.3:6

a) Bestimme $\sin v$ und $\tan v$, wenn $\cos v = \dfrac{3}{4}$ und $\dfrac{3\pi}{2} \le v \le 2\pi$.

b) Bestimme $\cos v$ und $\tan v$, wenn $\sin v = \dfrac{3}{10}$ und v im zweiten Quadrant liegt.

c) Bestimme $\sin v$ und $\cos v$, wenn $\tan v = 3$ und $\pi \le v \le \dfrac{3\pi}{2}$.

Übung 4.3:7

Bestimme $\sin(x+y)$ wenn

a) $\sin x = \frac{2}{3}$, $\sin y = \frac{1}{3}$ und x und y im ersten Quadrant liegen.

b) $\cos x = \frac{2}{5}$, $\cos y = \frac{3}{5}$ und x und y im ersten Quadrant liegen.

Übung 4.3:8

Leite folgende trigonometrische Identitäten her:

a) $\tan^2 v = \dfrac{\sin^2 v}{1-\sin^2 v}$

b) $\dfrac{1}{\cos v} - \tan v = \dfrac{\cos v}{1+\sin v}$

c) $\tan\dfrac{u}{2} = \dfrac{\sin u}{1+\cos u}$

d) $\dfrac{\cos(u+v)}{\cos u \cos v} = 1 - \tan u \tan v$

Übung 4.3:9

Zeige *Morries Gleichheit*:

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$$

(Hinweis: Gehe von der Doppelwinkelfunktionen für $\sin 160^\circ$ aus.)

4.4 Trigonometrische Gleichungen

Inhalt:

- Grundlegende trigonometrische Gleichungen
- Einfache trigonometrische Gleichungen

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Grundlegende trigonometrische Gleichungen lösen.
- Trigonometrische Gleichungen lösen, die in andere Gleichungen umgewandelt werden können.

A - Grundlegende Gleichungen

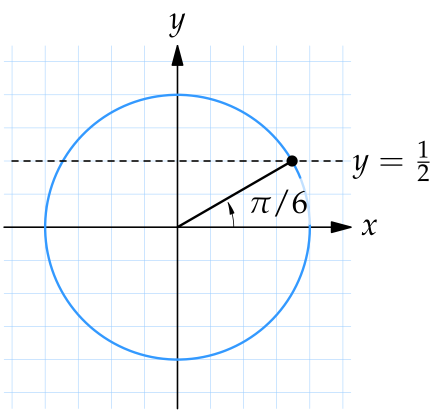
Trigonometrische Gleichungen können sehr kompliziert sein und sind oft nicht einmal analytisch lösbar. Es gibt aber einige grundlegende trigonometrische Gleichungen, wie $\sin x = a$, $\cos x = a$ und $\tan x = a$, die relativ einfache Lösungen haben.

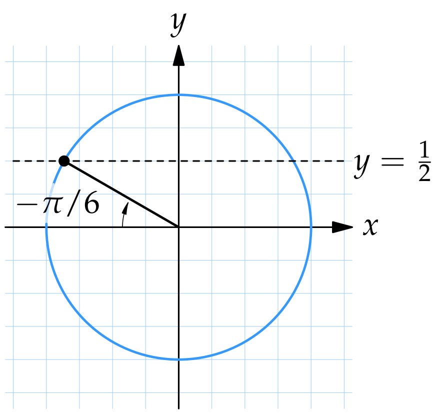
Solche Gleichungen haben im allgemeinen Fall entweder gar keine, oder unendlich viele Lösungen. Wenn man aber den Winkel x irgendwie begrenzt, gibt es endlich viele Lösungen, genauso, wenn man zum Beispiel einen spitzen Winkel sucht.

Beispiel 1

Löse die Gleichung $\sin x = \frac{1}{2}$.

Wir wollen alle Winkel finden, die den Sinus $\frac{1}{2}$ haben. Betrachten wir den Einheitskreis, sehen wir, dass es zwei solche Winkel x gibt.





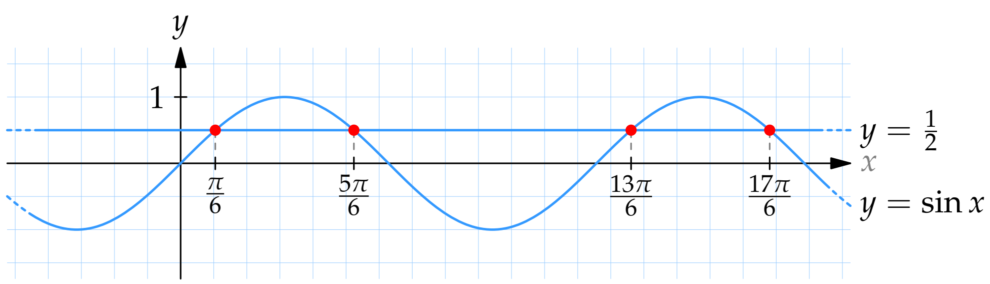
Wir haben hier also die beiden Winkel $30^\circ = \pi/6$ und (durch Symmetrie) $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, die dem y-Wert $\sin x = \frac{1}{2}$ entsprechen. Zwischen 0 und 2π sind dies auch die einzigen solchen Winkel.

Aber nachdem wir zu einem Winkel ein Vielfaches von 2π addieren können, ohne den Sinus zu ändern, haben wir auch folgende Lösungen:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi, \\[2ex] x = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi, \end{cases}$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Dies wird die allgemeine Lösung der Gleichung genannt.

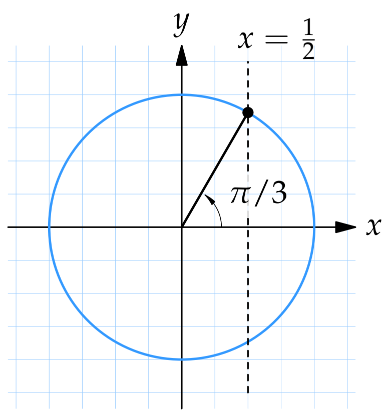
Betrachtet man den Graph von $y = \sin x$, sieht man auch, dass die Gleichung unendlich viele Lösungen hat, nachdem die Kurven $y = \sin x$ und $y = \frac{1}{2}$ unendlich viele Schnittstellen haben.

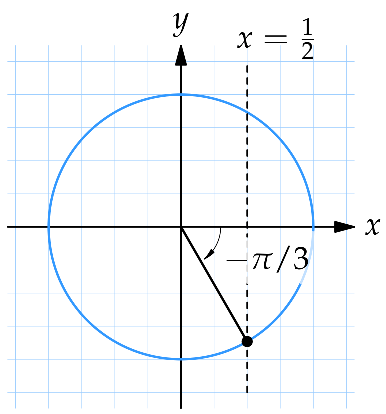


Beispiel 2

Löse die Gleichung $\cos x = \frac{1}{2}$.

Wir betrachten den Einheitskreis.





Wir wissen, dass der Kosinus von $\pi/3$, $\frac{1}{2}$ ist. Betrachten wir den Einheitskreis, sehen wir, dass der Winkel $-\pi/3$ auch den Kosinus $\frac{1}{2}$ hat. Addieren wir ein Vielfaches von 2π zu diesen Winkeln, erhalten wir die allgemeine Lösung,

$$x = \pm\pi/3 + n \cdot 2\pi,$$

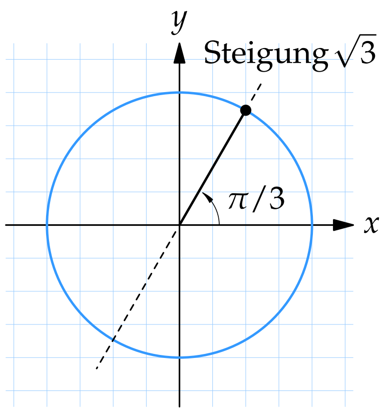
wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

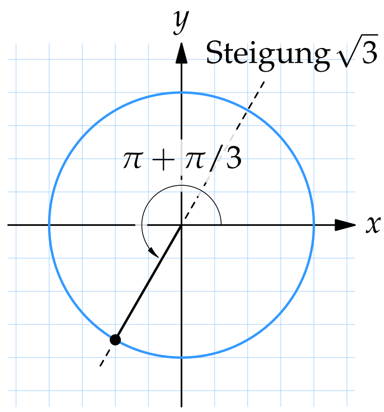
Beispiel 3

Löse die Gleichung $\tan x = \sqrt{3}$.

Wir wissen von vorher, dass der Winkel $x = \pi/3$ die Gleichung erfüllt.

Betrachten wir den Einheitskreis, sehen wir, dass jede halbe Umdrehung des Winkels dieselbe Steigung wie der Winkel hat und daher den selben Tangens.





Daher erhalten wir die allgemeine Lösung, indem wir π mehrmals zur Lösung addieren. So erhalten wir die Lösungen $\pi/3$, $\pi/3 + \pi$, $\pi/3 + \pi + \pi$ etc. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist daher

$$x = \pi/3 + n \cdot \pi,$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

B - Kompliziertere Gleichungen

Wir werden hier einige Beispiele von komplizierteren trigonometrischen Gleichungen geben.

Manche trigonometrische Gleichungen können vereinfacht werden, indem man die trigonometrischen Identitäten benutzt.

Beispiel 4

Löse die Gleichung $\cos 2x - 4\cos x + 3 = 0$.

Wir verwenden $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ und erhalten

$$(2\cos^2 x - 1) - 4\cos x + 3 = 0.$$

Durch Division durch 2 erhalten wir

$$\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0.$$

Wir faktorisieren die linke Seite,

$$(\cos x - 1)^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt, wenn $\cos x = 1$. Diese Gleichung lösen wir wie vorhin und die allgemeine Lösung ist

$$x = 2n\pi.$$

Beispiel 5

Löse die Gleichung $\frac{1}{2}\sin x + 1 - \cos^2 x = 0$.

Durch den Satz des Pythagoras erhalten wir $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ und wir bekommen

$$\tfrac{1}{2}\sin x + \sin^2 x = 0.$$

Wir klammern den Faktor $\sin x$ aus und erhalten

$$\sin x \cdot \left(\tfrac{1}{2} + \sin x\right) = 0.$$

So sehen wir, dass die Lösungen der Gleichung die Gleichungen $\sin x = 0$ oder $\sin x = -\frac{1}{2}$ erfüllen müssen. Diese Gleichungen lösen wir wie in Beispiel 1. Die Lösungen sind

$$\begin{cases} x &= n\pi, \\ x &= -\pi/6 + 2n\pi, \\ x &= 7\pi/6 + 2n\pi. \end{cases}$$

Beispiel 6

Löse die Gleichung $\sin 2x = 4\cos x$.

Durch die Doppelwinkelfunktion für den Kosinus erhalten wir

$$2\sin x\,\cos x - 4\cos x = 0.$$

Dividieren wir durch 2 und klammern den Faktor $\cos x$ aus, erhalten wir

$$\cos x\,\cdot\,(\sin x - 2) = 0.$$

Also müssen die Lösungen dieser Gleichung eine der Gleichungen

- $\cos x = 0$,
- $\sin x = 2$.

erfüllen. Nachdem $\sin x$ nie größer als 1 ist, hat die zweite Gleichung keine Lösungen. Die erste Gleichung hingegen hat die Lösungen $x = \pi/2 + n\cdot\pi$.

Beispiel 7

Löse die Gleichung $4\sin^2 x - 4\cos x = 1$.

Wir verwenden das Gesetz des Pythagoras, und ersetzen $\sin^2 x$ mit $1 - \cos^2 x$. So erhalten wir

$$\begin{aligned} 4(1-\cos^2 x) - 4\cos x &= 1,\\ 4 - 4\cos^2 x - 4\cos x &= 1,\\ -4\cos^2 x - 4\cos x + 4 - 1 &= 0,\\ \cos^2 x + \cos x - \tfrac{3}{4} &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\cos x$, mit den Lösungen

$$\cos x = -\tfrac{3}{2} \quad \text{und} \quad \cos x = \tfrac{1}{2}.$$

Nachdem $\cos x$ nie kleiner als -1 ist, hat die erste Gleichung keine Lösung. Also hat die Gleichung nur dieselben Lösungen wie die Gleichung

$$\cos x = \tfrac{1}{2},$$

die wir im Beispiel 2 gelöst haben.

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor

Tipps fürs Lernen

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung
Nachdem du mit der Theorie und den Übungen fertig bist, solltest Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung machen. Du findest die Links zu den Prüfungen in Deiner „Student Lounge“.

Bedenke folgendes
Lerne die grundlegenden trigonometrischen Identitäten und wie sie verwendet werden, um trigonometrische Ausdrücke zu vereinfachen.

Es ist wichtig mit den grundlegenden trigonometrischen Gleichungen vertraut zu sein, um kompliziertere Gleichungen lösen zu können. Es ist auch wichtig, zu wissen, dass diese Gleichungen unendlich viele Lösungen haben.

Nützliche Websites

- Experimentiere Mit dem Graphen der Funktion $y = a \sin b(x - c)$
(`http://www.ies.co.jp/math/java/trig/ABCsinX/ABCsinX.html`)

4.4 Übungen

Übung 4.4:1

Für welche Winkel v mit $0 \le v \le 2\pi$ ist

a) $\sin v = \frac{1}{2}$

b) $\cos v = \frac{1}{2}$

c) $\sin v = 1$

d) $\tan v = 1$

e) $\cos v = 2$

f) $\sin v = -\frac{1}{2}$

g) $\tan v = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Übung 4.4:2

Löse die Gleichung

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = \frac{1}{2}$

c) $\sin x = 0$

d) $\sin 5x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

e) $\sin 5x = \frac{1}{2}$

f) $\cos 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Übung 4.4:3

Löse die Gleichung

a) $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$

b) $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$

c) $\sin(x + 40^\circ) = \sin 65^\circ$

d) $\sin 3x = \sin 15^\circ$

Übung 4.4:4

Bestimme die Winkel v im Intervall $0^\circ \le v \le 360^\circ$, die die Gleichung $\cos(2v + 10^\circ) = \cos 110^\circ$ erfüllen.

Übung 4.4:5

Löse die Gleichung

a) $\sin 3x = \sin x$

b) $\tan x = \tan 4x$

c) $\cos 5x = \cos(x + \pi/5)$

Übung 4.4:6

Löse die Gleichung

a) $\sin x \cdot \cos 3x = 2 \sin x$

b) $\sqrt{2} \sin x \cos x = \cos x$

c) $\sin 2x = -\sin x$

Übung 4.4:7

Löse die Gleichung

a) $2\sin^2 x + \sin x = 1$

b) $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$

c) $\cos 3x = \sin 4x$

Übung 4.4:8

Löse die Gleichung

a) $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$

b) $\sin x = \sqrt{3}\cos x$

c) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 - \tan x$

5.1 Mathematische Formeln schreiben

Inhalt:

- Mathematische Ausdrücke in LaTeX

Lernziele

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Einfache Formeln in LaTeX schreiben.
- Häufige Fehler vermeiden, die beim Erstellen von Dokumenten mit LaTeX auftreten.

Um Mathematik effizient auf einem Computer in Ihrer persönlichen Hausaufgabe und der Gruppenaufgabe zu schreiben, werden Sie den mathematischen Text in Form eines Syntax schreiben, der LaTeX genannt wird. In diesem Abschnitt lernen Sie den grundlegenden LaTeX-Code, um einfache mathematische Formeln schreiben zu können.

A - Einfache Ausdrücke schreiben

Um mathematische Formatierungen zu beginnen, verwenden Sie das Tag `<math>` und zum Beenden `</math>`. Wenn Sie z.B. die Formel $a + b$ in einer Textumgebung eingeben möchten, schreiben Sie `<math>a+b</math>`.

Einfache mathematische Formeln schreiben sich „straightforward".

Beispiel 1

a) $1 + 2 - 3$ wird geschrieben als `<math>1+2-3</math>`

b) $5/2$ wird geschrieben als `<math>5/2</math>`

c) $4/(2 + x)$ wird geschrieben als `<math>4/(2+x)</math>`

d) $4 < 5$ wird geschrieben als `<math>4 < 5</math>`

Benötigen Sie Symbole, die nicht auf der Tastatur verfügbar sind oder Formeln, die nicht so einfach zu schreiben sind, verwenden Sie hierzu spezielle Befehle. Diese beginnen mit einem Backslash (d.h. \). Zum Beispiel ist `\le` der Befehl, welcher $\le$ erzeugt.

Die folgende Tabelle zeigt Ihnen einige der am häufigsten verwendeten Befehle in LaTeX.

	Beispiel	**LaTeX**	**Kommentar**
Grundrechenarten	$a+b$	`a+b`	
	$a-b$	`a-b`	
	$a\pm b$	`a\pm b`	
	$a\cdot b$	`a\cdot b`	
	a/b	`a/b`	
	$\frac{1}{2}$	`\frac{1}{2}`	Kleiner Bruch
	$\dfrac{a}{b}$	`\dfrac{a}{b}`	Großer Bruch
	(a)	`(a)`	Skalierende Klammern: `\left(...\right)`
Vergleichssymbole	$a=b$	`a=b`	
	$a\ne b$	`a\ne b`	Alternativ: `a\not=b`
	$a<b$	`a< b`	Bem.: Leerzeichen nach „<“
	$a\le b$	`a\le b`	
	$a>b$	`a>b`	
	$a\ge b$	`a\ge b`	
Potenzen und Wurzeln	x^n	`x^{n}`	
	$\sqrt{x}$	`\sqrt{x}`	
	$\sqrt[n]{x}$	`\sqrt[n]{x}`	
Indizes	x_n	`x_{n}`	
Logarithmen	$\lg x$	`\lg x`	
	$\ln x$	`\ln x`	
	$\log x$	`\log x`	
	$\log_a x$	`\log_{a} x`	
Trigonometrie	30°	`30^{\circ}`	
	$\cos x$	`\cos x`	

	$\sin x$	\sin x	
	$\tan x$	\tan x	
	$\cot x$	\cot x	
Pfeile	$\Rightarrow$	\Rightarrow	impliziert
	$\Leftarrow$	\Leftarrow	wird impliziert von
	$\Leftrightarrow$	\Leftrightarrow	ist äquivalent
Verschiedene Symbole	π	\pi	
	$\alpha, \beta, \theta, \varphi$	\alpha, \beta, \theta, \varphi	

Beispiel 2

a) $1 \pm 3 \cdot 5$ wird geschrieben als $1\pm 3\cdot 5$

b) $\frac{1}{2}y \ne x \le z$ wird geschrieben als $\frac{1}{2}y\ne x\le z$

c) $2^{13}\sqrt{3}+\ln y$ wird geschrieben als $2^{13}\sqrt{3}+\ln y$

d) $\tan 30^{\circ}$ wird geschrieben als $\tan 30^{\circ}$

B - Kompliziertere Ausdrücke

Kompliziertere Ausdrücke entstehen durch das Kombinieren einfacher.

Beispiel 3

a) $\sqrt{x+2}$ wird geschrieben als $\sqrt{x+2}$

b) $(a^2)^3 = a^6$ wird geschrieben als $(a^2)^3=a^6$

c) $2^{(2^2)}$ wird geschrieben als $2^{(2^2)}$

d) $\sin\sqrt{x}$ wird geschrieben als $\sin\sqrt{x}$

Beispiel 4

a) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ wird geschrieben als $\sqrt{x+\sqrt{x}}$

b) $\dfrac{x-x^2}{\sqrt{3}}$ wird geschrieben als $\dfrac{x-x^2}{\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{x}{x+\dfrac{1}{x}}$ wird geschrieben als $\dfrac{x}{x+\dfrac{1}{x}}$

d) $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$ wird geschrieben als <math>x_{1,2}=
-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q}</math>

C - Vermeiden Sie häufige Fehler

Einer der häufigsten Fehler beim Editieren mathematischer Ausdrücke ist, die Markierungen $zu Beginn und$ am Ende.

Vergessen Sie nicht, dass Befehle mit einem Backslash (\) beginnen und fügen Sie hinter den Befehlen ein Leerzeichen ein, solange sie nicht von einem neuen Befehl gefolgt werden.

Ein weiterer häufiger Fehler ist es, anstatt des korrekten Symbols für die Multiplikation $\cdot$ (\cdot i LaTeX) einen Stern ($*$) zu verwenden.

Beispiel 5

		LaTeX	Resultat
a)	Vergessen Sie den Backslash nicht (\)	sin x	$sinx$
	Fügen Sie nach dem Befehl ein Leerzeichen ein	\sinx	Error
	Schreibe	\sin x	$\sin x$
b)	Verwenden Sie keinen Stern als Multiplikationszeichen	4*3	$4 * 3$

	Schreibe	`4\cdot 3`	$4 \cdot 3$
c)	Ein Multiplikationszeichen wird normalerweise weggelassen	`a\cdot b`	$a \cdot b$
	Schreibe	`ab`	ab

Hoch- und Tiefstellen

Für Hochstellungen wie bei Potenzen, verwendet man `^`. Für Tiefstellungen `_`. Besteht das hoch- bzw. tiefzustellende Symbol aus mehr als einem Zeichen, muss es in Klammern stehen `{}`.

Ein spezielles, hochgestelltes Symbol ist jenes für Grad (°), welches als `^{\circ}` geschrieben wird.

Beispiel 6

		LaTeX	Resultat
a)	Vergiss nicht ^	`a2`	$a2$
	Schreibe	`a^2`	a^2
b)	Vergiss nicht _	`x1`	$x1$
	Schreibe	`x_1`	x_1
c)	Achte auf Klammern	`a^22`	$a^{2}2$
	Schreibe	`a^{22}`	a^{22}
d)	Verwende „o" nicht als Symbol für Grad	`30^{o}`	30^{o}
	Verwende „0" nicht als Symbol für Grad	`30^{0}`	30^{0}
	Schreibe	`30^{\circ}`	30°

Trennungssymbole

Bei komplexeren Ausdrücken mußt Du Dich vergewissern, die richtige Anzahl von Klammern zu setzen, d.h. stets paarweise „(“ und „)“.

Ein Klammerpaar, welches einen hohen Ausdruck umgibt, sollte so hoch sein wie dieser. Deshalb solltest Du stets den Ausdruck `\left` dem Klammerbefehl vorausstellen, genauso `\right` beim Schließen der Klammer, denn dieser Befehl passt die Höhe der Klammern gerade an.

Beachte, dass geschweifte Klammern im Gegensatz zu runden dafuer verwendet werden, um Argumente in Funktionen zu trennen, z.B. bei Befehlen wie `\sqrt` und `\frac`.

Beispiel 7

		LaTeX	Resultat
a)	Verwende die richtige Anzahl Klammern	`(1-(1-x)`	$(1-(1-x)$
	Schreibe	`(1-(1-x))`	$(1-(1-x))$
b)	Klammern sollten so groß sein wie der Ausdruck	`(\dfrac{a}{b}+c)`	$(\dfrac{a}{b}+c)$
	Schreibe	`\left(\dfrac{a}{b}+c\right)`	$\left(\dfrac{a}{b}+c\right)$
c)	Verwende keine runden Klammern, um Argumente zu trennen	`\frac(1)(2)`	$\frac(1)(2)$
	Schreibe	`\frac{1}{2}`	$\frac{1}{2}$
d)	Verwende keine runden Klammern, um Argumente zu trennen	`\sqrt(a+b)`	$\sqrt(a+b)$
	Vermeide überflüssige Klammern	`\sqrt{(a+b)}`	$\sqrt{(a+b)}$
	Schreibe	`\sqrt{a+b}`	$\sqrt{a+b}$

Brüche

Als Faustregel solltest Du Brüche stets als „kleinen Bruch“ (d.h. mit `\frac`) schreiben, wenn Zähler und Nenner nur aus wenigen Zahlen bestehen und sonst „große Brüche“ (d.h. mit `\dfrac`).

Enthält ein Exponent oder Index einen Bruch, so sollte er zur besseren Lesbarkeit in einer Ebene geschrieben werden, also $5/2$, und nicht als $\frac{5}{2}$.

Beispiel 8

		LaTeX	Resultat
a)	Schreibe Brüche von Zahlen nicht groß	`\dfrac{1}{2}`	$\dfrac{1}{2}$
	Schreibe	`\frac{1}{2}`	$\frac{1}{2}$
	(Ausnahme: Wenn der Bruch neben einem großen steht, sollte dieser selbst auch groß sein.)		
b)	Schreibe Brüche mit Symbolen nicht klein	`\frac{a}{b}`	$\frac{a}{b}$
	Schreibe	`\dfrac{a}{b}`	$\dfrac{a}{b}$
c)	Schreibe komplizierte Brüche nicht klein	`\frac{\sqrt{3}}{2}`	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Schreibe	`\dfrac{\sqrt{3}}{2}`	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
d)	Keine senkrechten Brüche in Exponenten	`a^{\frac{1}{2}}`	$a^{\frac{1}{2}}$
	Schreibe	`a^{1/2}`	$a^{1/2}$

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

Tipps fürs Lernen

Ein Tipp ist, Deine Formeln im Forum oder im Wiki auszuprobieren, wo Du Deine Hausaufgabe machen wirst.

Nützliche Websites

- Eine umfassendere Liste mathematischer Befehle in LaTeX findest Du auf Wikipedia unter (`http://en.wikipedia.org/wiki/Help:Displaying_a_formula`)
- Einen umfassenderen Text über Mathematik in LaTeX findest du unter (`http://www.tex.ac.uk/tex-archive/info/math/voss/mathmode/Mathmode.pdf`).
- Wenn Du mehr über LaTeX wissen möchtest, schaue hier: Wikipedia (`http://en.wikipedia.org/wiki/LaTeX`), The not so Short Introduction to LaTeX (`http://www.ctan.org/tex-archive/info/lshort/english/lshort.pdf`) und LaTeX Wikibook (`http://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX`).
- Die in diesem Wiki verwendete Implementierung von LaTeX ist jsMath (`http://www.math.union.edu/~dpvc/jsMath`).

5.1 Übungen

Übung 5.1:1

Schreibe die folgenden Formeln in LaTeX

a) $2-3+4$

b) $-1+0,3$

c) $-5-(-3)=-5+3$

d) $5/2+1>5/(2+1)$

Übung 5.1:2

Schreibe die folgenden Formeln in LaTeX

a) $3\cdot 4\pm 4$

b) $4x^2-\sqrt{x}$

c) $4\cdot 3^n\geq n^3$

d) $3-(5-2)=-(-3+5-2)$

Übung 5.1:3

Schreibe die folgenden Formeln in LaTeX

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}$

b) $\left(\dfrac{5}{x}-1\right)(1-x)$

c) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$

d) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

Übung 5.1:4

Schreibe die folgenden Formeln in LaTeX

a) $\sin^2 x+\cos x$

b) $\cos v=\cos\dfrac{3\pi}{2}$

c) $\cot 2x=\dfrac{1}{\tan 2x}$

d) $\tan\dfrac{u}{2}=\dfrac{\sin u}{1+\cos u}$

Übung 5.1:5

Schreibe die folgenden Formeln in LaTeX

a) $\sqrt{4+x^2}$

b) $\sqrt[n]{x+y}\neq\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}$

c) $\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}$

d) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^3\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$

Übung 5.1:6

Schreibe die folgenden Formeln in LaTeX

a) $\ln(4\cdot 3)=\ln 4+\ln 3$

b) $\ln(4-3)\neq\ln 4-\ln 3$

c) $\log_2 4=\dfrac{\ln 4}{\ln 2}$

d) $2^{\log_2 4}=4$

Übung 5.1:7

Verbessere den folgenden LaTeX-Code

a) `4^{\frac{3}{4}}(1-(3-4)`

b) `2*sqrt(a+b)`

c) `cotx = \dfrac{1}{2}Sin 20^{o}`

5.2 Mathematische Texte schreiben

Inhalt:

- Allgemeine Hinweise
- Mischen von Formel und Text
- Häufige Fehler

Lernziele

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes können:

- Mathematische Sachverhalte ausdrücken
- Mathematische Sachverhalte erklären

A - Hinweise

B - Erläutern Sie Ihre Lösung

Der wichtigste Hinweis ist:

Erläutern Sie Ihre Lösung stets hinreichend.

Die Lösung eines Problems oder einer Aufgabe darf nicht nur darin bestehen, die verwendete Formel zu erwähnen, sondern muss eine Beschreibung enthalten, wie gedacht wurde. Verwenden Sie Worte, um dies zu tun! Stellen Sie sich vor, Sie würden die Lösung einem Klassenkameraden erklären, der Schwierigkeiten damit hat, die einzelnen Schritte zu begreifen. Sie brauchen nicht jede kleine Rechnung zu erklären, jedoch dürfen Sie keinen wichtigen Schritt auslassen. Wenn Sie diesen Rat befolgen, werden Sie 80% dessen erreicht haben, was nötig ist, um eine angemessene Lösung zu liefern.

C - Schreiben Sie gutes Deutsch

Obwohl dies keine Hausaufgabe im Fach Deutsch ist und der mathematische Inhalt selbstverständlich am wichtigsten ist, sollten Sie trotzdem stets auf Ausdrucksweise und grammatikalische Sauberkeit etc. achten. Wenn Ihre Lösung zu viele sprachliche Fehler aufweist, kann dies einen sehr negativen Eindruck bewirken und damit die Glaubwürdigkeit Ihrer Lösung unterlaufen. Ihre Ausdrucksweise ist wichtig!

D - Schreiben Sie Ihre Lösung zum Schluss sauber auf

Nachdem Sie das Problem gelöst haben, sollten Sie Ihre Lösung aufschreiben. Dabei können Sie sich auf die Präsentation der Lösung konzentrieren, was sogar zu Verbesserungen an der Lösung selbst führen kann. Ein Tipp ist, eine andere Person Ihre Lösung lesen zu lassen, um Unklarheiten zu entdecken. Es ist besser, die Präsentationsphase auf ein späteres Datum zu verschieben, damit Sie, wenn Sie zum ersten Mal das Problem lösen, frei arbeiten können und sich nicht zu früh auf eine bestimmte Lösungsmethode festlegen müssen.

Wenn Sie eine Lösung eingeben, verwenden Sie ein Textformat und keinen Screenshot eines Textverarbeitungsprogramms. Es mag einfacher für Sie sein, die Lösung auf ihrem eigenen PC mit Ihrem bevorzugten Programm zu schreiben, aber im nächsten Schritt wird Ihre Lösung als Teil in der Gruppenarbeit enthalten sein. Deshalb ist es notwendig, dass Ihre Lösung editierbar bleibt, was ein Screenshot nicht leistet.

E - Klare Antworten

Schreiben Sie zum Schluss eine klare Antwort. Dies ist besonders dann notwendig, wenn die Lösung lang und die Antwort auf verschiedene Textstellen verteilt ist. Allerdings gibt es auch Probleme vom Typ „Zeigen Sie …“. Dann ist zum Schluss keine separate Antwort nötig.

Vereinfachen Sie Ihre Antwort so weit wie möglich.

Beispiel 1

a) Antworten Sie nicht $\sqrt{8}$, sondern $2\sqrt{2}$.

b) Antworten Sie nicht $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin 2x$, sondern $1 + 2\sin 2x$.

c) Antworten Sie nicht $x = \begin{cases} \pi/4 + n\pi \\ 3\pi/4 + n\pi \end{cases}$ $(n \text{ ganzzahlig})$, sondern $x = \pi/4 + n\pi/2 \ \ (n \text{ ganzzahlig})$.

F - Gehen Sie schrittweise vor

Es kommt vor, dass Sie so genannte Scheinlösungen erhalten, wenn Sie Gleichungen lösen. Erklären Sie in diesem Fall, warum diese auftauchten und testen Sie die Lösungen, um zu erkennen, welche tatsächlich Lösungen sind.

Verlorene Lösungen. Wenn z.B. ein Faktor auf beiden Seiten einer Gleichung herausgekürzt wird und nicht bemerkt wird, dass die Gleichung, die entsteht, wenn man den betreffenden Faktor gleich 0 setzt, zusätzliche Lösungen liefert.

Beispiel 2

Wenn Sie die Gleichung $2x^2 - 5x = 0$ „lösen“, indem $5x$ auf die rechte Seite schreiben,

$$2x^2 = 5x,$$

dann x auf beiden Seiten kürzen

$$2x = 5,$$

verlieren Sie $x = 0$.

Wenn Sie anstatt dessen die linke Seite faktorisieren,

$$x(2x - 5) = 0,$$

finden Sie beide Lösungen: $x = 0$ und $2x - 5 = 0$ (d.h. $x = \frac{5}{2}$).

Gehen Sie zu Übung 2.1:3 um Faktorisieren zu üben.

Ein wichtiger Teil des Lösungsprozesses ist es, Plausibilitätsmethoden zu nutzen, um eine Lösung zu prüfen. Zum Beispiel kann man die Lösung einer Gleichung wieder in die Gleichung einsetzen, um sicher zu gehen, dass diese wirklich eine Lösung ist, weil man sich verrechnet haben könnte (Vorsicht: verwechseln Sie diese Vorgehensweise nicht mit dem Untersuchen von Scheinlösungen). Diese Vorgehensweise können Sie auch für Teilschritte durchführen.

Ein weiterer Punkt ist abzuschätzen, ob die Antwort plausibel ist. Setzen Sie Werte für einige der Parameter ein und vergewissern Sie sich damit, dass Sie die richtige Lösung haben. Was passiert z.B. wenn $a = 0$, $a = 1$ oder wenn a nach unendlich geht.

G - Zeichnen Sie klare Bilder

Ein Bild kann oft viel besser als Text eingeführte Symbole erklären oder verdeutlichen. Verwenden Sie Bilder! Vergessen Sie nicht, diese übersichtlich zu zeichnen und überladen Sie sie nicht mit zu vielen Details. Es ist oft besser, mehrere, fast identische Bilder zu haben, die jeweils einen Gedanken erläutern, als ein großes Bild, das alles enthält.

H - Behandeln Sie Formeln als Teil des Texts

Es ist wichtig, dass Sie Ihre Lösung auf eine Weise aufschreiben, welche es anderen einfach macht, ihr zu folgen. Um Ihnen zu helfen, präsentieren wir Ihnen hier einige Beispiele, um einige Tipps und häufige Fehler zu demonstrieren, welche auftauchen, wenn man Formeln und Text mischt.

Rat zum Mischen von Formeln und Text:

- Schreiben Sie den erläuternden Text in die vorige Linie
- Beachten Sie die Interpunktion
- Schreiben Sie Gleichungen eingerückt oder zentriert

Formeln sollten nicht als etwas betrachtet werden, welches ohne Bezug zum Text ist (bzw. umgekehrt), sondern als ein Baustein mit einer klaren Linie. Schreiben Sie deshalb Text nicht eingeklammert hinter Formeln, sondern als Erläuterung, die dem Text voraus gehen.

Schlecht

Formel (text text text text text text …)
Formel (text text text text text text …)

Gut

Text text text text …

Formel.

Text text text text …

Formel.

Formeln können als Teil des Text oder abgesetzt geschrieben werden. Wenn Formeln vom Text abgesetzt werden, erscheinen Sie in einer eigenen Zeile und sind entweder eingerückt oder zentriert.

Gut

… text text text *Formel* text.

Text text text

Formel

text text text text text text …

(Beachten Sie, dass das Einrücken sowohl die Formel als auch den Text hervorhebt.)

Ein häufiger Fehler ist es, einen Doppelpunkt vor einer Formel zu verwenden.

Schlecht

…was zeigt, dass:

Formel

Wir starten mit…

(Beachten Sie, dass hinter der Formel auch ein Punkt sein sollte.)

Da eine Formel ein Teil des Texts ist, sollte sie auch als Teil des Satzes betrachtet werden. Achten Sie deshalb auf die korrekte Interpunktion. Vergessen Sie insbesondere nicht den Punkt am Ende eines Satzes.

Gut

…und damit gilt

Formel.

Der nächste Schritt ist…

(Beachten Sie den Punkt hinter der Formel.)

Eine schlechte Gewohnheit ist umfassendes Nummerieren. Ein Beispiel hierfür ist, jeden Schritt in einer Lösung zu nummerieren. Die zusätzlichen Ziffern helfen nicht, lenken aber ab. Selten müssen Sie später auf einzelne Schritte innerhalb einer Rechnung verweisen, und wenn Sie müssen, können Sie oft etwas wie „als wir die Gleichung quadrierten“ etc. schreiben.

Schlecht

3. text text text text text text text text …

Formel

4. text text text text text text text text …

Manchmal möchte man auf eine abgesetzte Formel oder Gleichung verweisen. In diesem Fall kann dies eine Nummer (oder ein Stern) sein in Klammern auf dem rechten oder linken Rand.

Gut

…text text text text text text text text

$$\textit{Formel}. \tag{1}$$

Text text (1) text text text text text text

$$\textit{Formel}.$$

Text text text text text text text text…

I - Häufige Fehler

Seien Sie vorsichtig mit Pfeilen und ähnlichem

Es gibt einen Unterschied zwischen $\Rightarrow$ (Implikationspfeil), $\Leftrightarrow$ (Äquivalenzpfeil) und $=$ (Gleichheitszeichen). Für zwei Gleichungen, für die direkt bekannt ist, dass sie die gleichen Lösungen haben, verwendet man $\Leftrightarrow$, um dies auszudrücken.

Wenn wir jedoch „Gleichung 1 $\Rightarrow$ Gleichung 2“ schreiben, heisst dies, dass Gleichung 2 alle Lösungen hat, die auch Gleichung 1 hat, nicht aber umgekehrt. (D.h. Gleichung 2 könnte mehr Lösungen haben.)

Beispiel 3

a) $x+5=3 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2$

b) $x^2-4x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2-5=0$

c) $\sqrt{x}=x-2 \quad \Rightarrow \quad x=(x-2)^2$

Oft kümmert man sich nicht darum, das Symbol $\Leftrightarrow$ zwischen verschiedene Schritte einer Lösung zu schreiben, solange sie in verschiedenen Zeilen stehen (und damit die Äquivalenz implizieren). Oft ist es besser, erklärenden Text zu verwenden als Pfeile in den einzelnen Schritten. Verwenden Sie den Implikationspfeil keinesfalls als allgemeines Symbol zur Fortsetzung einer Lösung (im Sinne von „der nächste Schritt ist“).

Das Gleichheitszeichen ($=$) wird üblicherweise auf zwei Arten benutzt. Erstens, um auszudrücken, dass zwei Dinge gleich sind, d.h. $(x-2)^2 = x^2-4x+4$, was für alle x gilt und zweitens in Gleichungen, wo beide Seiten gleich sind für bestimmte x. Zum Beispiel gilt $(x-2)^2 = 4$ nur für $x = 0$ oder $x = 4$. Sie sollten diese zwei verschiedenen Verwendungen nicht durcheinanderbringen.

Beispiel 4
Schreiben Sie nicht
$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 4$$
wenn Sie die Gleichung $x^2 - 2x + 1 = 4$ lösen, da dies zu Fehlschlüssen führen kann.

Schreiben Sie eher
$$x^2 - 2x + 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 4.$$

(Es gibt auch noch einen dritten Sinn für die Verwendung des Gleichheitszeichens, der darin besteht, einen Ausdruck oder eine Zuordnungsvorschrift zu definieren.)

Der einfache Pfeil ($\rightarrow$) wird in der Mathematik oft verwendet, um mit verschiedenen Arten von Grenzwerten umzugehen: $a \rightarrow \infty$ bedeutet, dass a zunimmt und nicht beschränkt ist (d.h. nach Unendlich geht). Sie werden vermutlich keinen einzigen einfachen Pfeil in diesem Kurs brauchen.

Gehen Sie nicht unbedacht mit Klammern um

Da Multiplikation und Division eine höhere Priorität haben als Addition und Subtraktion, muss man Klammern nur verwenden, wenn Addition und Subtraktion zuerst durchgeführt werden sollen.

Beispiel 5

a) Schreiben Sie nicht $1 + x/\cos x$, wenn Sie tatsächlich meinen $(1+x)/\cos x$.

b) Schreiben Sie nicht $1 + (1/\sin x)$, wenn $1 + 1/\sin x$ reicht (auch wenn der erste Ausdruck formal nicht falsch ist).

Wenn Sie mit algebraischen Ausdrücken arbeiten, lässt man normalerweise das Zeichen für die Multiplikation weg. Zum Beispiel schreibt man kaum $4 \cdot x \cdot y \cdot z$, sonder eher $4xyz$.

Der Verzicht auf das Multiplikationszeichen behandelt eine solche prioritär gegenüber anderen Multiplikationen und Divisionen (nicht aber gegenüber Potenzen). Wenn man $1/2R$ schreibt, heißt dies $1/(2R)$ und nicht $(1/2)R$. Da dies eine Quelle für Mißverständnisse sein könnte, ist es nicht unüblich, die Klammern in beiden Situationen zu schreiben.

Argumente von grundlegenden elementaren Funktionen werden ebenfalls ohne Klammer geschrieben. Deshalb sollte Sie nicht schreiben:
$$\cos(x), \quad \sin(x), \quad \tan(x), \quad \cot(x), \quad \lg(x) \quad \text{und} \quad \ln(x)$$

sondern

$$\cos x, \quad \sin x, \quad \tan x, \quad \cot x, \quad \lg x \quad \text{und} \quad \ln x.$$

Tatsächlich sollten Sie $\cos 2x$ und nicht $\cos(2x)$ schreiben (da das Argument $2x$ durch das Aneinanderschreiben stärker gebunden ist), aber Klammern sind nötig, wenn Sie $\sin(x+y)$ schreiben, genauso bei $\sin(x/2)$, $\sin(-x)$ oder $(\sin x)^2$ (wobei Sie letzteres auch als $\sin^2 x$ schreiben können).

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

Tipps fürs Lernen

Nützliche Websites

- Ein Video Kurs über mathematische Texte schreiben von Donald Knuth (`http://scpd.stanford.edu/knuth/index.jsp`). Ein Auszug über den Kurs ist erhältlich in source form (`http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/papers/mathwriting.tex.gz`) (eine .gz - gezippte Datei, zu öffnen mit gzip unter Unix/Linux oder mit winzip unter Windows) oder in Auszügen von Google books (`http://books.google.com/books?id=dDOehHMbUMcC&printsec=frontcover&dq=inauthor:Donald+inauthor:Ervin+inauthor:Knuth&lr=&ei=JbN1SZfvFZysMqPPhM8M&hl=sv#PPP9,M1`).

5.2 Übungen

Übung 5.2:1

Welche der Pfeile $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ oder $\Leftrightarrow$ sollten zwischen den folgenden Gleichungen (anstelle des Fragezeichens) eingefügt werden?

a) $\tan x(\sin x + 1) = \tan x \quad ? \quad \sin x + 1 = 1$

b) $\sqrt{x-1} = x + 1 \quad ? \quad x - 1 = (x+1)^2$

c) $x^2 - 6x + 1 = 0 \quad ? \quad (x-3)^2 - 9 + 1 = 0$

Übung 5.2:2

Kritisiere den folgenden Auszug einer Lösung, die von einem Studenten geschrieben wurde.

> Zu Beginn zeigen wir, dass Monikas Lösung korrekt ist bis auf den letzten Schritt, wo sie einen Fehler macht.
>
> $$cosxtan\frac{3x}{2} = \frac{1}{tanx + cot2x}$$
>
> Der Nenner der linken Seite wird auf beiden Seiten multipliziert.
>
> $$cosxtan\frac{3x}{2}(tanx + cot2x) = 1$$

Übung 5.2:3

Kritisiere den folgenden Auszug einer Lösung, die von einem Studenten geschrieben wurde.

> $$\frac{1}{2}\cdot(\sin 4x + \sin 2x)\cdot\cos x^2 + \frac{1}{2}\cdot(\sin 4x + \sin 2x)\sin x^2 - \sin 2x\cdot\sin x^2 = \frac{3}{4}$$
>
> ---Nun können wir die Klammern faktorisieren, weil sie gleich $(\frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x)\cdot(\cos x^2 + \sin x^2)$ sind und der Satz des Pythagoras $(\cos x^2 + \sin x^2) = 1$ liefert:
>
> $$\frac{1}{2}\cdot(\sin 4x + \sin 2x) - \sin 2x\cdot\sin x^2 = \frac{3}{4}$$

Übung 5.2:4

Kritisiere den folgenden Auszug einer Lösung, die von einem Studenten geschrieben wurde.

Ich war etwas in Eile als ich die Aufgabe letze Woche gelöst habe... Hier eine aktualisierte Version:

$3 \cdot 2^x = 4 \cdot \sqrt[x]{9}$

$3 \cdot 2^x = 2^2 \cdot \sqrt[x]{2^2}$

$3 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 3^{\frac{2}{x}}, x \neq 0$ ($x = 0$ ist keine Lösung)

klammere x aus dem Exponenten der LS aus und 2 aus der RS

$(3^{\frac{1}{x}} \cdot 2)^x = (2 \cdot 3^{\frac{1}{x}})^2$

Übung 5.2:5

Kritisiere den folgenden Auszug einer Lösung, die von einem Studenten geschrieben wurde.

Multipliziere beide Seiten mit 1-3tan²x:

$tan(x)(3tan(x) - tan^3(x) + 2sin^2(x) - 2sin^2(x)3tan^2(x) = 0 <=> \frac{sin(x)}{cos(x)}(\frac{3sin(x)}{cos(x)}$ -

Kürze den Faktor $sin^2(x)$

$\frac{3}{cos^2(x)} - \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} + 2 - 6\frac{sin^2(x)}{cos^2(x)}$

Übung 5.2:6

Kritisiere den folgenden Auszug einer Lösung, die von einem Studenten geschrieben wurde.

Dies ist eine korrigierte Version. Ich nehme an, dass ich das Fenster mit der Lösung der Gruppe aktualisieren sollte.

Meine ursprüngliche Lösung ist:

Das Problem ist

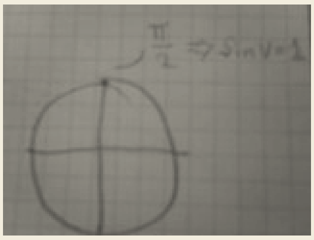
$Sinx + Cosx = \sqrt{2} * Sin2x$

Trigonometrie hat fast so viele Formeln wie Sterne am Himmel sind. Wir starten deshalb damit, einige Zeilen zu schreiben, um ein besseres Verständnis für das zu bekommen, was wir suchen.

Übung 5.2:7

Kritisiere den folgenden Auszug einer Lösung, die von einem Studenten geschrieben wurde.

Wir lösen nun $\sin 2x$ nach x und ersetzen $2x$ mit V . Auf dem Einheitskreis sehen wir, dass, wenn $V = \frac{\pi}{2}$, dann ist $\sin V = 1$.



Hierbei müssen wir uns erinnern, so viele Iterationen wie möglich zu addieren, und wir bekommen immer noch dieselbe Antwort!

$V = \frac{\pi}{2} + 2\pi * n$

Übung 5.2:8

Kritisiere den folgenden Auszug einer Lösung, die von einem Studenten geschrieben wurde.

1. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$

Mit der Winkelverdopplungsgleichung $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ **erhalten wir**

$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$ and $\cos^2 3x = \frac{\cos 6x + 1}{2}$

In 1 eingesetzt ergibt:

2. $\frac{\cos 2x + 1}{2} + \cos^2 2x + \frac{\cos 6x + 1}{2} = \frac{3}{2}$

Übung 5.2:9

Kritisiere den folgenden Auszug einer Lösung, die von einem Studenten geschrieben wurde.

$\cos x \tan(3x/2) = 1/(\tan x + \cot 2x)$

Ich ersetze tan und cot durch ihre entsprechenden Cossinus und Sinus.

$\cos x * (\sin(3x/2)/\cos(3x/2)) = 1/((\sin x/\cos x) + (\cos 2x/\sin 2x) - - >$

$\cos x * (\sin(3x/2)/\cos(3x/2)) * ((\sin x/\cos x) + (\cos 2x/\sin 2x)) = 1$

Antworten zu den Aufgaben

Numerische Berechnungen

1.1:1 a) -7 b) 1 c) 11 d) 1

1.1:2 a) 0 b) -1 c) -25 d) -19

1.1:3 a) natürliche, ganze, rationale
b) ganze, rationale
c) natürliche, ganze, rationale
d) ganze, rationale
e) ganze, rationale
f) natürliche, ganze, rationale

1.1:4 a) rationale
b) natürliche, ganze, rationale
c) irrationale
d) natürliche, ganze, rationale
e) irrationale
f) irrationale

1.1:5 a) $\frac{3}{5} < \frac{5}{3} < 2 < \frac{7}{3}$
b) $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < -\frac{3}{10} < -\frac{1}{5}$
c) $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{21}{34} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$

1.1:6 a) 1,167 b) 2,250 c) 0,286
d) 1,414

1.1:7 a) rationale, $\frac{314}{100} = \frac{157}{50}$
b) rationale, $\frac{31413}{9999} = \frac{10471}{3333}$
c) rationale, $\frac{1999}{9990}$
d) irrationale

1.2:1 a) $\frac{93}{28}$ b) $\frac{3}{35}$ c) $-\frac{7}{30}$ d) $\frac{47}{60}$
e) $\frac{47}{84}$

1.2:2 a) 30 b) 8 c) 84 d) 225

1.2:3 a) $\frac{19}{100}$ b) $\frac{1}{240}$

1.2:4 a) $\frac{6}{7}$ b) $\frac{16}{21}$ c) $\frac{1}{6}$

1.2:5 a) $\frac{105}{4}$ b) -5 c) $\frac{8}{55}$

1.2:6 $\frac{152}{35}$

1.3:1 a) 72 b) 3 c) -125 d) $\frac{27}{8}$

1.3:2 a) 2^6 b) 2^{-2} c) 2^0

1.3:3 a) 3^{-1} b) 3^5 c) 3^4 d) 3^{-3}
e) 3^{-3}

1.3:4 a) 4 b) 3 c) 625 d) 16 e) $\frac{1}{3750}$

1.3:5 a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 27 d) 2209 e) 9
f) $\frac{25}{3}$

1.3:6 a) $256^{1/3} > 200^{1/3}$
b) $0{,}4^{-3} > 0{,}5^{-3}$
c) $0{,}2^5 > 0{,}2^7$
d) $\left(5^{1/3}\right)^4 > 400^{1/3}$
e) $125^{1/2} > 625^{1/3}$
f) $3^{40} > 2^{56}$

Algebra

2.1:1 a) $3x^2 - 3x$
b) $xy + x^2y - x^3y$
c) $-4x^2 + x^2y^2$
d) $x^3y - x^2y + x^3y^2$
e) $x^2 - 14x + 49$
f) $16y^2 + 40y + 25$
g) $9x^6 - 6x^3y^2 + y^4$
h) $9x^{10} + 30x^8 + 25x^6$

2.1:2 a) $-5x^2 + 20$ b) $10x - 11$ c) $54x$
d) $81x^8 - 16$ e) $2a^2 + 2b^2$

2.1:3 a) $(x+6)(x-6)$
b) $5(x+2)(x-2)$
c) $(x+3)^2$
d) $(x-5)^2$
e) $-2x(x+3)(x-3)$
f) $(4x+1)^2$

2.1:4 a) 5 vor x^2, 3 vor x
b) 2 vor x^2, 1 vor x

c) 6 vor x^2, 2 vor x

2.1:5 a) $\dfrac{1}{1-x}$ b) $-\dfrac{1}{y(y+2)}$

c) $3(x-2)(x-1)$ d) $\dfrac{2(y+2)}{y^2+4}$

2.1:6 a) $2y$ b) $\dfrac{-x+12}{(x-2)(x+3)}$

c) $\dfrac{b}{a(a-b)}$ d) $\dfrac{a(a+b)}{4b}$

2.1:7 a) $\dfrac{4}{(x+3)(x+5)}$

b) $\dfrac{x^4-x^3+x^2+x-1}{x^2(x-1)}$

c) $\dfrac{ax(a+1-x)}{(a+1)^2}$

2.1:8 a) $\dfrac{x}{(x+3)(x+1)}$ b) $\dfrac{2(x-3)}{x}$

c) $\dfrac{x+2}{2x+3}$

2.2:1 a) $x=1$ b) $x=6$ c) $x=-\frac{3}{2}$
d) $x=-\frac{13}{3}$

2.2:2 a) $x=1$ b) $x=\frac{5}{3}$ c) $x=2$
d) $x=-2$

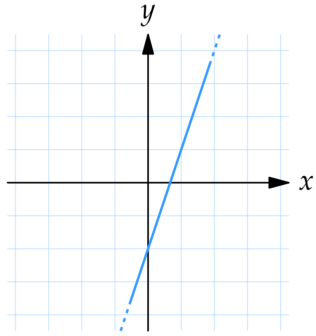
2.2:3 a) $x=9$ b) $x=\frac{7}{5}$ c) $x=\frac{4}{5}$
d) $x=\frac{1}{2}$

2.2:4 a) $-2x+y=3$ b) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

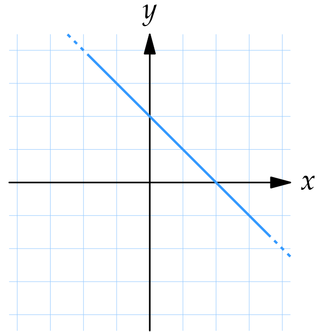
2.2:5 a) $y=-3x+9$ b) $y=-3x+1$
c) $y=3x+5$ d) $y=-\frac{1}{2}x+5$
e) $k=\frac{8}{5}$

2.2:6 a) $(-\frac{5}{3},0)$ b) $(0,5)$ c) $(0,-\frac{6}{5})$
d) $(12,-13)$ e) $(-\frac{1}{4},\frac{3}{2})$

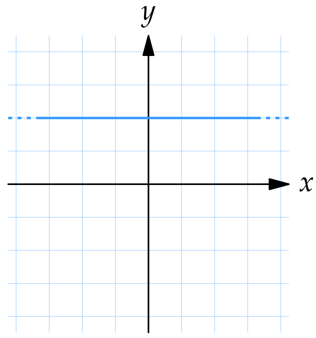
2.2:7 a)



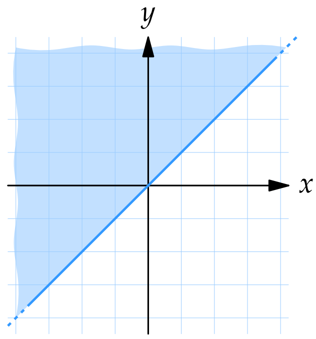
b)



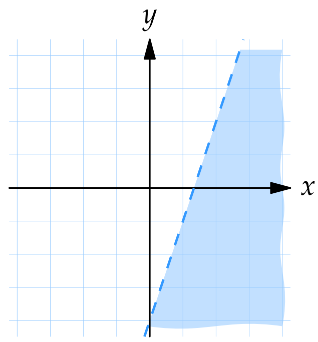
c)

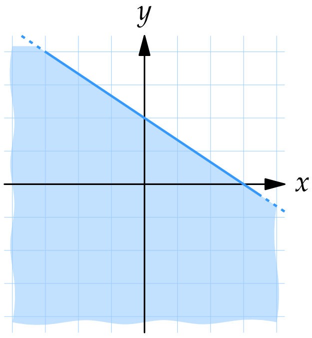


2.2:8 a)



b)



c) 

2.2:9 a) 4 Einheiten b) 5 Einheiten
c) 6 Einheiten

2.3:1 a) $(x-1)^2-1$ b) $(x+1)^2-2$
c) $-(x-1)^2+6$ d) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$

2.3:2 a) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y_1 = -5 \\ y_2 = 3 \end{cases}$

c) keine (reelle) Lösung

d) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{13}{2} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{3}{5} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} \\ x_2 = 2 \end{cases}$

2.3:3 a) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = -8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 12 \end{cases}$

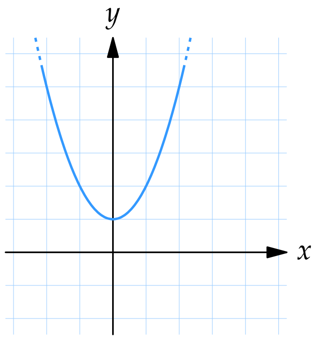
e) $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 8 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$

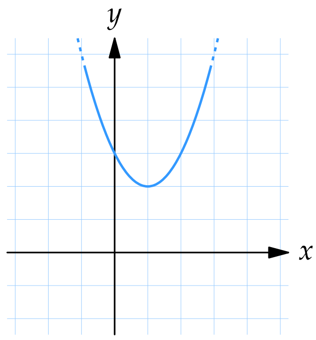
2.3:4 a) $ax^2-ax-2a=0\,,$
b) $ax^2-2ax-2a=0\,,$
c) $ax^2-(3+\sqrt{3}\,)ax+3\sqrt{3}\,a=0\,,$
wobei $a \neq 0$ eine Konstante ist.

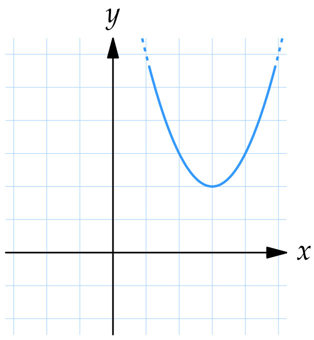
2.3:5 a) Zum Beispiel $x^2+14x+49=0$
b) $3 < x < 4$
c) $b=-5$

2.3:6 a) 0 b) -2 c) $\frac{3}{4}$

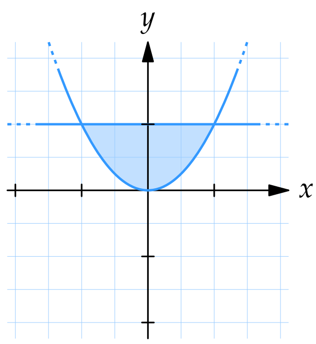
2.3:7 a) 1 b) $-\frac{7}{4}$ c) kein Maximum

2.3:8 a) 

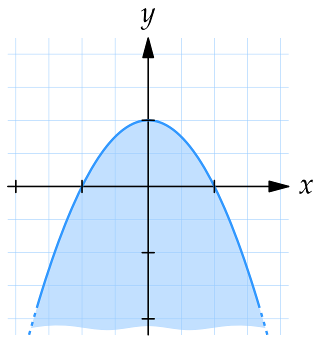
b) 

c) 

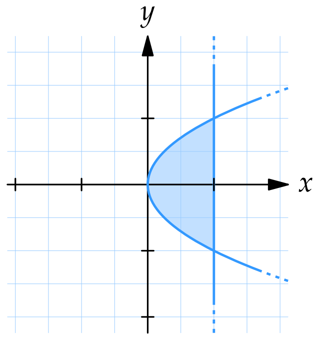
2.3:9 a) $(-1,0)$ und $(1,0)$
b) $(2,0)$ und $(3,0)$
c) $(1,0)$ und $(3,0)$

2.3:10 a) 

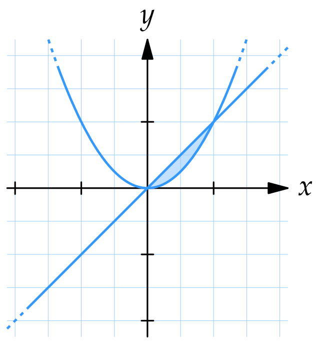
b)



c)



d)



Wurzeln und Logarithmen

3.1:1 a) $2^{1/2}$ b) $7^{5/2}$ c) $3^{4/3}$ d) $3^{1/4}$

3.1:2 a) 3 b) 3 c) nicht definiert
d) $5^{11/6}$ e) 12 f) 2 g) -5

3.1:3 a) 3 b) $4\sqrt{3}/3$ c) $2\sqrt{5}$
d) $2-\sqrt{2}$

3.1:4 a) 0,4 b) 0,3 c) $-4\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{3}$

3.1:5 a) $\sqrt{3}/3$ b) $7^{2/3}/7$ c) $3-\sqrt{7}$
d) $(\sqrt{17}+\sqrt{13})/4$

3.1:6 a) $6+2\sqrt{2}+3\sqrt{5}+\sqrt{10}$
b) $-(5+4\sqrt{3})/23$
c) $\frac{2}{3}\sqrt{6}+\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{2}{5}\sqrt{10}-\frac{2}{5}\sqrt{5}$
d) $(5\sqrt{3}+7\sqrt{2}-\sqrt{6}-12)/23$

3.1:7 a) $\sqrt{5}-\sqrt{7}$ b) $-\sqrt{35}$ c) $\sqrt{17}$

3.1:8 a) $\sqrt[3]{6}>\sqrt[3]{5}$
b) $7>\sqrt{7}$
c) $\sqrt{7}>2{,}5$
d) $\sqrt[3]{2}\cdot 3>\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{3}\right)^3$

3.2:1 $x=5$

3.2:2 $x=1$

3.2:3 $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

3.2:4 keine Lösung.

3.2:5 $x=1$

3.2:6 $x=\frac{5}{4}$

3.3:1 a) $x=3$ b) $x=-1$ c) $x=-2$
d) $x=4$

3.3:2 a) -1 b) 4 c) -3 d) 0 e) 2
f) 3 g) 10 h) -2

3.3:3 a) 3 b) $-\frac{1}{2}$ c) -3 d) $\frac{7}{3}$ e) 4
f) -2 g) 1 h) $\frac{5}{2}$

3.3:4 a) 1 b) 0 c) $-\frac{1}{2}\lg 3$

3.3:5 a) 5 b) 0 c) 0 d) 0 e) -2
f) e^2

3.3:6 a) 1,262 b) 1,663 c) 4,762

3.4:1 a) $x=\ln 13$ b) $x=\dfrac{\ln 2-\ln 13}{1+\ln 3}$
c) $x=\dfrac{\ln 7-\ln 3}{1-\ln 2}$

3.4:2 a) $\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$
b) $x=\ln\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$
c) keine Lösung

3.4:3 a) $x = -\dfrac{1}{\ln 2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)^2 - 1}$

b) $x = \frac{5}{2}$

c) $x = 1$

Trigonometrie

4.1:1 a) 90° und $\pi/2$ rad

b) 135° und $3\pi/4$ rad

c) -240° und $-4\pi/3$ rad

d) 2910° und $97\pi/6$ rad

4.1:2 a) $\pi/4$ rad

b) $3\pi/4$ rad

c) $-7\pi/20$ rad

d) $3\pi/2$ rad

4.1:3 a) $x = 50$ b) $x = 5$ c) $x = 15$

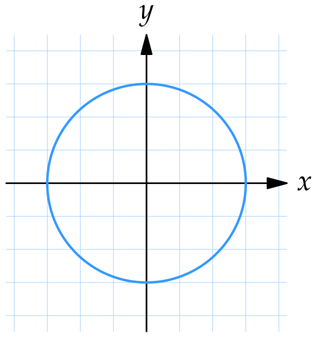
4.1:4 a) 5 Einheiten b) $\sqrt{61}$ Einheiten

c) $(2, 0)$

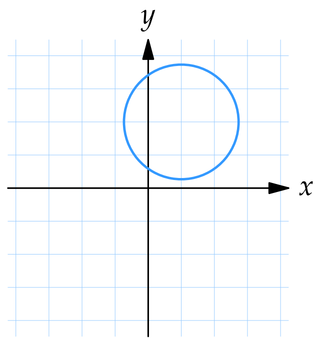
4.1:5 a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

b) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 13$

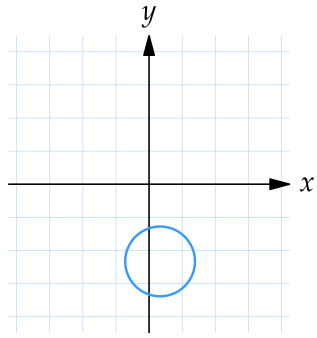
4.1:6 a)



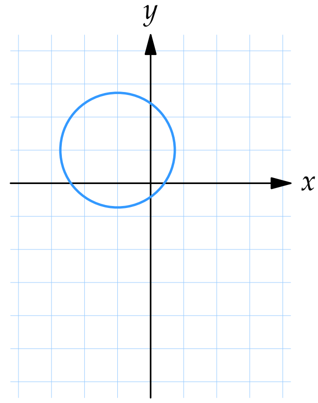
b)



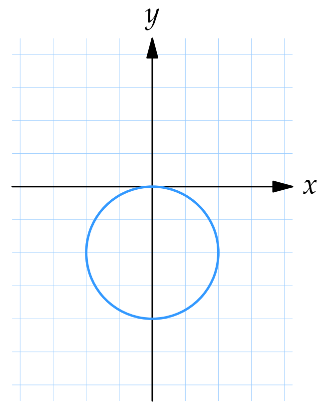
c)



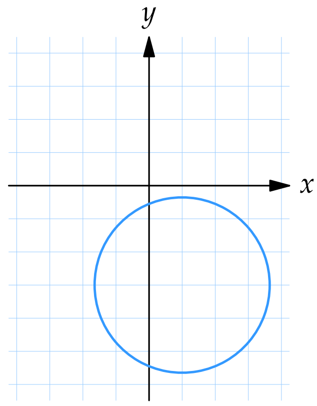
4.1:7 a)

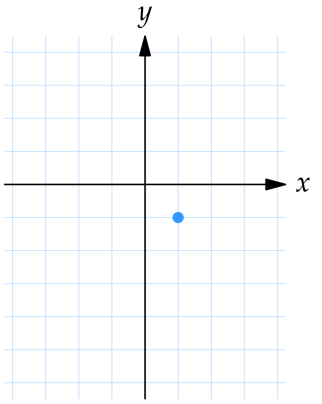


b)



c)



d) 

4.1:8 $10/\pi$ Vollwinkel $\approx 3{,}2$ Vollwinkel

4.1:9 $32\pi/3\ \text{cm}^2 \approx 33{,}5\ \text{cm}^2$

4.1:10 $x = 9$ dm

4.2:1 a) $x = 13 \cdot \tan 27° \approx 6{,}62$
b) $x = 25 \cdot \cos 32° \approx 21{,}2$
c) $x = 14/\tan 40° \approx 16{,}7$
d) $x = 16/\cos 20° \approx 17{,}0$
e) $x = 11/\sin 35° \approx 19{,}2$
f) $x = 19/\tan 50° \approx 15{,}9$

4.2:2 a) $\tan v = \frac{2}{5}$ b) $\sin v = \frac{7}{11}$
c) $\cos v = \frac{5}{7}$ d) $\sin v = \frac{3}{5}$
e) $v = 30°$ f) $\sin(v/2) = \frac{1}{3}$

4.2:3 a) -1 b) 1 c) 0 d) 0
e) $1/\sqrt{2}$ f) $\sqrt{3}/2$

4.2:4 a) $\sqrt{3}/2$ b) $\frac{1}{2}$ c) -1 d) 0
e) $1/\sqrt{3}$ f) $\sqrt{3}$

4.2:5 a) $-1/\sqrt{2}$ b) 1 c) $\sqrt{3}/2$
d) -1

4.2:6 $x = \sqrt{3} - 1$

4.2:7 Der Fluss ist $= \dfrac{10}{\sqrt{3}-1}$ m $\approx$ 13,7 m breit.

4.2:8 $\ell \cos\gamma = a\cos\alpha - b\cos\beta$

4.2:9 Abstand $= \sqrt{205 - 48\sqrt{3}} \approx 11{,}0$ km

4.3:1 a) $v = 9\pi/5$ b) $v = 6\pi/7$
c) $v = 9\pi/7$

4.3:2 a) $v = \pi/2$ b) $v = 3\pi/5$

4.3:3 a) $-a$ b) a c) $\sqrt{1-a^2}$
d) $\sqrt{1-a^2}$ e) $-a$
f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-a^2} + \dfrac{1}{2} \cdot a$

4.3:4 a) $1 - b^2$ b) $\sqrt{1-b^2}$
c) $2b\sqrt{1-b^2}$ d) $2b^2 - 1$
e) $\sqrt{1-b^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + b \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
f) $b \cdot \dfrac{1}{2} + \sqrt{1-b^2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4.3:5 $\cos v = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$, $\tan v = \dfrac{5}{2\sqrt{6}}$

4.3:6 a) $\sin v = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan v = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}$
b) $\cos v = -\dfrac{\sqrt{91}}{10}$, $\tan v = -\dfrac{3}{\sqrt{91}}$
c) $\sin v = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos v = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

4.3:7 a) $\sin(x+y) = \dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$
b) $\sin(x+y) = \dfrac{3\sqrt{21}+8}{25}$

4.4:1 a) $v = \pi/6$, $v = 5\pi/6$
b) $v = \pi/3$, $v = 5\pi/3$
c) $v = \pi/2$
d) $v = \pi/4$, $v = 5\pi/4$
e) keine Lösung
f) $v = 11\pi/6$, $v = 7\pi/6$
g) $v = 5\pi/6$, $v = 11\pi/6$

4.4:2 a) $\begin{cases} x = \pi/3 + 2n\pi \\ x = 2\pi/3 + 2n\pi \end{cases}$
b) $\begin{cases} x = \pi/3 + 2n\pi \\ x = 5\pi/3 + 2n\pi \end{cases}$

c) $x = n\pi$

d) $\begin{cases} x = \pi/20 + 2n\pi/5 \\ x = 3\pi/20 + 2n\pi/5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = \pi/30 + 2n\pi/5 \\ x = \pi/6 + 2n\pi/5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = \pi/4 + 2n\pi/3 \\ x = 5\pi/12 + 2n\pi/3 \end{cases}$

4.4:3 a) $\begin{cases} x = \pi/6 + 2n\pi \\ x = 11\pi/6 + 2n\pi \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \pi/5 + 2n\pi \\ x = 4\pi/5 + 2n\pi \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 25^\circ + n \cdot 360^\circ \\ x = 75^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 5^\circ + n \cdot 120^\circ \\ x = 55^\circ + n \cdot 120^\circ \end{cases}$

4.4:4 $v_1 = 50^\circ,\ \ v_2 = 120^\circ,\ \ v_3 = 230^\circ,$ $v_4 = 300^\circ$

4.4:5 a) $\begin{cases} x = n\pi \\ x = \pi/4 + n\pi/2 \end{cases}$

b) $x = n\pi/3$

c) $\begin{cases} x = \pi/20 + n\pi/2 \\ x = -\pi/30 + n\pi/3 \end{cases}$

4.4:6 a) $x = n\pi$

b) $\begin{cases} x = \pi/4 + 2n\pi \\ x = \pi/2 + n\pi \\ x = 3\pi/4 + 2n\pi \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2n\pi/3 \\ x = \pi + 2n\pi \end{cases}$

4.4:7 a) $\begin{cases} x = \pi/6 + 2n\pi \\ x = 5\pi/6 + 2n\pi \\ x = 3\pi/2 + 2n\pi \end{cases}$

b) $x = \pm\pi/3 + 2n\pi$

c) $\begin{cases} x = \pi/2 + 2n\pi \\ x = \pi/14 + 2n\pi/7 \end{cases}$

4.4:8 a) $\begin{cases} x = \pi/4 + 2n\pi \\ x = \pi/2 + n\pi \\ x = 3\pi/4 + 2n\pi \end{cases}$

b) $x = \pi/3 + n\pi$

c) $\begin{cases} x = n\pi \\ x = 3\pi/4 + n\pi \end{cases}$

Schriftliche Mathematik

5.1:1 a) `2-3+4`
b) `-1+0,3`
c) `-5-(-3)=-5+3`
d) `5/2+1 > 5/(2+1)`

5.1:2 a) `3\cdot 4\pm 4`
b) `4x^2-\sqrt{x}`
c) `4\cdot 3^n\ge n^3`
d) `3-(5-2)=-(-3+5-2)`

5.1:3 a) `\dfrac{x+1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}`
b) `\left(\dfrac{5}{x}-1\right)(1-x)`
c) `\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}` `+\frac{1}{4}}`
d) `\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}`

5.1:4 a) `\sin^2 x+\cos x`
b) `\cos v=\cos\dfrac{3\pi}{2}`
c) `\cot 2x=\dfrac{1}{\tan 2x}`
d) `\tan\dfrac{u}{2}=\dfrac{\sin u}` `{1+\cos u}`

5.1:5 a) `\sqrt{4+x^2}`
b) `\sqrt[n]{x+y}\ne\sqrt[n]{x}` `+\sqrt[n]{y}`
c) `\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}`
d) `\left(\sqrt[4]{3}\right)^3` `\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}`

5.1:6 a) `\ln(4\cdot 3)=\ln 4+\ln 3`
b) `\ln(4-3)\ne \ln 4-\ln 3`
c) `\log_{2}4=\dfrac{\ln 4}{\ln 2}`
d) `2^{\log_{2}4}=4`

5.1:7 a) `4^{3/4}(1-(3-4))`
b) `2\sqrt{a+b}`
c) `\cot x=\frac{1}{2}\sin 20^{\circ}`

5.2:1 a) $\Leftarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Leftrightarrow$